1 (*) Calculer le déterminant des matrices suivantes, préciser lesquelles sont inversibles et calculer leur rang (si nécessaire en fonction du paramètre a) :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

$$5. E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & 0 & 1 \\ -2 & a & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6. F = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

RÉPONSE :

1. $\det(A) = -1 \neq 0$ donc A est inversible et $\text{rg}(A) = 3$

2. Calculons $\det(B)$ en appliquant quelques opérations élémentaires :

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - C_4}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{développement selon } L_2) \\ &\stackrel{C_2 \leftarrow C_2 + C_4, C_3 \leftarrow C_3 - C_4}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \quad (\text{développement selon } L_3) \\ &= 0 \quad (\text{deux lignes identiques}) \end{aligned}$$

La matrice B n'est pas inversible.

Pour trouver le rang de B on peut par exemple adapter le calcul précédent ainsi :

$$\begin{aligned} \text{rg}(B) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - C_4}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (C_4 \text{ ne peut pas être combinaison linéaire des autres colonnes}) \\ &\stackrel{C_2 \leftarrow C_2 + C_4, C_3 \leftarrow C_3 - C_4}{=} 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 + \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad (C_4 \text{ ne peut pas être combinaison linéaire des autres colonnes}) \\ &= 2 + 2 = 4 \quad (\text{deux lignes identiques}) \end{aligned}$$

3. Les colonnes C_1 et C_2 de la matrice C sont liées donc $\det(C) = 0$: C n'est pas inversible. De plus les colonnes C_1 et C_3 sont indépendantes, donc $\text{rg}(C) = 2$.
4. $\det(D) = -8$, D est inversible de rang 4
- 5.

$$\begin{aligned} \det(E) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & 0 & 1 \\ -2 & a & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= a \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{développement selon } C_1) \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2, C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{=} a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ a-2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -a \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ a-2 & -1 \end{vmatrix} \quad (\text{développement selon } L_1) \\ &= 3a \end{aligned}$$

E est inversible ssi $a \notin \{0\}$

6.

$$\begin{aligned} \det(F) &= \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \\ &= a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \quad (\text{développement selon } C_1) \\ &= a(a^3 - 2a) - (a^2 - 1) \\ &= a^4 - 3a^2 + 1 \end{aligned}$$

F est inversible ssi $a \notin \left\{ \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \right\}$

2 (*) En calculant un déterminant, préciser si les familles suivantes sont des bases de E :

1. $E = \mathbb{R}^3$, $(e_1 = (1, -1, 1), e_2 = (-1, 1, 0), e_3 = (2, 3, 1))$
2. $E = \mathbb{R}^4$, $(e_1 = (0, 1, 1, 1), e_2 = (1, 0, 1, 1), e_3 = (1, 1, 0, 1), e_4 = (1, 1, 1, 0))$
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (X^3 + 1, X^3 - X + 1, 2X + 3, X^3 + X + 1)$
4. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $(e_1 = X(X + 1), e_2 = X(X + 2), e_3 = (X + 1)(X + 2))$

RÉPONSE :

1. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$\det_B(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} \det_B(e_1, e_2, e_3, e_4) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (\text{développement selon } C_1) \\ &= -3 \neq 0 \end{aligned}$$

La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

3. Soit $B = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$,

$$\det_B(e_1, e_2, e_3, e_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (L_3 \text{ nulle})$$

La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) n'est pas une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

4. Soit $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$,

$$\det_B(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

(e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3 (★) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(A)$
2. Calculer BA et en déduire $\det(B)$ sous forme factorisée.

RÉPONSE : Rappelons d'abord que j est une racine cubique de l'unité (ie $j^3 = 1$) avec les formules suivantes :

$$j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad 1 + j + j^2 = 0 \quad \text{et} \quad \bar{j} = j^2$$

1. $\det(A)$ se calcul directement. Par exemple en développant selon la première colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} j & j^2 \\ j^2 & j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j^2 & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j & j^2 \end{vmatrix} = (j^2 - j) - (j - j^2) + (j^2 - j) = 3(j^2 - j) = -3i\sqrt{3}$$

2. On calcule facilement

$$BA = \begin{pmatrix} a+b+c & a+bj+cj^2 & a+bj^2+cj \\ c+a+b & c+aj+bj^2 & c+aj^2+bj \\ b+c+a & b+cj+aj^2 & b+cj^2+aj \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a+bj+cj^2 & a+bj^2+cj \\ a+b+c & j(a+bj+cj^2) & j^2(a+bj^2+cj) \\ a+b+c & j^2(a+bj+cj^2) & j(a+bj^2+cj) \end{pmatrix}$$

On voit apparaître un facteur commun sur chaque colonne de BA , donc son déterminant se factorise :

$$\begin{aligned} \det(BA) &= \begin{vmatrix} a+b+c & a+bj+cj^2 & a+bj^2+cj \\ a+b+c & j(a+bj+cj^2) & j^2(a+bj^2+cj) \\ a+b+c & j^2(a+bj+cj^2) & j(a+bj^2+cj) \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) \det(A) \end{aligned}$$

Par ailleurs $\det(BA) = \det(B) \cdot \det(A)$ et $\det(A) \neq 0$, donc

$$\det(B) = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$$

4 (★) Soit A une matrice antisymétrique (ie $A^T = -A$) d'ordre n . Montrer que n impair $\Rightarrow A$ n'est pas inversible.

RÉPONSE : Supposons n impair. Par hypothèse $A^T = -A$ donc $\det(A^T) = \det(-A)$, donc $\det(A) = (-1)^n \det(A)$. Or n est impair, donc $\det(A) = 0$. La matrice A ne peut être inversible.

5 (★) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice d'ordre n à coefficients entiers. Montrer que $\det(A) \in \mathbb{Z}$. (indication : procéder par récurrence sur n)

RÉPONSE : C'est évident pour une matrice d'ordre 1.

Supposons la propriété vraie pour toute matrice d'ordre n , et soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$. Notons $\hat{A}_{i,j}$ la matrice d'ordre n obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j de A ($i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$). Ces matrices $\hat{A}_{i,j}$ sont à coefficients entiers, donc par hypothèse de récurrence leur déterminant est entier. Or on a la formule de développement selon la première colonne de A :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(\hat{A}_{i,1})$$

Tous les termes de cette somme sont entiers. Finalement $\det(A) \in \mathbb{Z}$.

6 (★★) Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$1. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

RÉPONSE :

1.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} \\ & = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \\ & \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} \\ & = (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} \\ & = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} a-2 & -1 & -1 \\ a-2 & a & -1 \\ a-2 & -1 & a \end{vmatrix} \\ & \stackrel{\substack{L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} a-2 & -1 & -1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} \\ & = (a-2)(a+1)^2 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ b^2 & ab & a^2 \end{vmatrix} & \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + ab & b^2 & ab \\ a^2 + b^2 + ab & a^2 & b^2 \\ a^2 + b^2 + ab & ab & a^2 \end{vmatrix} \\
& = (a^2 + b^2 + ab) \begin{vmatrix} 1 & b^2 & ab \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & ab & a^2 \end{vmatrix} \\
& \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (a^2 + b^2 + ab) \begin{vmatrix} 1 & b^2 & ab \\ 0 & a^2 - b^2 & b^2 - ab \\ 0 & ab - b^2 & a^2 - ab \end{vmatrix} \\
& = (a^2 + b^2 + ab)(a - b)^2 \begin{vmatrix} a + b & -b \\ b & a \end{vmatrix} \quad (a - b \text{ facteur commun sur } L_2 \text{ et sur } L_3, \text{ et développement selon } L_1) \\
& = (a^2 + b^2 + ab)(a - b)^2(a^2 + b^2 - ab)
\end{aligned}$$

4. Posons $u = (1, a, a^2)$, $v = (1, b, b^2)$ et $w = (1, c, c^2)$. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a + b & b + c & c + a \\ a^2 + b^2 & b^2 + c^2 & c^2 + a^2 \\ a^3 + b^3 & b^3 + c^3 & c^3 + a^3 \end{vmatrix} & = \det_B(au + bv, bv + cw, cw + au) \\
& = abc \cdot \det_B(u, v, w) + aba \cdot \det_B(u, v, u) + \dots + bca \cdot \det_B(v, w, u) \quad (\text{multilinéarité}) \\
& = 2abc \cdot \det_B(u, v, w) \quad (\text{le déterminant est alterné}) \\
& = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
& = 2abc(b - a)(c - a)(c - b) \quad (\text{on reconnaît un déterminant de Vandermonde, voir exercice 8})
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a + b & ab & a^2 + b^2 \\ b + c & bc & b^2 + c^2 \\ c + a & ca & c^2 + a^2 \end{vmatrix} & \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} a + b & ab & a^2 + b^2 \\ c - a & b(c - a) & c^2 - a^2 \\ c - b & a(c - b) & c^2 - b^2 \end{vmatrix} \\
& = (c - a)(c - b) \begin{vmatrix} a + b & ab & a^2 + b^2 \\ 1 & b & c + a \\ 1 & a & c + b \end{vmatrix} \\
& \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} (c - a)(c - b) \begin{vmatrix} a + b & ab & a^2 + b^2 \\ 1 & b & c + a \\ 0 & a - b & b - a \end{vmatrix} \\
& = (c - a)(c - b)(a - b) \begin{vmatrix} a + b & ab & a^2 + b^2 \\ 1 & b & c + a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
& \stackrel{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{=} (c - a)(c - b)(a - b) \begin{vmatrix} a + b & ab & a^2 + b^2 + ab \\ 1 & b & c + a + b \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
& = -(c - a)(c - b)(a - b) \begin{vmatrix} a + b & a^2 + b^2 + ab \\ 1 & c + a + b \end{vmatrix} \quad (\text{développement selon } L_3) \\
& \stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - (a+b+c)C_1}{=} -(c - a)(c - b)(a - b) \begin{vmatrix} a + b & -ab - bc - ac \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
& = (c - a)(c - b)(b - a)(ab + ac + bc)
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\
& = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\
& \stackrel{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=}}{(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}} \\
& = (a+b+c)^3
\end{aligned}$$

7 (**) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA$ soit inversible et $A^2 + B^2 = AB$

- On pose $M = A + jB$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On note $\overline{M}$ la matrice conjuguée de M , ie la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M . Vérifier que $M\overline{M} = j(BA - AB)$.
- Calculer de deux façons $\det(M\overline{M})$, en déduire que n est un multiple de 3.

RÉPONSE :

- $M\overline{M} = (A + jB)(A + \overline{j}B) = A^2 + \overline{j}AB + jBA + B^2$ Or $A^2 + B^2 = AB$ et $1 + \overline{j} = -j$ donc

$$M\overline{M} = AB + \overline{j}AB + jBA = -jAB + jBA = j(BA - AB)$$

- Première méthode : $\det(M\overline{M}) = \det(M) \cdot \det(\overline{M}) = \det(M)\overline{\det(M)} = |\det(M)|^2$.

Deuxième méthode : $\det(M\overline{M}) = \det(j(BA - AB)) = j^n \det(BA - AB)$

Par conséquent : $|\det(M)|^2 = j^n \det(BA - AB)$. Or $BA - AB$ est une matrice réelle supposée inversible, donc $\det(BA - AB)$ est un réel non nul. De plus $|\det(M)|^2$ est un réel. Donc $j^n \in \mathbb{R}$. On en déduit facilement que n est divisible par 3.

8 (**) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. On définit le déterminant de Vandermonde associé par

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

- Calculer ce déterminant pour $n \leq 3$

- On suppose $n \geq 3$. Montrer que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \left(\prod_{k=2}^n (\alpha_k - \alpha_1) \right) V(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

(indication : on pourra commencer par effectuer les opérations $C_j \leftarrow C_j - \alpha_1 C_{j-1}$ pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$)

- Établir la formule de Vandermonde : $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$. À quelle condition le nombre $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est-il non nul ?

RÉPONSE :

- On trouve $V(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)$

- Appliquons à $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les opérations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - \alpha_1 C_{j-1}$ pour j allant de n à 2. On obtient :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \cdots & \alpha_2^{n-1} - \alpha_1 \alpha_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n - \alpha_1 & \cdots & \alpha_n^{n-1} - \alpha_1 \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

On développe selon la première ligne puis on factorise les lignes suivantes par $\alpha_j - \alpha_1$ ($2 \leq j \leq n$) on trouve :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{j=2}^n (\alpha_j - \alpha_1) \cdot V(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

- On raisonne par récurrence à partir de la formule obtenue dans la question précédente.

$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est non nul ssi les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts.

9 (**) Calculez les déterminants des matrices d'ordre n suivantes :

$$1. A = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

$$2. B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$3. C = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

RÉPONSE :

1. On applique successivement les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$ puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ ($i \in \llbracket 2, n \rrbracket$) on obtient

$$\det(A) = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

2. On applique successivement les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$ puis $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ ($i \in \llbracket 2, n \rrbracket$). On développe alors selon la première colonne :

$$\det(B) = (1 + 2 + \cdots + n) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & & & 1-n & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & & & & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

On peut alors se ramener au déterminant de la question précédente en effectuant les opérations $C_i \leftrightarrow C_{n-i}$ pour tout $i < \frac{n}{2}$. Il y a $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ échanges de colonnes à faire, donc

$$\begin{aligned} \det(B) &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \cdot \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \cdot (1-n+n-2)(1-n-1)^{n-2} \\ &= \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^{n-1} (n+1)}{2} \end{aligned}$$

3. Tout d'abord :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 2 & & n \end{pmatrix}$$

Effectuons dans $\det(C)$ les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ ($i \in \llbracket 2, n \rrbracket$) nous obtenons

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

10 (**) Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, on pose $D_1 = a$, $D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}$ et pour $n \geq 3$: $D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$ (déterminant tridiagonal).

1. Calculer D_3 (on ne cherchera pas à factoriser)

- Soit $n \geq 3$. Établir une relation entre D_n , D_{n-1} et D_{n-2} . En déduire comment calculer l'expression de D_n en fonction de n
- Calculer explicitement D_n lorsque $b = c = 1$ et $a = 2 \cos \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

RÉPONSE :

- $D_3 = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = a^3 - 2abc$

- Développons D_n selon la première colonne :

$$D_n = a.D_{n-1} - c. \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}_{[\text{ordre } n-1]}$$

Nous développons alors ce déterminant 'ordre $n - 1$ selon sa première ligne, nous obtenons

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

La suite (D_n) est une suite récurrente linéaire double, il est possible d'expliciter D_n en exploitant les racines de son polynôme caractéristique $X^2 - aX + bc$

- Sur cet exemple, le polynôme caractéristique associé à (D_n) est

$$X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

* 1er cas les racines sont distinctes ie $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$ modulo 2π : il existe des réels α, β tels que

$$\forall n \geq 1 \quad D_n = \alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)$$

Or $D_1 = 2 \cos \theta$ et $D_2 = 4 \cos^2 \theta - 1$; on en déduit $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, puis

$$\forall n \geq 1 \quad D_n = \cos(n\theta) + \frac{\cos(\theta) \sin(n\theta)}{\sin \theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

* 2eme cas : $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ modulo 2π : il existe des réels α, β tels que

$$\forall n \geq 1 \quad D_n = (\alpha + \beta n)e^{in\theta}$$

On trouve encore α et β en utilisant D_1 et D_2 : -si $\theta = 0$ modulo 2π : $D_n = 1 + n$

-si $\theta = \pi$ modulo 2π : $D_n = (1 + n)(-1)^n$

En admettant que D_n est continue par rapport à la variable θ , il est possible de déduire le 2eme cas du 1er cas en faisant tendre θ vers 0 et vers π ...

11 (***) Soient $(x_1, \dots, c_n, a, b) \in \mathbb{K}^{n+2}$, $a \neq b$. On souhaite calculer $D = \begin{vmatrix} c_1 & b & \cdots & b \\ a & c_2 & (b) & \vdots \\ \vdots & (a) & \ddots & b \\ a & \cdots & a & c_n \end{vmatrix}$.

- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{vmatrix} c_1 + x & b + x & \cdots & b + x \\ a + x & c_2 + x & (b + x) & \vdots \\ \vdots & (a + x) & \ddots & b + x \\ a + x & \cdots & a + x & c_n + x \end{vmatrix}$ est une fonction affine.

- Calculer $f(-a)$ et $f(-b)$. En déduire l'expression de D .

RÉPONSE :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue sur $f(x)$ les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_1$ ($i \in \llbracket 2, n \rrbracket$) de manière à faire disparaître x des colonnes $C_2, \dots, C_n$. On développe ensuite selon la première colonne, ce qui donne

$$f(x) = (c_1 + x) \cdot \lambda_1 - (a + x)\lambda_2 + \dots + (-1)^{n+1}(a + x)\lambda_n$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ne dépendent pas de x . Donc f est bien une fonction affine.

2. $f(-a)$ et $f(-b)$ sont des déterminants triangulaires, leur calcul est immédiat :

$$f(-a) = \prod_{k=1}^n (c_k - a) \quad \text{et} \quad f(-b) = \prod_{k=1}^n (c_k - b)$$

Comme f est une fonction affine, elle est entièrement déterminée par la donnée des deux valeurs $f(-a)$ et $f(-b)$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{f(x) - f(-a)}{x - (-a)} = \frac{f(-b) - f(-a)}{(-b) - (-a)}$$

Il suffit alors de prendre $x = 0$ pour obtenir l'expression de D .

12 (***). Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$. On pourra étudier le polynôme $P(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & X \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & X^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & X^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & X^4 \end{vmatrix}$ et

utiliser la formule de Vandermonde.

RÉPONSE : Tout d'abord, avec les notations de l'exercice 8,

$$P(X) = V(a, b, c, d, X) = \lambda(X - a)(X - b)(X - c)(X - d)$$

où $\lambda = V(a, b, c, d)$.

Par ailleurs en développant le déterminant $P(X)$ selon la dernière colonne, on obtient :

$$P(X) = X^4 \cdot V(a, b, c, d) - X^3 \cdot \Delta + \dots$$

Il ne reste plus qu'à calculer le coefficient de X^3 dans $P(X)$. Il suffit de développer :

$$P(X) = \lambda(X - a)(X - b)(X - c)(X - d) = \lambda(X^4 - (a + b + c + d)X^3 + \dots$$

Finalement

$$\Delta = (a + b + c + d)V(a, b, c, d) = (a + b + c + d)(b - a)(c - a)(d - a)(c - b)(d - b)(d - c)$$

13 (***). Soit E un $\mathbb{K}$ -ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie n et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E .

- On note pour $k \in \mathbb{N}$: $w_k = v_1 + kv_2 + k^2v_3 + \dots + k^{n-1}v_n$. Montrer que n éléments distincts de la famille $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ forment toujours une base de E .
- En déduire que E ne peut s'écrire comme réunion d'un nombre finis de sous-espaces vectoriels stricts (ie distincts de E).

RÉPONSE :

- Soient $k_1, \dots, k_n$ des entiers 2 à 2 distincts. Le déterminant de $(w_{k_1}, \dots, w_{k_n})$ dans la base $(v_1, \dots, v_n)$ est le déterminant de Vandermonde $V(k_1, \dots, k_n)$. Or celui-ci est non nul, donc $(w_{k_1}, \dots, w_{k_n})$ est une base de E .
- Supposons $E = F_1 \cup \dots \cup F_p$ où $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces stricts de E . Les vecteurs $w_1, w_2, \dots$ sont en nombre infini, donc l'un au moins des sous-espaces $F_1, \dots, F_p$, disons F_1 , doit contenir une infinité de ces vecteurs. On peut donc trouver des entiers $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ tels que $w_{k_1}, \dots, w_{k_n}$ appartiennent tous à F_1 . Or (question 1) la famille $(w_{k_1}, \dots, w_{k_n})$ est une base de E . Donc $F_1 = E$: contradiction.