1 ($\star$) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x,y) = (x-y, x+2y)$. Écrire la matrice de u dans la base (e_1, e_2) dans chacun des cas ci-dessous :

1. $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$
2. $e_1 = (3,0)$, $e_2 = (0,5)$
3. $e_1 = (0,1)$, $e_2 = (1,0)$
4. $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (-1,1)$
5. $e_1 = (1,3)$, $e_2 = (2,5)$
6. $e_1 = (1,-2)$, $e_2 = (-3,1)$

RÉPONSE : Nous notons $B = (e_1, e_2)$

1. $u(e_1) = (1,1) = e_1 + e_2$ et $u(e_2) = (-1,2) = -e_1 + 2e_2$, donc $M_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $u(e_1) = (3,3) = e_1 + \frac{3}{5}e_2$ et $u(e_2) = (-5,10) = -\frac{5}{3}e_1 + 2e_2$ donc $M_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & -5/3 \\ 3/5 & 2 \end{pmatrix}$
3. $u(e_1) = (-1,2) = 2e_1 - e_2$ et $u(e_2) = (1,1) = e_1 + e_2$, donc $M_B(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $u(e_1) = (0,3) = \frac{3}{2}(e_1 + e_2)$ et $u(e_2) = (-2,1) = \frac{1}{2}(-e_1 + 3e_2)$ donc $M_B(u) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
5. $u(e_1) = (-2,7) = 24e_1 - 13e_2$ et $u(e_2) = (-3,12) = 39e_1 - 21e_2$ donc $M_B(u) = \begin{pmatrix} 24 & 39 \\ -13 & -21 \end{pmatrix}$
6. $M_B(u) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

2 ($\star$) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = P(1).(X^2+1) + 3(X+1)P'$. Écrire la matrice de u dans chacune des bases ci-dessous :

1. $(1, X, X^2)$
2. $(X^2, X, 1)$
3. $(-1, 3+4X, 1+X+X^2)$
4. $(X^2-X-1, X^2+2, 3X-1)$

RÉPONSE : On note à chaque fois $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base proposée.

1. $u(1) = 1 + X^2$, $u(X) = 4 + 3X + X^2$, $u(X^2) = 1 + 6X + 7X^2$ donc $M_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
2. $M_B(u) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
3. $u(e_1) = -1 - X^2 = \frac{3}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_2 - e_3$, $u(e_2) = -\frac{33}{4}e_1 + \frac{5}{4}e_2 + 7e_3$ et $u(e_3) = 3e_1 + 9e_3$ donc $M_B(u) = \begin{pmatrix} 3/4 & -33/4 & 3 \\ 1/4 & 5/4 & 0 \\ -1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$
4.

3 ($\star$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $B = (i,j)$. Pour chacune des bases B' de E ci-dessous, écrire la matrice de passage de B vers B', la matrice de passage de B' vers B, puis en déduire les coordonnées du vecteur $x = i + 2j$ dans la base B' :

1. $B' = B$
2. $B' = (j, i)$
3. $B' = (i+j, i-j)$
4. $B' = (i+3j, -2i-j)$

RÉPONSE : Notons à chaque fois $P = \mathcal{P}_{B,B'}$, $X = M_B(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X' = M_{B'}(x)$

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et $X' = X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $X' = P^{-1}X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
4.

$\boxed{4}$ ($\star$) Soit l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ défini par $u : (x, y, z) \mapsto (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$

1. Ecrire la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base et la dimension de $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$. En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer u^2 et u^3 en raisonnant matriciellement. Quelle est la matrice de u^{16} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

RÉPONSE : Notons $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. $u(e_1) = u(1, 0, 0) = (1, 0, 1) = e_1 + e_3$. On calcule de même $u(e_2) = 2e_1 + e_2 + e_3$ et $u(e_3) = -e_1 + e_2 - 2e_3$ donc
$$A = M_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow A. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -z \end{cases}$$
donc $\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 3z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \;/\; z \in \mathbb{R} \right\} = Vect(V)$ où on note $V = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (V) est une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$.
D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rg}(A) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$. La famille (C_1, C_2) des deux premières colonnes de A est une famille libre de $\mathrm{Im}(A)$, et $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$, donc (C_1, C_2) est une base de $\mathrm{Im}(A)$.
3. Nous calculons les matrices respectives de u^2 et u^3 dans la base canonique :
$$M_B(u^2) = M_B(u)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
et
$$M_B(u^3) = M_B(u)^3 = A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$
On observe que $A^3 = 3A$ (et donc $u^3 = 3u$). On a donc
$$M_B(u^{16}) = A^{16} = A^{15+1} = (A^3)^5.A = 3^5A^6 = 3^5.(A^3)^2 = 3^5.3^2.A^2 = 3^7A^2$$

$\boxed{5}$ ($\star$) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(i) = j + k$, $f(j) = i + k$ et $f(k) = i + j$.

1. Ecrire la matrice A de f dans $\mathcal{B}$.
2. En utilisant la matrice A,
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = i + j + k$.
   (b) Déterminer une base (e_2, e_3) de $\mathrm{Ker}(f + id)$.

(c) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E et donner la matrice de f dans cette base.

RÉPONSE :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Déterminons $\operatorname{Im}(A+I_3)$. On a $A+I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. L'image de cette matrice est engendrée par ses vecteurs colonnes C_1, C_2, C_3 qui sont égaux, donc $\operatorname{Im}(A+I) = Vect(C_1) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En posant $e_1 = i+j+k$ on a $M_{\mathcal{B}}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\operatorname{Im}(f + \operatorname{Id}_E) = Vect(e_1)$

3. Déterminons une base de $\operatorname{Ker}(A+I)$. D'après le théorème du rang ce sous-espace a pour dimension $3 - \operatorname{rg}(A+I) = 3-1 = 2$. Par ailleurs on a les relations $C_1 - C_2 = C_2 - C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A+I)$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A+I)$. Ces deux vecteurs sont indépendants, donc ils forment une base de $Ker(A+I)$:
$$Ker(A+I) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$
on en déduit :
$$\operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}) = Vect(i-j, j-k)$$

$\boxed{6}$ ($\star\star$) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & -4 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner l'expression de $u(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Calculer A^2, A^3, en déduire u^3.
3. On pose $e_3 = (1,0,0), e_2 = u(e_3), e_1 = u^2(e_3)$. Vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on précisera la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.
4. Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$. Calculer M^3 et retrouver la valeur de u^3.

RÉPONSE :

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, les coordonnées de $u(x,y,z)$ dans la base canonique sont
$$A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x+y+4z \\ -x-7y-4z \\ -6x+6y \end{pmatrix}$$
donc $u(x,y,z) = (7x+y+4z, -x-7y-4z, -6x+6y)$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 24 & 24 & 24 \\ 24 & 24 & 24 \\ -48 & -48 & -48 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$. Donc $u^3 = 0$.

3. On calcule $e_2 = (7, -1, 6)$ et $e_1 = (24, 24, -48)$. On vérifie que (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de 3 vecteurs, donc est une base de $\mathbb{R}^3$. En notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,
$$\mathcal{P}_{B_c, B} = \begin{pmatrix} 24 & 7 & 1 \\ 24 & -1 & 0 \\ -48 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

4. En utilisant la formule $u^3 = 0$, ainsi que la définition des vecteurs e_2 et e_1, on obtient :

$$\begin{cases} u(e_1) = u^3(e_3) = 0 \\ u(e_2) = u^2(e_3) = e_1 \\ u(e_3) = e_2 \end{cases}$$

donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule facilement $M^3 = 0$, on retrouve donc $u^3 = 0$

$\boxed{7}$ ($\star\star$) Soit $E = M_2(\mathbb{R})$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $f : E \to E$ l'application définie par $f(X) = X^T + \operatorname{Tr}(X)J$, où X^T est la transposée de X et $\operatorname{Tr}(X)$ est la trace de X, ie la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Vérifier que f est linéaire.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (I, J, K, L)$ est une base de E
3. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}$

RÉPONSE :

1. Cela résulte de la linéarité de la transposition $X \mapsto X^T$ et de la trace $\operatorname{Tr} : X \mapsto \operatorname{Tr}(X)$.
2. $\dim(E) = 4$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Or pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$,

$$aI + bJ + cK + dL = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+c+d \\ b-d & a+c+d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$$

$\mathcal{B}$ est libre

3. On trouve $f(I) = I + 2J$, $f(J) = J$, $f(K) = 2I + 3J - K$, $f(L) = 4I + 3J - 4K + 4L$ donc

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{8}$ ($\star\star$) Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$

1. Montrer que la relation "semblable" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ie une relation réflexive, symétrique et transitive)
2. Montrer que deux matrices semblables ont même rang. Que se passe-til si l'une des deux matrices est inversible ?
3. Si A et B sont semblables, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont semblables.
4. Montrer que A, B sont semblables si et seulement si il existe un endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ tel que A et B sont les matrices de u dans deux bases de $\mathbb{K}^n$.
5. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.
6. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.
7. Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.

RÉPONSE :

1. Montrons par exemple la transitivité. Supposons A semblable à B et B semblable à C. Il existe donc P, Q inversibles telles que $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$. Donc $C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ)$: A et C sont semblables.

2. D'après le cours, pour une matrice inversible P, on a $\text{rg}(AP) = \text{rg}(A)$ et $\text{rg}(P^{-1}AP) = \text{rg}(AP) = \text{rg}(A)$. Une matrice est inversible ssi son rang est égal à n. Donc si A est inversible et si B est semblable à A, alors B est inversible. De plus $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$ donc A^{-1} et B^{-1} sont semblables.

3. Si $B = P^{-1}AP$ on montre facilement que $B^k = P^{-1}A^kP$ donc A^k et B^k sont semblables.

4. (2) implique (1) : c'est la formule de changement de base pour les endomorphismes vue en cours.
(1) implique (2) : Supposons $B = P^{-1}AP$. Soit $\mathcal{B}$ une base de K^n et $u \in L(\mathbb{K}^n$ tel que $A = M_B(u)$. P est inversible, donc il existe une base B' de $\mathbb{K}^n$ telle que $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},B'}$. Donc
$$B = \mathcal{P}_{\mathcal{B},B'}^{-1} M_B(u) \mathcal{P}_{\mathcal{B},B'} = M_{B'}(u)$$
A et B sont bien les matrices d'un même endomorphisme u, dans les bases respectives $\mathcal{B}$ et B'.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. Posons $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ avec $u \in (\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a donc
$$u(e_1) = 0 \quad u(e_2) = e_1 \quad u(e_3) = e_2$$
En posant $B' = (e_3, e_2, e_1)$ (c'est une base de $\mathbb{R}^3$) on a $M_{B'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc les matrices A et B sont semblables.

7. $\text{Tr}(P^{-1}(AP)) = \text{Tr}((AP)P^{-1}) = \text{Tr}(A)$.

9 ($\star\star$) Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V telles que $H = U{}^tV$. Vérifier que $\text{Tr}(H) = {}^tVU$.
2. En déduire que $H^2 = Tr(H)H$. Calculer H^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. À quelle condition la matrice H est-elle nilpotente ?
4. À quelle condition la matrice H est-elle la matrice d'un projecteur ?

Réponse :

1. Soient $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de H. $H \neq 0$, donc une de ces colonnes n'est pas identiquement nulle, disons C_1. De plus $\text{rg}(H) = 1$, donc toute colonne de H est proportionnelle à C_1 :
$$\forall j \in [\![1, n]\!] \ \exists \alpha_j \in \mathbb{K} \quad C_j = \alpha_j C_1$$
Par conséquent
$$H = \begin{pmatrix} C_1 & \alpha_2 C_1 & \cdots & \alpha_n C_n \end{pmatrix} = C_1 . \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = U.V^T$$
où $U = C_1$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.
Notons maintenant $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Avec ces notations on a donc $H = U.V^T = (u_j v_i)_{1 \leq i,j \leq n}$, et
$$\text{Tr}(H) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = U^T.V$$

2. $H^2 = (UV^T)^2 = (UV^T)(UV^T) = U.(V^T.U).V^T = U.\text{Tr}(H).V^T = \text{Tr}(H).UV^T = \text{Tr}(H).H$
On en déduit par une récurrence facile $H^k = \text{Tr}(H)^{k-1}.H$.

3. H nilpotente $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}^* \ H^k = 0) \Leftrightarrow \text{Tr}(H) = 0$

4. H est la matrice d'un projecteur $\Leftrightarrow H^2 = H \Leftrightarrow \text{Tr}(H) = 1$

$\boxed{10}$ ($\star\star$) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in E$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, et $u : E \to E$ défini par $u : M \mapsto AM$. Montrer que u est un endomorphisme, donner une base du noyau et de l'image de u.

RÉPONSE : On montre facilement que u est linéaire, c'est donc un endomrphisme de E.
Soit $(E_{i,j})$ la base canonique de E (matrices élémentaires), on calcule :

$$u(E_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = U_j$$

On vérifie facilement que la famille $(U_1, \cdots, U_n)$ est libre, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$ et $\dim(\mathrm{Im}(u)) = n$.
D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n^2 - n$. De plus la famille $(E_{i+1,j} - E_{i,j})_{1\leq i \leq n-1, 1\leq j\leq n}$ est une famille libre de $n^2 - n$ vecteurs de $\mathrm{Ker}(u)$,donc est une base de $\mathrm{Ker}(u)$

$\boxed{11}$ ($\star\star\star$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ soit $f_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ définie par $\forall j \quad f_i(e_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker).

1. On note $E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E (appelé espace dual de E). Quelle est la dimension de $E^\star$?
2. Montrer que $B^\star = (f_1, \cdots, f_n)$ est une base de $E^\star$, appelée base duale de B.
3. Soit u un endomorphisme de E et $v : \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \to \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'application définie par $v : \varphi \mapsto \varphi \circ u$
   (a) Montrer que v est linéaire.
   (b) On note $A = M_B(u)$. Quelle est la matrice de v dans la base $B^\star$?

$\boxed{12}$ ($\star\star\star$) Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$
2. Justifier que $A(BA - I_2)B = 0$, en déduire que $BA = I_2$

RÉPONSE :

1. Remarquons d'abord que $\mathrm{rg}(AB) = 2$. Compte tenu de la taille des matrices A et B on a aussi $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(2, 3) = 2$ et de même $\mathrm{rg}(B) \leqslant 2$. De plus $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$, donc $A \leqslant \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$. Finalement $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$.
2. $A(BA - I)B = (AB)^2 - AB = 0$.
   On en déduit $Im((BA - I).B) \subset \mathrm{Ker}(A)$. Or (thm du rang) $\dim(\mathrm{Ker}(A) = 2 - \mathrm{rg}(A) = 0$. Donc $Im((BA - I).B) = \{0\}$, ie $(BA - I).B = 0$.
   On a donc $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(BA - I)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(BA - I)) \geqslant \mathrm{rg}(B) = 2$, donc $\mathrm{Ker}(BA - I) = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Finalement $BA - I = 0$.

$\boxed{13}$ ($\star\star\star$) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = A$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rg}(A)$

RÉPONSE : Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ et B_c la base canonique de $\mathbb{R}^n$, de sorte que $M_{B_c}(u) = A$. On a $u^2 = u$ donc u est un projecteur de $\mathbb{R}^n$. Notons $r = \mathrm{rg}(A)$. r est aussi le rang de u, ie $r = \dim(\mathrm{Im}(u))$. u est un projecteur, donc $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = \mathbb{R}^n$. Soit $(e_1, \cdots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$, et $(u_{r+1}, \cdots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$, la famille $B = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

En notant P la matrice de passage de B_c vers B, on a la relation de changement de base $P^{-1}AP = J$, donc on déduit $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(J) = r = \mathrm{rg}(A)$.