$\boxed{1}$ ($\star$) On lance deux dés simultanément.

1. Décrire de façon ensembliste les événements suivants A :« On obtient deux fois le même résultat »et B :« La somme des deux chiffres est égale à 4 »
2. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$. A et B sont-ils indépendants ?

RÉPONSE : L'univers choisi est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme.

1. $A = \{ \ (i, i) \quad / \quad i \in [\![1, 6]\!] \ \}$, $B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$
2. $\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$,
   $\mathbb{P}(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
   $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{(2, 2)\}) = \frac{1}{36}$
   $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{9}$
   Par ailleurs $\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}(A \cap B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$\boxed{2}$ ($\star$) Un coffre contient 10 diamants, 15 émeraudes et 20 rubis. On tire quatre pierres au hasard dans le coffre. Calculer les probabilités des événements suivants :

1. A=« Les quatre pierres sont du même type »
2. B=« On tire deux diamants et deux rubis »
3. C= « On tire autant de diamants que de rubis »

RÉPONSE : L'expérience est un tirage simultané de 4 éléments d'un ensemble à 45 éléments. Soit Ω l'ensemble des tirages possibles (ie des parties à 4 éléments du coffre), muni de la probabilité uniforme.

1. Notons A_d :« tirer 4 diamants »et de même A_e et A_r. Ces trois événements sont deux à deux incompatibles et $A = A_d \cup A_r \cup A_e$ donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_d) + \mathbb{P}(A_e) + \mathbb{P}(A_r) = \frac{card(A_d) + card(A_e) + card(A_r)}{card(\Omega)} = \frac{\binom{10}{4} + \binom{15}{4} + \binom{20}{4}}{\binom{45}{4}}$$

2. $\mathbb{P}(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{\binom{10}{2}\binom{20}{2}}{\binom{45}{4}}$
3. $C = B \cup D$ où on a posé D :« tirer 1 diamant, 1 rubis et 2 émeraudes ». Or B et D sont incompatibles donc

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D) = \frac{\binom{10}{2}\binom{20}{2}}{\binom{45}{4}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{20}{1}\binom{15}{2}}{\binom{45}{4}}$$

$\boxed{3}$ ($\star$) Une urne contient n boules blanches et une boule noire ($n \geqslant 2$). On effectue l'expérience suivante :
-on lance d'abord un dé non truqué
- si le dé donne un 5 ou un 6, on pioche simultanément 3 boules dans l'urne.
- sinon on pioche 1 boule dans l'urne.

1. Déterminer en fonction de n la probabilité de tirer la boule noire
2. On apprend que la boule noire a été tirée. Quelle est alors la probabilité d'avoir fait 6 avec le dé ?

RÉPONSE : Soit A : « obtenir 5 ou 6 avec le dé »et N :« tirer la boule noire »

1. Nous appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A, \overline{A})$:

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(N|A) + \mathbb{P}(\overline{A}).\,\mathbb{P}(N|\overline{A}) = \frac{2}{6}.\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{3}} + \frac{4}{6}.\frac{1}{n+1} = \frac{5}{3(n+1)}$$

2. Soit E :« le dé tombe sur 6 ». Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(E|N)$. Nous appliquons la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(E|N) = \frac{\mathbb{P}(N|E)\,\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{\frac{3}{n+1}\frac{1}{6}}{\frac{5}{3(n+1)}} = \frac{3}{10}$$

4 ($\star$) On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir les quatre as ?
2. Un joueur dévoile deux cartes de son jeu qui sont des as. Quelle est maintenant la probabilité qu'il détienne quatre as ?

RÉPONSE : Soit Ω l'ensemble de tous les tirages possibles ; ses éléments sont les 5-combinaisons du jeu de cartes. On munit Ω de la probabilité uniforme.

1. Soit A :« obtenir 4 as ». $\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}} = \frac{1}{7192}$
2. Soit B :« obtenir au moins deux as ». Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(A|B)$. Par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Or $A \cap B = A$. Il ne reste plus qu'à calculer $\mathbb{P}(B)$. Écrivons par exemple

$$B = B_2 \cup B_3 \cup B_4$$

où B_k :« obtenir exactement k as ». Les evenements B_2, B_3, B_4 sont deux à deux incompatibles, et pour tout $k \leq 4$:

$$card(B_k) = \binom{4}{k}\binom{28}{5-k}$$

donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{3} + \binom{4}{3}\binom{28}{2} + \binom{4}{4}\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}} = \frac{730}{7192}$$

Finalement

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{730}$$

5 ($\star$) On lance deux dés ordinaires non truqués, on note $A =$« le premier dé donne un nombre pair », $B =$« le deuxième dé donne un nombre impair »et $C =$« les deux nombres obtenus ont la même parité ».
Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

RÉPONSE : L'univers est $[\![1,6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme. Nous calculons :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3\times 6}{6^2} = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{card(A \cap C)}{card(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{card(B \cap C)}{card(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

Nous voyons que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$ donc A et B sont indépendants. De même, B, C (resp. A, C) sont indépendants. En revanche $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$ donc A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.

6 ($\star$) Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et A, B, C des evénements. Démontrer les formules :

1. $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)$
2. $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

RÉPONSE :

7 ($\star\star$) Dans une urne se trouvent 15 boules vertes et 10 boules blanches. On tire successivement sans remise 5 boules dans l'urne. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient 5 boules vertes
2. On obtient une première boule verte, les deux suivantes blanches, les deux dernières vertes
3. On obtient au plus une boule blanche
4. On obtient en tout trois boules vertes et deux blanches.

RÉPONSE : Soit Ω l'ensemble des 5-arrangements de l'urne, muni de la probabilité uniforme. On note A, B, C, D les événements proposés

1. $\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{15\times14\times13\times12\times11}{25\times24\times23\times22\times21} = \frac{13}{230}$
2. $\mathbb{P}(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{15\times10\times9\times14\times13}{25\times24\times23\times22\times21}$
3. $C = C_0 \cup C_1$ où on note C_k :« obtenir exactement k boules blanches ». $C_0 \cap C_1 = \varnothing$ donc
$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C_0) + \mathbb{P}(C_1) = \frac{card(C_0) + card(C_1)}{card(\Omega)} = \frac{(15\times14\times\cdots\times11) + 5\times(10)\times(15\times14\times13\times12)}{card(\Omega)}$$
4. $\mathbb{P}(D) = \frac{\binom{5}{2}\times(15\times14\times13)\times(10\times9)}{card(\Omega)}$

$\boxed{8}$ ($\star\star$) On répartit au hasard 4 jetons sur un damier de 4×4 cases. Calculer les probabilités des événements suivants :

1. A=« Il y a exactement un jeton par ligne et par colonne »
2. B=« Il y a au moins une colonne sans jeton »
3. C=« Il y a exactement une colonne sans jeton »

RÉPONSE :

$\boxed{9}$ ($\star\star$) Dans une classe de 37 élèves, quelle est la probabilité que 2 élèves aient la même date d'anniversaire ? (Pour simplifier on supposera que personne n'est né un 29 février !)

RÉPONSE : Attibuer une date d'anniversaire à chaque élève revient à constituer un 37-uplet de $[\![1, 365]\!]$. On pose donc $\Omega = [\![1, 365]\!]^{37}$ muni de la probabilité uniforme.
Notons A :« deux élèves au moins ont la même date d'anniversaire ». L'événement $\overline{A}$ est alors l'ensemble des 37-arrangements de $[\![1, 365]\!]$:
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{card(\overline{A})}{card(\Omega)} = \frac{365\times364\times\cdots\times(365-37+1)}{365^{37}}$$
puis
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \approx 0,84$$

$\boxed{10}$ ($\star\star$) Un tournoi de tennis international accueille 64 joueurs dont 8 français. Le tirage au sort remplit le tableau de façon aléatoire.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins deux français se rencontrent dès le premier tour ?
2. Quelle est la probabilité que les français ne se rencontrent pas avant les quarts de finale ?

RÉPONSE : La principale difficulté de l'exercice est le choix d'un modèle. On ne s'int{eresse ici qu'aux joueurs français. On peut donc modéliser un tirage au sort ainsi : Chaque joueur francçais (appelons-les $1, 2, \cdots, 8$) se voit attribuer un numéro entre 1 et 64, de sorte que les matchs du premier tour sont : 1 contre 2, 3 contre 4, etc.
L'univers Ω est donc l'ensemble des 8-arrangements de $[\![1, 64]\!]$, muni de la probabilité uniforme. Au passage $card(\Omega) = 64\times63\times\cdots\times57$.

1. Soit A :« au moins deux français se rencontrent dès le premier tour ». Dénombrons l'événement contraire $\overline{A}$:« les joueurs français ne se rencontrent pas au 1er tous ».
Pour obtenir un tirage favorable à $\overline{A}$, on choisit 8 matchs ($\binom{32}{8}$ possibilités), pour chacun de ces matchs un des deux numéros correspondants (2^8 choix possibles), on attribut enfin un joueur français à chacun de ces numéros (8! possiblilité). Donc
$$card(\overline{A}) = \binom{32}{8}\times2^8\times8!$$
donc
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{card(\overline{A})}{card(\Omega)} \approx 0,3916$$

2. Soit B :« Les français ne peuvent pas se rencontrer avant les quarts de finale ». B se réalise lorsque les 8 groupes de numéros $G_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $G_2 = \{9,\cdots,16\}$ ... $G_8 = \{57,\cdots,64\}$ correspondent chacun à un et un seul joueur français. Pour obtenir un tirage favorable à B : on choisit un des numéros de G_1 (8 possibilités) on l'attribut à un français (8 possibilités), puis on fait de même avec G_2 (8×7 possibilités) et ainsi de suite jusquà G_8 (8×1 possibilités). Donc
$$card(B) = 8^8 8!$$
et
$$\mathbb{P}(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} \approx 0,00379$$

$\boxed{11}$ ($\star\star$) On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard une urne puis on tire simultanément deux boules dans cette urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?

RÉPONSE : Notons R :« les deux boules tirées sont rouges », et A_k :« l'urne choisie est l'urne numéro k ». La famille $(A_1,\cdots,A_n)$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(R) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}.\frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)(n-k-1)}{n^2(n-1)}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j(j+1)}{n^2(n-1)} \text{ (changement d'indice } j=n-k)\\
&= \frac{1}{n^2(n-1)}\left(\sum_{j=0}^{n-1} j^2 + \sum_{j=0}^{n-1} j\right)\\
&= \frac{1}{n^2(n-1)}\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}\right)\\
&= \frac{n+1}{3n}\end{aligned}$$

$\boxed{12}$ ($\star\star$) Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi :
- la place est disponible au jour 0 (jour d'ouverture des réservations).
- Si la place est disponible au jour n, il y a une probabilité $\frac{4}{10}$ que quelqu'un la réserve au jour $n+1$.
- Si la place est réservée au jour n, elle reste réservée au jour $n+1$ avec une probabilité $\frac{9}{10}$.
Soit R_n = « la place est réservée au jour n »

1. Exprimer $\mathbb{P}(R_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(R_n)$
2. En déduire $\mathbb{P}(R_n)$ en fonction de n, et sa limite quand $n\to+\infty$.

RÉPONSE :

1. Nous utilisons le système complet d'événements $(R_n, \overline{R_n})$ et la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_{n+1}) &= \mathbb{P}(R_n)\,\mathbb{P}_{R_n}(R_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{R_n})\,\mathbb{P}_{\overline{R_n}}(R_{n+1})\\
&= \mathbb{P}(R_n)\frac{9}{10} + (1-\mathbb{P}(R_n))\frac{4}{10}\\
&= \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\mathbb{P}(R_n)\end{aligned}$$

2. la suite $(\mathbb{P}(R_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On trouve la formule explicite :
$$\mathbb{P}(R_n) = \frac{4}{5} + \frac{1}{2^n}(\mathbb{P}(R_0) - \frac{4}{5}) = \frac{4}{5}(1-\frac{1}{2^n})$$
On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(R_n) = \frac{4}{5}$

$\boxed{13}$ ($\star\star\star$) Une guêpe entre au temps $n=0$ dans le séjour d'un appartement composé de deux pièces (chambre et séjour). Elle se déplace alors selon le schéma suivant :

* Si elle est dans le séjour à l'instant n : elle y reste avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe dans la chambre avec une probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $n+1$
* Si elle est dans la chambre à l'instant n : elle retourne dans le séjour avec probabilité $\frac{1}{4}$, reste dans la chambre avec une probabilité $\frac{1}{2}$, ou sort de l'appartement avec une probabilité $\frac{1}{4}$ à l'instant $n+1$
* Si elle est dehors, elle y reste.

On note A_n, B_n, C_n l'événement « la guêpe est dans le séjour (resp. la chambre) (resp. à l'extérieur) à l'instant n ».
On pose $X_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

1. Calculer X_0, X_1, X_2.
2. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ X_{n+1} = MX_n$
3. Pour $i \in \{1,2,3\}$ on pose $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{5}{6}$ et $\lambda_3 = 1$. Déterminer $Y_i \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MY_i = \lambda_i Y_i$
4. Soit $P = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que P est inversible. Calculer P^{-1} et $P^{-1}MP$
5. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis l'expression de X_n en fonction de n.
6. Que vaut $\lim X_n$? Interpréter.

RÉPONSE :

1. Au temps 0, la guêpe se trouve dans le séjour : A_0 est certain, B_0 et C_0 sont impossibles. Donc $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Au temps 1 : d'après l'énoncé (1er cas du schéma de déplacement de la guêpe), $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

   Au temps 2 : pour calculer $\mathbb{P}(A_2)$, nous utilisons la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements (A_1, B_1, C_1) (un et un seul des événements A_1, B_1 et C_1 se réalise) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2) + \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(A_2) + \mathbb{P}(C_1 \cap A_2) \\ &= \frac{1}{3}.\frac{1}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{4} + 0 \\ &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$

   De même on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(B_2) + \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(C_1 \cap B_2) \\ &= \frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_2) &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(C_2) + \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(C_2) + \mathbb{P}(C_1 \cap C_2) \\ &= \frac{1}{3}.0 + \frac{2}{3}.\frac{1}{4} + 0 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

   donc $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Le triplet (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements donc (formule des probabilités totales)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\,\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\,\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{3}\,\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(B_n) + 0.\,\mathbb{P}(C_n) \end{aligned}$$

on procède de même avec B_{n+1} et C_{n+1}, d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(B_n) + 0.\mathbb{P}(C_n)\\
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) + 0.\mathbb{P}(C_n)\\
\mathbb{P}(C_{n+1}) &= 0.\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(B_n) + 1.\mathbb{P}(C_n)
\end{aligned}$$

autrement dit $X_{n+1} = MX_n$ où $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$

3. On pose $Y_i = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; il s'agit donc de trouver une solution non nulle du système :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b + 0.c = \lambda_i a \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b + 0.c = \lambda_i b \\ 0.a + \frac{1}{4}b + 1.c = \lambda_i c \end{cases}$$

Après calcul, on voit que ces trois systèmes ont tous des solutions non nuls ; on peut par exemple prendre pour la suite :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Après calcul (laissé en exercice) on trouve $P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice notée N par la suite)

5. $M^n = (PNP^{-1})^n = PN^nP^{-1}$. Or N est une matrice diagonale, donc pour tout $n \geq 1$:

$$M^n = P\begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{5}{6}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4(5/6)^n & 3(5/6)^n & 0 \\ 8(5/6)^n & 6(5/6)^n & 0 \\ 10 - 12(5/6)^n & 10 - 9(5/6)^n & 10 \end{pmatrix}$$

(attention pour $n = 0$, $M^0 = I_3$) puis

$$\forall n \geq 1 \quad X_n = M^n X_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2.(5/6)^n \\ 4.(5/6)^n \\ 5 - 6.(5/6)^n \end{pmatrix}$$

6. $\lim X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: au bout d'un certain temps, la guêpe sort de l'appartement avec une très forte probabilité. On trouve par exemple :

$$\mathbb{P}(C_n) \geqslant 0,99 \Leftrightarrow n \geqslant 27$$

14 ($\star\star\star$) Une boîte contient n boules de couleurs différentes ($n \geq 2$. On effectue avec remise deux prélèvements chacun compremant au moins une boule, mais pas la totalité des boules.
Calculer la probabilité α_n de l'événement A_n = « les échantillons n'ont aucune couleur commune ». Donner un équivalent de α_n quand $n \to +\infty$

RÉPONSE :

15 ($\star\star\star$) On dispose de n boules vertes et n boules rouges numérotées que l'on dispose au hasard 2 par 2 dans n emplacements numérotés.
Calculer la probabilité α_n de l'événement A_n = « chaque emplacement est occupé par une boule verte et une boule rouge »

RÉPONSE :