

1 (★) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une base de trois vecteurs $B = (i, j, k)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(i) = i + 2j$, $f(j) = i + j - 3k$ et $f(k) = j + k$.

1. Donner l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in E$, en fonction des coordonnées de x dans B
2. Dans cette question on suppose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $B = (1, 2X + 1, X^2 - 1)$. Montrer que B est bien une base de E et calculer $f(1 + X + X^2)$

RÉPONSE :

1. Notons α, β, γ les coordonnées de x dans $B : x = \alpha i + \beta j + \gamma k$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha i + \beta j + \gamma k) = \alpha f(i) + \beta f(j) + \gamma f(k) \\ &= \alpha(i + 2j) + \beta(i + j - 3k) + \gamma(j + k) \\ &= (\alpha + \beta)i + (2\alpha + \beta + \gamma)j + (-3\beta + \gamma)k \end{aligned}$$

2. La famille $B = (i, j, k)$ est échelonnée en degrés, donc est libre. De plus on a les relations :

$$X = \frac{1}{2}(2X + 1) - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j \text{ et } X^2 = (X^2 - 1) + 1 = i + k$$

donc $1, X$ et X^2 appartiennent à $\text{vect}(B)$, donc

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X, X^2) \subset \text{vect}(B)$$

donc B est génératrice.

Nous avons

$$1 + X + X^2 = i + \frac{1}{2}(j - i) + (i + k) = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}j + k$$

donc (Q1)

$$\begin{aligned} f(1 + X + X^2) &= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)i + \left(2\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1\right)j + \left(-3\frac{1}{2} + 1\right)k = 2i + \frac{9}{2}j - \frac{1}{2}k \\ &= 2 + \frac{9}{2}(2X + 1) - \frac{1}{2}(X^2 - 1) \\ &= 7 + 9X - \frac{1}{2}X^2 \end{aligned}$$

2 (★) Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'application $f : E \rightarrow F$ est linéaire :

- | | |
|--|---|
| 1. $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}^4, f : x \mapsto (x, 2x, 3x, 4x)$ | 6. $E = F = \mathbb{R}^2, f : (x, y) \mapsto (xy, x - y)$ |
| 2. $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}^3, f : x \mapsto (x, x^2, x^3)$ | 7. $E = F = \mathbb{R}[X], f : P \mapsto P(X + 1) - (X^2 - 1)P'$ |
| 3. $E = F = \mathbb{R}^2, f : (x, y) \mapsto (-1, x + 2y)$ | 8. $E = F = \mathbb{R}[X], f : P \mapsto P^2$ |
| 4. $E = F = \mathbb{R}^2, f : (x, y) \mapsto (y - 2x, x + y)$ | 9. $E = \mathbb{R}[X], F = \mathbb{R}, f : P \mapsto P(0) + P(1)$ |
| 5. $E = F = \mathbb{R}^2, f : (x, y) \mapsto (x + 3y, 2x + 6y)$ | |

RÉPONSE :

1. $f : x \mapsto (x, 2x, 3x, 4x)$ est linéaire
2. $f : x \mapsto (x, x^2, x^3) : f(2) \neq 2.f(1)$ donc f n'est pas linéaire
3. $f : (x, y) \mapsto (-1, x + 2y) : f(0, 0) \neq (0, 0)$ donc f n'est pas linéaire
4. $f : (x, y) \mapsto (y - 2x, x + y)$ est linéaire
5. $f : (x, y) \mapsto (x + 3y, 2x + 6y)$ est linéaire
6. $f : (x, y) \mapsto (xy, x - y) : f(2.(1, 1)) \neq 2.f(1, 1)$, f n'est pas linéaire.
7. $f : P \mapsto P(X + 1) - (X^2 - 1)P'$ est linéaire
8. $f : P \mapsto P^2 : f(2X) \neq 2f(X)$ donc f n'est pas linéaire
9. $f : P \mapsto P(0) + P(1)$ est linéaire

3 (★) Montrer que $f : C^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R})$ définie par $f : u \mapsto v$ avec $v : x \mapsto (x+2)u'(x) - u(x)$ est linéaire. Quel est son noyau ? son image ?

RÉPONSE : - pour u_1, u_2 de classe C^1 et $\lambda \in \mathbb{R}$, et $x \in [0, 1]$,

$$f(\lambda u_1 + u_2)(x) = (x+2)(\lambda u_1 + u_2)'(x) - (\lambda u_1 + u_2)(x) = \lambda((x+2)u_1'(x) - u_1(x)) + ((x+2)u_2'(x) - u_2(x)) = \lambda f(u_1)(x) + f(u_2)(x)$$

donc $f(\lambda u_1 + u_2) = \lambda f(u_1) + f(u_2)$: f est linéaire.

- Soit $u \in C^1([0, 1])$. u appartient au noyau de f ssi $f(u) = 0$, ie

$$\forall x \in [0, 1] \quad (x+2)u'(x) - u(x) = 0$$

Or les solutions de cette équation différentielle (linéaire, homogène du premier ordre) sont les fonctions $x \mapsto \lambda(x+2)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Donc

$$\text{Ker}(f) = \{ x \mapsto \lambda(x+2) \quad / \quad \lambda \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}(x \mapsto x+2)$$

- Pour toute fonction $v \in C^0([0, 1])$, l'équation différentielle $(x+2)u' - u = v$ a une solution (théorème de Cauchy-Lipschitz) donc f est surjective : $\text{Im}(f) = C^0([0, 1])$

4 (★) Montrer que $f : C^2([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R})$ définie par $f : u \mapsto u'' + 4u$ est linéaire. Quel est son noyau ? son image ?

RÉPONSE : -linéarité : voir exo précédent

-noyau : c'est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $u'' + 4u = 0$, autrement dit

$$\text{Ker}(f) = \{ x \mapsto C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) \quad / \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \} = \text{vect}(x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x))$$

-image : d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, f est surjective : $\text{Im}(f) = C^0([0, 1])$.

5 (★) Démontrer que la fonction f est linéaire, donner une base de son noyau, de son image, préciser si f est injective ou surjective. Le cas échéant on donnera l'expression de f^{-1} :

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f : (x, y, z) \mapsto x - y + z$
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f : (x, y) \mapsto (x, x + y, 2y)$
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto (x - y, x + 2y)$
4. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f : (x, y, z) \mapsto (x + y - z, 3x + 4z, 5x + 2y + 2z)$
5. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f : (x, y, z) \mapsto (2x, x - z, x + y + z)$
6. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f : z \mapsto (1 + 2i)\bar{z}$

RÉPONSE :

1. $f : (x, y, z) \mapsto x - y + z$:
-noyau soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 0 \Leftrightarrow x = y - z$$

donc

$$\text{ker}(f) = \{ (y - z, y, z) \quad / \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2 \} = \text{vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

La famille $((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est clairement libre et engendre $\text{ker}(f)$, donc est une base de $\text{ker}(f)$. En passant $\text{ker}(f) \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective.

-image : Il est clair que $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$. De plus $1 = f(1, 0, 0)$ donc $1 \in \text{Im}(f)$ donc $\mathbb{R} = \text{vect}(1) \subset \text{Im}(f)$. Donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ et f est surjective

2. $f : (x, y) \mapsto (x, x + y, 2y)$:
-noyau : il s'agit de déterminer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (0, 0, 0)$, ie $x = x + y = 2y = 0$, ie $(x, y) = (0, 0)$.
Donc $\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$ et f est injective.
-image : $\mathbb{R}^2 = \text{vect}((1, 0), (0, 1))$ donc

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1, 0), f(0, 1)) = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 2))$$

La famille $((1, 1, 0), (0, 1, 2))$ est une base de $\text{Im}(f)$. De plus $(1, 0, 0)$ n'est pas combinaison linéaire de ces deux vecteurs (exercice) donc f n'est pas surjective. (on montrera bientôt qu'une base de $\mathbb{R}^n$ doit contenir n vecteurs)

3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto (x - y, x + 2y)$. Montrons que f est bijective. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il suffit de montrer que l'équation $f(x, y) = (a, b)$ a une unique solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Or

$$f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ x + 2y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2a+b}{3} \\ y = \frac{b-a}{3} \end{cases}$$

donc f est bijective, et $f^{-1} : (a, b) \mapsto (\frac{2a+b}{3}, \frac{b-a}{3})$. En particulier $\text{Ker}(f) = \{0\}$ (base vide) et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ (base canonique).

4. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f : (x, y, z) \mapsto (x + y - z, 3x + 4z, 5x + 2y + 2z)$: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on trouve

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3}z \\ y = \frac{7}{3}z \end{cases}$$

dont on déduit $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((-4, 7, 3))$: f n'est pas injective.

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) = \text{Vect}(e_1 = (1, 3, 5), e_2 = (1, 0, 2), e_3 = (-1, 4, 2))$$

Or $4e_1 - 3e_3 = 7e_2$, donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_1, e_3)$. La famille (e_1, e_3) est libre, c'est une base de $\text{Im}(f)$. On vérifie que $(1, 0, 0) \notin \text{Im}(f)$ donc f n'est pas surjective.

5. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f : (x, y, z) \mapsto (2x, x - z, x + y + z)$ est bijective, et

$$f^{-1} : (a, b, c) \mapsto (\frac{a}{2}, c - a + b, \frac{a}{2} - b)$$

6. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f : z \mapsto (1 + 2i)\bar{z}$: f est linéaire, à condition de considérer $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Pour tous $(z, u) \in \mathbb{C}^2$,

$$f(z) = u \Leftrightarrow (1 + 2i)\bar{z} = u \Leftrightarrow z = \frac{\bar{u}}{1 - 2i}$$

donc f est bijective et $f^{-1} : u \mapsto \frac{\bar{u}}{1 - 2i}$. $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{C}$.

6 (★) Soient f, g des endomorphismes de E

1. Montrer que $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$
3. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$
4. (★★) Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } (f^2) \Leftrightarrow \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$.

RÉPONSE :

1. Supposons $g \circ f = 0$, soit $x \in \text{Im}(f)$. Il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$. Donc $g(x) = g \circ f(t) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}(g)$. Donc $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
Réciproquement, supposons $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$, et soit $x \in E$. $f(x) \in \text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$, donc $f(x) \in \text{Ker}(g)$, donc $g(f(x)) = 0$. Donc $g \circ f = 0$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \text{Ker}(f^k)$. Donc $f^k(x) = 0$. Donc $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}(f^{k+1})$. Donc $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \text{Im}(f^{k+1})$. Donc $x = f^{k+1}(t)$ avec $t \in E$. Donc $x = f^k(f(t)) \in \text{Im}(f^k)$. Donc $x \in \text{Im}(f^k)$. Donc $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$.
4. Supposons $\text{Ker } f = \text{Ker } (f^2)$, et soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. $x \in \text{Im}(f)$ donc $x = f(t)$ avec $t \in E$. Or $x \in \text{Ker}(f)$, donc $f(x) = 0$. Donc $f(f(t)) = 0$, donc $t \in \text{Ker}(f^2)$. Or $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$, donc $t \in \text{Ker } f$. Donc $x = f(t) = 0$. Donc $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$.
Réciproquement supposons $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$. On a vu que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } (f^2)$, il s'agit donc de montrer que $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker } (f)$. Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$: $f^2(x) = 0$. Donc $f(x) \in \text{Ker}(f)$. Or $f(x) \in \text{Im}(f)$ et $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$, donc $f(x) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}(f)$. Donc $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker } (f)$.

7 (★★) Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $u(f) = f'$ et $v(f)$ la primitive de f qui s'annule en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad v(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1. Montrer que u et v sont deux endomorphismes de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Expliciter $u \circ v(f)$ et $v \circ u(f)$ pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Préciser le noyau et l'image de u et de v . Ces endomorphismes sont-ils injectifs ? Surjectifs ? Bijectifs ?

RÉPONSE :

1. Soient $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - $u(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda u(f) + u(g)$ donc u est linéaire $u(f) = f'$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc u est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 - pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$v(\lambda f + g)(x) = \int_0^x (\lambda f(t) + g(t))dt = \lambda \int_0^x f(t)dt + \int_0^x g(t)dt = \lambda v(f)(x) + v(g)(x)$$

donc $v(\lambda f + g) = \lambda v(f) + v(g)$: v est linéaire. De plus $v(f)$ est une primitive de f , donc est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc v est un endomorphisme.

- $v(f)$ est une primitive de f donc $u \circ v(f) = (v(f))' = f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v \circ u(f)(x) = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$, donc $v \circ u(f) = f - f(0)$.

2. $f \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow f' = 0 \Leftrightarrow f$ est constante. $\text{Ker}(u)$ est l'ensemble des fonctions constantes ; u n'est pas injective. Toutefois toute fonction C^∞ possède une primitive, donc u est surjective.
 Si $v(f) = 0$ alors $f = v(f)' = 0$, donc $\text{Ker}(v) = \{0\}$, v est injective.
 Posons $F = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \}$, et montrons que $\text{Im}(v) = F$. D'abord pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $v(f)(0) = 0$, donc $v(f) \in F$. Donc $\text{Im}(v) \subset F$. Inversement soit $f \in F$. On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad v(f')(x) = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = f(x)$$

donc $v(f') = f$, donc $f \in \text{Im}(v)$. Finalement $\text{Im}(v) = F$.

La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ ne s'annule pas en 0, donc n'a pas d'antécédent par v : v n'est pas surjective.

8 (**) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soit $\varphi \in L(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire non nulle et soit $a \in E \setminus \{0\}$. Soit f l'application de E dans E (appelée transvection) définie par $f : x \mapsto x + \varphi(x)a$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E . Préciser $f(a)$
2. Pour $x \in E$ fixé, établir une relation entre x , $f(x)$ et $f^2(x)$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit bijective. La cas échéant, déterminer f^{-1} .

RÉPONSE :

1. $f(a) = (1 + \varphi(a))a$
2. D'une part, $f^2(x) = f(f(x)) = f(x + \varphi(x)a) = f(x) + \varphi(x)f(a) = f(x) + (1 + \varphi(a))\varphi(x)a$, d'autre part $\varphi(x)a = f(x) - x$, donc

$$f^2(x) = f(x) + (1 + \varphi(a))(f(x) - x) = (2 + \varphi(a))f(x) - (1 + \varphi(a))x$$

3. Notons $\alpha = 1 + \varphi(a)$ et $\beta = 2 + \varphi(a)$. On a donc $f^2 = \beta f - \alpha \text{Id}_E$, donc $f \circ (\beta \text{Id}_E - f) = \alpha \text{Id}_E$. D'où les cas suivants :
 -1er cas $\alpha \neq 0$, ie $\varphi(a) \neq -1$: alors f est bijective, avec

$$f^{-1} = \frac{1}{\alpha}(\beta \text{Id}_E - f) \text{ ie } f^{-1} : x \mapsto x - \frac{\varphi(x)}{1 + \varphi(a)}a$$

-2eme cas $\alpha = 0$, ie $\varphi(a) = -1$: Dans ce cas $f(a) = (1 + \varphi(a))a = 0$, donc $a \in \text{Ker}(f)$. Or $a \neq 0$, donc f n'est pas injective.

9 (**) Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension 3. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$f(e_1) = e_1 - 2e_2 - e_3, \quad f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3, \quad f(e_3) = 2e_1 - 3e_2 - 2e_3$$

1. Déterminer des bases de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$
2. On pose $u = f(e_1)$ et $v = f^2(e_1)$. Montrer que (e_1, u, v) est une base de E

3. Exprimer $f(e_1)$, $f(u)$ et $f(v)$ en fonction de e_1 , u et v

4. Montrer que $f^3 = 0$

10 (★★) On rappelle que la trace d'une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $\text{Tr}(A)$, est la somme de ses coefficients diagonaux : $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$

1. Montrer que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2. Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f : M \mapsto AM - MA$. Montrer que f est linéaire et que $\text{Tr} \circ f = 0$. En déduire que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\text{Tr})$. f est-elle surjective ? injective ?

11 (★★) Dans $\mathbb{R}^3$ on appelle (i, j, k) la base canonique et $a = (1, 2, 0)$. Soient $F = \text{Vect}(a)$ et $G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \}$

1. Trouver une base (b, c) de G . Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

2. Exprimer i, j et k en fonction de a, b, c

3. Soit p le projecteur sur G parallèlement à F . Préciser $p(a)$, $p(b)$ et $p(c)$ (sans calcul !)

4. En déduire $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

12 (★★★) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . On dit que u est nilpotent s'il existe un entier $k > 0$ tel que $u^k = 0$. Le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$ est alors appelé l'indice de nilpotence de u .

1. Quel est l'indice de nilpotence de l'endomorphisme nul ?

2. Vérifier que la dérivation sur $\mathbb{K}_n[X]$ est nilpotente, préciser son indice.

3. On suppose que E a une base $(e_1, \dots, e_n)$. On définit $u \in \mathcal{L}(E)$ par $u(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k < n$ et $u(e_n) = 0$. Montrer que u est nilpotente, préciser son indice.

4. Soit $(\lambda, k) \in \mathbb{K} \times \mathbb{N}^*$ et u nilpotent. Montrer que λu et u^k sont nilpotents.

5. Soient u et v nilpotents qui commutent, montrer que $u \circ v$ et $u + v$ sont nilpotents

6. Soit u nilpotent d'indice p .

(a) u est-elle bijective ? Montrer que $\text{Id} + u$ est bijective, préciser son inverse.

(b) Soit u nilpotent d'indice p . Justifier l'inclusion $\text{Im}(u^{p-1}) \subset \text{Ker}(u)$.

(c) Expliquer pourquoi $\text{Im}(u^{p-1})$ n'est pas nul. En déduire que u n'est pas injectif.

(d) Montrer de même, en exploitant l'inclusion $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u^{p-1})$, que u n'est pas surjectif.

13 (★★★) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Justifier que si $x \neq 0_E$, il existe un unique scalaire λ_x (qui dépend de x a priori) tel que $f(x) = \lambda_x x$.

2. Montrer que λ_x est indépendant de x , autrement dit que f est une homothétie.