1 ($\star$) Une cantine propose un choix de 3 entrées, 5 plats et 4 desserts.

1. Combien y a-t-il de menus possibles ?
2. Un des clients de la cantine ne prend pas d'entrée, et peut en contrepartie choisir deux desserts. Combien y a-t-il de menus possibles pour lui ?

RÉPONSE :

1. $3 \times 5 \times 4$
2. $5 \times 4 + 5 \times \binom{4}{2}$

2 ($\star$) Combien de mots de 10 lettres peut-on former :

1. en utilisant au plus une fois chacune des 26 lettres de l'alphabet ?
2. en utilisant uniquement les lettres A et B ?
3. en utilisant uniquement les lettres A, B et C ?

RÉPONSE :

1. $26 \times 25 \times \cdots \times 17$
2. 2^{10}
3. 3^{10}

3 ($\star$) Dans un jeu ordinaire de 32 cartes, on appelle main un ensemble de 5 cartes. Combien de mains peut-on former :

1. sans condition particulière
2. avec quatre as ?
3. avec cinq coeurs ?
4. avec cinq cartes de la même couleur ?
5. contenant exactement trois rois ?
6. contenant au moins un roi et un as ?

RÉPONSE :

1. $\binom{32}{5}$
2. $\binom{28}{1}$
3. $\binom{8}{5}$
4. $4 \times \binom{8}{5}$
5. $\binom{4}{3}\binom{28}{2}$
6. $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} - \binom{28}{5} + \binom{24}{5}$

4 ($\star$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il :

1. d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ divisibles par 4 ?
2. d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ divisibles par 4 et pas par 7 ?
3. d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $k \equiv 1\ [7]$?
4. de couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i + j = n$?

5. de couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i + j \leqslant n$?

6. de couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$?

RÉPONSE :

1. $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$

2. $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n}{28} \rfloor$

3. $1 + \lfloor \frac{n-1}{7} \rfloor$

4. $n + 1$

5. $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

6. $\frac{n(n-1)}{2}$

$\boxed{5}$ ($\star\star$) Soit E un ensemble de cardinal n et A une partie de E de cardinal p.

1. Compter les parties de E qui contiennent A

2. Compter les parties de E qui sont disjointes de A

3. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \subset Y$?

4. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \cap Y = \varnothing$?

RÉPONSE :

1. Une partie X de E contenant A s'écrit de manière unique sous la forme $X = Y \cup A$ où Y est une partie de $\overline{A}$. Il y a donc $2^{card(\overline{A})} = 2^{n-p}$ solutions

2. Une partie de E disjointe A est une partie de $\overline{A}$. Il y a donc $2^{card(\overline{A})} = 2^{n-p}$ solutions

3. Pour obtenir un tel couple (X, Y) : Pour chaque entier $p \in [\![0, n]\!]$ on choisit une partie X de cardinal p ($\binom{n}{p}$ choix possibles) puis on se donne Y contenant X (2^{n-p} possibilités). Le nombre total de couples (X, Y) qui conviennent est
$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{n-p} = (1+2)^n = 3^n$$

4. Même raisonnement et résultat que pour la question précédente

$\boxed{6}$ ($\star\star$) Dans un plan, on considère une famille de n droites telles que 2 droites ne sont jamais parallèles et 3 droites ne sont jamais concourantes.

1. Combien de triangles sont formés par ces droites ?

2. Combien de régions sont délimitées par ces droites ?

RÉPONSE :

1. Il y a autant de triangle sur la figure que d'ensembles $\{d_1, d_2, d_3\}$ formés par trois droites deux à deux distinctes (qui seront alors les côtés du triangle). Il y a donc $\binom{n}{3}$ triangles.

2. Appelons R_n le nombre de régions définies par n droites. Ainsi $R_1 = 2$, $R_2 = 4$. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et des droites $d_1, d_2, \cdots d_{n+1}$ nous pouvons calculer R_{n+1} ainsi :

   * Les droites $d_1, \cdots d_n$ forment R_n régions ;
   * La droite d_{n+1} rencontre les autres droites en n points distincts, et traverse donc $n + 1$ des régions précédentes : ces $n + 1$ régions sont donc chacune divisées en deux parties
   * Le nombre total de régions devient alors $R_{n+1} = R_n + n + 1$

On a donc $R_3 = R_2 + 3 = R_1 + 2 + 3$, $R_4 = R_3 + 4 = R_1 + 2 + 3 + 4$ et par récurrence immédiate :

$$R_n = R_1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

$\boxed{7}$ ($\star\star\star$) Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ on note S_n^p le nombre de n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \ldots + x_n = p$.

1. Calculer S_n^0, S_n^1, S_n^2, S_1^p, S_2^p.
2. Montrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $S_{n+1}^p = S_n^0 + S_n^1 + \cdots + S_n^p$
3. Montrer que $S_n^p = \binom{n+p-1}{p}$

RÉPONSE : Notons E_n^p l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \ldots + x_n = p$, de sorte que $S_n^p = card(E_n^p)$

1. E_n^0 se réduit à $(0, 0, \cdots, 0)$, donc $S_n^0 = 1$. $E_n^1 = \{(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1)\}$ donc $S_n^1 = n$.
   E_n^2 est constitué d'une part des n-uplets contenant une fois 2 et $n-1$ fois 0, d'autre part des n-uplets contenant deux fois 1 et $n-2$ fois 0. Donc $S_n^2 = n + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.
   $E_1^p = \{(p)\}$ donc $S_1^p = 1$, $E_2^p = \{(0,p), (1, p-1), \cdots (p, 0)\}$ donc $S_2^p = p + 1$
2. Soit $j \in \{0, 1, \cdots, p\}$ et A_j l'ensemble des $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in E_{n+1}^p$ tels que $x_{n+1} = j$. Les ensembles $A_0, A_1, \cdots A_p$ forment une partition de E_{n+1}^p donc

   $$S_{n+1}^p = \sum_{j=0}^{p} card(A_j)$$

   De plus pour tous entiers $x_1, \cdots, x_n$,

   $$(x_1, x_2, \cdots, x_n, j) \in A_j \Leftrightarrow x_1 + \cdots + x_n + j = p \Leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n) \in E_n^{p-j}$$

   donc $card(A_j) = card(E_n^{p-j}) = S_n^{p-j}$
3. Par récurrence sur n grâce à la question précédente, et en observant (on utilise la formule de Pascal)

   $$\sum_{j=0}^{p} \binom{n+j-1}{j} = \sum_{j=0}^{p} (\binom{n+j}{j} - \binom{n+j-1}{j-1}) = \binom{n+p}{p}$$

$\boxed{8}$ ($\star\star\star$) Soient $p, q, n \in \mathbb{N}$.

1. En comptant de deux façons les parties à n éléments d'un ensemble de cardinal $p+q$, montrer que $\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

RÉPONSE :

$\boxed{9}$ ($\star\star\star$) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
2. Combien y a-t-il d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

RÉPONSE : Soit une application f de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, que l'on identifie à une p liste $(x_1, \cdots x_p)$ de $[\![1, n]\!]$

1. f est strictement croissante ssi $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$. Construire f revient à se donner un sous-ensemble $\{x_1 \cdots, x_p\}$ de $[\![1, n]\!]$ à p éléments, il y en a donc $\binom{n}{p}$

2. f est croissante ssi $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p$. Posons $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 - x_1$,... $y_p = x_p - x_{p-1}$ et $y_{p+1} = n - x_p$, et observons que $y_1, y_2, \cdots, y_{p+1}$ sont des entiers naturels (éventuellement nuls) dont la somme est égale à $n-1$. Inversement, la donnée de $(y_1, \cdots, y_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1}$ tel que $y_1 + \cdots + y_{p+1} = n-1$ permet de retrouver f croissante en posant $x_1 = 1 + y_1$, $x_2 = 1 + y_1 + y_2$, etc..
   Nous pouvons donc utliser le résultat de l'exercice 7 : il y a $\binom{n+p-1}{p+1}$ solutions.

$\boxed{\textbf{10}}$ ($\star\star\star$) Une partition d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides, deux 'a deux disjointes, dont la réunion est égale à E. On note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments (nombre de Bell).

1. Donner la valeur de B_0, B_1 et B_2
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$
3. Calculer B_3, B_4 et B_5

RÉPONSE :

1. $\varnothing$ est la seule partition de $\varnothing$ donc $B_0 = 1$.
   La seule partition de l'ensemble $\{1\}$ est la famille réduite à $\{1\}$, donc $B_1 = 1$.
   Les partitions de $\{1, 2\}$ sont $\{\{1\}, \{2\}\}$ et $\{\{1, 2\}\}$, donc $B_2 = 2$
2. Pour obtenir une partition de $E = \{1, 2, \cdots, n, n+1\}$,
   * On choisit une partie A de E contenant $n+1$. En appelant $k+1$ le cardinal de A, on a $k \in \{0, \cdots n\}$ et il y a $\binom{n}{k}$ parties A possibles.
   * On complète alors A par une partition de $E \setminus A$. Il y a B_{n-k} telles partitions

   Par conséquent $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$
3. $B_3 = B_0 + 2B_1 + B_2 = 5$
   $B_4 = B_0 + 3B_1 + 3B_2 + B_3 = 15$
   $B_5 = B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 + B_4 = 52$