1 (★) Les espaces vectoriels suivants sont-ils de dimension finie ? Si oui préciser leur dimension et en donner une base :

1. $\{ (x - y, x + 2y, x, 4y) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$	6. $\{ f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \ / \ f(1) = 0 \}$
2. $\{ P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(0) = 0 \}$	7. $\{ f \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f' - 2f = 0 \}$
3. $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 0 \}$	8. $\{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \ \int_0^x f = f(x) \}$
4. $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0 \}$	9. $\{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \}$
5. $\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \ / \ X^2 + 1 \text{ divise } P \}$	10. $\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \text{Tr}(M) = 0 \}$

RÉPONSE : On note à chaque fois F l'ensemble proposé.

- $F = \text{Vect}((1, 1, 1, 0), (-1, 2, 0, 4))$ est de dimension finie. Une base de F est $((1, 1, 1, 0), (-1, 2, 0, 4))$, $\dim(F) = 2$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille libre de n vecteurs de F . Donc F n'est pas de dimension finie.
- $F = \text{Vect}((1, -1))$ est de dimension 1 ; une base de F est $((1, -1))$
- $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est de dimension 2 ; une base de F est $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$
- $F = \{ (X^2 + 1).Q \ / \ Q \in \mathbb{R}_2[X] \} = \text{Vect}(X^2 + 1, X^3 + X, X^4 + X^2)$ est de dimension 3, et $(X^2 + 1, X^3 + X, X^4 + X^2)$ est une base de F .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(x \mapsto (x - 1)^k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille libre de n vecteurs de F . Donc F n'est pas de dimension finie.
- $F = \text{Vect}(x \mapsto e^{2x})$ est de dimension 1
- Soit $f \in F$. f est continue et $\forall x \ f(x) = \int_0^x f$, donc f est de classe C^1 et $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = f(x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$.
En résolvant cette équation différentielle avec condition initiale on obtient $f = 0$. Donc $F = \{0\}$ est de dimension 0
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(x \mapsto \sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$ est une famille libre de n vecteurs de F . Donc F n'est pas de dimension finie.
- Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\text{Tr}(M) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_{ii} = 0 \Leftrightarrow m_{nn} = - \sum_{i=1}^{n-1} m_{ii}$$

Par conséquent $F = \text{Vect}((E_{ij})_{i \neq j}, (E_{ii} - E_{nn})_{1 \leq i \leq n-1})$ est de dimension $(n^2 - n) + (n - 1) = n^2 - 1$.
(NB : on peut obtenir cette dimension autrement en remarquant que $F = \text{Ker}(\text{Tr})$ et en appliquant le théorème du rang à l'application linéaire $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$)

2 (★) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $F = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA \}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en donner une base et la dimension

RÉPONSE : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, nous avons

$$AM = MA \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2c = -a + 2b \\ -b + 2d = 2a + 2b \\ 2a + 2c = -c + 2d \\ 2b + 2d = 2c + 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = d - \frac{3}{2}d \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} d - \frac{3}{2}b & b \\ b & d \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit $F = \text{Vect}(\begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$, donc F est de dimension 2

3 (★) Démontrer que la fonction f est linéaire, donner une base de son noyau et de son image, préciser leurs dimensions :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f : (x, y) \mapsto (x - y, x + 2y)$
2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f : (x, y, z) \mapsto x - y + z$
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f : (x, y) \mapsto (x, x + y, 2y)$
4. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f : (x, y, z) \mapsto (x + y - z, 3x + 4z, 5x + 2y + 2z)$
5. $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X], f : P \mapsto P(1)X^2 + (2X + 1)P'$

RÉPONSE : La linéarité de f est laissée en exercice.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

donc $\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$ est de dimension 0.

En utilisant la base canonique $((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$, nous avons

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1, 0), f(0, 1)) = \text{Vect}((1, 1), (-1, 2))$$

donc $((1, 1), (-1, 2))$ est une base de $\text{Im}(f)$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

NB : on peut aussi calculer $\text{Im}(f)$ en utilisant le théorème du rang ; en effet d'après ce théorème,

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\text{Ker}(f)) = 2 - 0 = 2$$

En passant $\text{Im}(f)$ est un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{R}^2$, donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2 \dots$

2. $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ est de dimension 1 avec pour base (1). $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 1))$ a pour dimension 2.
3. $\text{Ker}(f) = \{0\}$ est de dimension 0 ; $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 2))$ est de dimension 2
4. $\text{Ker}(f) = \{ (-4z/3, 7z/3, z) \mid z \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}((-4, 7, 3))$ a pour dimension 1 et pour base $((-4, 7, 3))$.
D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$. Par ailleurs on a

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) = \text{Vect}((1, 3, 5), (1, 0, 2), (-1, 4, 2))$$

La famille $((1, 3, 5), (1, 0, 2))$ est une famille libre de 2 vecteurs de $\text{Im}(f)$, avec $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, donc cette famille est une base de $\text{Im}(f)$.

NB : La famille $((1, 3, 5), (1, 0, 2), (-1, 4, 2))$, obtenue en prenant l'image par f de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est génératrice de $\text{Im}(f)$ mais pas libre.

4 (★) Donner le rang des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes. Sont-elles libres ou génératrices ? S'il s'agit d'une base, préciser les coordonnées correspondantes du vecteur $i = (1, 0, 0)$:

1. $e_1 = (1, 0, 1), e_2 = (-3, 2, 1)$
2. $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 2, 1), e_3 = (1, 2, 1), e_4 = (1, -2, -1)$
3. $e_1 = (0, 1, 1), e_2 = (1, 0, 1), e_3 = (1, 1, 0)$
4. $e_1 = (-1, 1, 0), e_2 = (1, 0, -1), e_3 = (1, 1, 0)$

RÉPONSE :

1. (e_1, e_2) est libre, donc $\text{rg}(e_1, e_2) = 2$. $2 < \dim(\mathbb{R}^3)$ donc cette famille n'est pas génératrice.
2. On observe que $e_3 = e_1 + e_2$ et $e_4 = e_1 - e_2$, donc $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \text{Vect}(e_1, e_2)$. De plus (e_1, e_2) est libre, donc $\text{rg}(e_1, e_2, e_3, e_4) = 2$. Le nombre de vecteurs de la famille est $>$ au rang donc la famille n'est pas libre. Le rang est $< \dim(\mathbb{R}^3)$ donc la famille n'est pas génératrice.
3. (e_1, e_2, e_3) est libre, donc de rang 3. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc la famille est une base de $\mathbb{R}^3$. On trouve $i = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3)$ donc $M_{(e_1, e_2, e_3)}(i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$; $M_{(e_1, e_2, e_3)}(i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5 (*) Vérifier que $(X^3 - 1, X^3 + X, X^3 + X + 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$, la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

RÉPONSE : -Montrons que la famille est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$a(X^3 - 1) + b(X^3 + X) + c(X^3 + X + 1) = 0$$

On a alors $(a + b + c)X^3 + (b + c)X + (c - a) = 0$, donc $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ c - a = 0 \end{cases}$, donc $a = b = c = 0$. La famille

proposée est bien libre.

-D'après le théorème de la base incomplète, il est possible de compléter cette famille en base en utilisant des vecteurs bien choisis de la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Par ailleurs $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$, il n'y a qu'un seul vecteur à ajouter.

On vérifie facilement que la famille $(X^3 - 1, X^3 + X, X^3 + X + 1, X^2)$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

6 (*) Vérifier que $(X, X^2, (X - 1)^2, (X + 1)^2, 2X^2 + 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, en extraire une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

RÉPONSE : Vérifions que $1, X$ et X^2 sont combinaisons linéaires de la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ proposée. On a par exemple les relations :

$$\begin{cases} 1 = (2X^2 + 1) - 2X^2 = e_5 - 2e_2 \\ X = e_1 \\ X^2 = e_2 \end{cases}$$

Par conséquent $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X, X^2) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, donc la famille proposée est bien génératrice. Remarquons par ailleurs que $1, X, X^2$ sont combinaisons linéaires de e_1, e_2 et e_5 . Donc (e_1, e_2, e_5) est une famille génératrice de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$. Or $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, donc la famille (e_1, e_2, e_5) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

7 (*) Soit $F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = x + 2y + z + t = x + t = 0 \}$.

1. Montrer que F est une droite vectorielle, en donner une base.
2. Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

RÉPONSE :

1. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + 2y + z + t = 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -\frac{2}{3}t \\ z = \frac{4}{3}t \end{cases}$$

donc $F = \{ (-t, -2t/3, 4t/3, t) \mid t \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}((-3, -2, 4, 3))$. Le vecteur $e_1 = (-3, -2, 4, 3)$ forme une base de F , et $\dim(F) = 1$.

2. Posons $e_2 = (1, 0, 0, 0)$, $e_3 = (0, 1, 0, 0)$ et $e_4 = (0, 0, 1, 0)$. On vérifie facilement que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre. Or $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, donc cette famille de 4 vecteurs est une base de $\mathbb{R}^4$.

En particulier Les sous-espaces $F = \text{Vect}(e_1)$ et $G = \text{Vect}(e_2, e_3, e_4)$ sont supplémentaires.

8 (*) On note respectivement D_n et T_n^+ et T_n^- les ensembles des matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures) (resp. triangulaires inférieures) d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{K})$ sont notées $E_{i,j}$

1. Montrer que $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ est une base de D_n . Quelle est la dimension de D_n ?
2. Proposer de même des bases de T_n^+ et de T_n^- et préciser leur dimension.
3. Les sous-espaces T_n^+ et T_n^- sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
4. Proposer un sous-espace supplémentaire de D_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quelle est sa dimension ?

RÉPONSE :

1. La famille $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ est une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont est libre. De plus pour toute matrice diagonale $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, on a

$$A = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{i,i}$$

donc la famille $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ engendre D_n . Donc c'est une base de D_n . Il y a n matrices dans cette famille donc $\dim(D_n) = n$.

2. La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une base de T_n^+ . Il y a $\frac{n(n+1)}{2}$ couples $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $i \leq j$ donc $\dim(T_n^+) = \frac{n(n+1)}{2}$

De même La famille $(E_{i,j})_{1 \leq j \leq i \leq n}$ est une base de T_n^- et $\dim(T_n^-) = \frac{n(n+1)}{2}$

3. $T_n^+ \cap T_n^- = D_n \neq \{0\}$ donc ces sous-espaces ne sont pas supplémentaires.
4. L'ensemble des matrices à diagonale nulle est un supplémentaire de D_n , de base $(E_{i,j})_{i \neq j}$. Il a pour dimension $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) - \dim(D_n) = n^2 - n$.

9 (**) Soient F, G, H trois sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $F \cap G \cap H \neq \{0\}$. Est-ce encore vrai avec quatre sous-espaces de dimension 3 ?

RÉPONSE : Utilisons la formule de Grassman :

$$\dim(F \cap G \cap H) = \dim(F) + \dim(G \cap H) - \dim(F + (G \cap H)) \geq \dim(F) + \dim(G \cap H) - \dim(E) = \dim(G \cap H) - 1$$

et de même :

$$\dim(G \cap H) = \dim(G) + \dim(H) - \dim(G + H) \geq \dim(G) + \dim(H) - \dim(E) = 3 + 3 - 4 = 2$$

donc $\dim(F \cap G \cap H) \geq 2 - 1 = 1$, ie $F \cap G \cap H \neq \{0\}$

On peut trouver un contre-exemple avec 4 sous-espaces. Posons par exemple $F_1 = \{ (0, y, z, t) \mid (y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \}$, $F_2 = \{ (x, 0, z, t) \mid (x, z, t) \in \mathbb{R}^3 \}$, $F_3 = \{ (x, y, 0, t) \mid (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \}$ et $F_4 = \{ (x, y, z, 0) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}$. Ces sous-espaces ont pour dimension 3 mais

$$F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 = \{(0, 0, 0, 0)\}$$

10 (**) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $e_1 = (\alpha, \alpha, 1)$, $e_2 = (\alpha, 1, \alpha)$ et $e_3 = (1, \alpha, \alpha)$ forment une famille libre. Préciser le rang de la famille selon la valeur de α .

RÉPONSE : Formons la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$ de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique, et

déterminons son rang. Nous appliquons des opérations élémentaires :

$$A \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2\alpha + 1 & \alpha & 1 \\ 2\alpha + 1 & 1 & \alpha \\ 2\alpha + 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 2\alpha + 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 - \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc la discussion suivante :

- * Si $\alpha = 1$: $\text{rg}(e_1, e_2, e_3) = 1$, la famille (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre
- * Si $\alpha = -1/2$: $\text{rg}(e_1, e_2, e_3) = 2$, la famille (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre
- * Sinon, $\text{rg}(e_1, e_2, e_3) = 3$, la famille (e_1, e_2, e_3) est libre

11 (**) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . On dit que u est nilpotent s'il existe un entier $k > 0$ tel que $u^k = 0$. Le plus petit entier k tel que $u^k = 0$ est alors appelé l'indice de nilpotence de u .

1. Montrer que si $\forall x \in E \exists k > 0 \quad u^k(x) = 0$, alors u est nilpotent. Trouver un contre-exemple en dimension infinie.
2. On suppose u nilpotent d'indice p . Soit $x \in E \setminus \text{Ker}(u^{p-1})$. Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p \leq n$
3. Donner un exemple d'endomorphisme nilpotent d'indice n dans un espace de dimension n .

RÉPONSE :

1. Supposons $\forall x \in E \exists k > 0 \quad u^k(x) = 0$ (attention k dépend de x a priori!). Nous allons montrer qu'on peut choisir k indépendant de x . Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Par hypothèse il existe des entiers naturels $k_1, \dots, k_n$ tels que

$$u^{k_1}(e_1) = u^{k_2}(e_2) = \dots = u^{k_n}(e_n) = 0$$

Posons alors $k = \max(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Nous avons ainsi

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u^k(e_j) = 0$$

Or $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , donc

$$\forall x \in E \quad u^k(x) = 0$$

autrement dit u est nilpotent.

Voici un contre-exemple en dimension infinie : on prend $E = \mathbb{R}[X]$ et $u(P) = P'$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $u^{\deg(P)+1}(P) = 0$. Cependant u n'est pas nilpotent puisque $\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(X^k) \neq 0$

2. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j u^j(x) = 0 \quad (*)$$

Appliquons u^{p-1} à cette relation, nous obtenons

$$\sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j u^{j+p-1}(x) = 0$$

Or $u^p = 0$ donc il reste $\lambda_0 u^{p-1}(x) = 0$. Or $u^{p-1}(x) \neq 0$ ($x \notin \text{Ker}(u^{p-1})$ par hypothèse) donc $\lambda_0 = 0$.

En appliquant u^{p-2} à $(*)$ on obtient ensuite $\lambda_1 = 0$. De proche en proche on arrive à $\lambda_0 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$. Donc la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. Le nombre de vecteurs de cette famille (p) est donc inférieur ou égal à $\dim(E)$, ie $p \leq n$.

3. La fonction $u : P \mapsto P'$ sur $R_{n-1}[X]$ est nilpotente d'indice n .

12 $(\star\star)$ On note respectivement S_n et A_n les ensembles des matrices symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{K})$ sont notées $E_{i,j}$

1. Montrer que $(E_{i,j} + E_{j,i})_{i \leq j}$ est une base de S_n . Quelle est la dimension de S_n ?
2. Montrer que $(E_{i,j} - E_{j,i})_{i < j}$ est une base de A_n . Quelle est la dimension de A_n ?
3. Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Vérifier que les projecteurs correspondants sont $p : A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^T)$ et $q : A \mapsto \frac{1}{2}(A - A^T)$

13 $(\star\star\star)$ Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe $u \in L(E)$ tel que $u^2 = -\text{Id}_E$.
 - (a) Soit $x \in E \setminus \{0\}$, montrer que la famille $(x, u(x))$ est libre.
 - (b) Plus généralement soient $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs tels que la famille $(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_{p-1}))$ est libre. Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_{p-1}), f(e_p))$ est libre.
 - (c) En déduire que n est pair.
2. Montrer réciproquement que, si n est pair, alors il existe $u \in L(E)$ tel que $u^2 = -\text{Id}_E$

14 (★★) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

1. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan.
2. Montrer qu'un sous-espace H est un hyperplan si et seulement si il existe une droite D telle que $H \oplus D = E$
3. Soit H un hyperplan de E . Montrer qu'il existe $\varphi \in L(E, \mathbb{R})$ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$.
4. Soient $\varphi, \psi \in L(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires non nulles telles que $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$