1 ($\star$) Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto (x^2-1)|x-1|$.

RÉPONSE : f est dérivable sur $\mathbb{R}$

2 ($\star$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a}$

RÉPONSE : $f(a) - af'(a)$

3 ($\star\star$) Soit I un intervalle et $k \geqslant 0$. Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite k-lipschitzienne sur I lorsque $\forall (x,y) \in I^2 \quad |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$. f est dite lipschitzienne sur I lorsqu'il existe k tel que f est k-lipschitzienne sur I

1. Que dire d'une fonction 0-lipschitzienne ?
2. Montrer qu'une fonction k-lipschitzienne est nécessairement continue sur I.
3. Montrer en considérant la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ que la réciproque est fausse.
4. Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes est encore une fonction lipschitzienne. Est-ce vrai pour un produit de fonctions lipschitziennes ?
5. On suppose f de classe C^1 sur I et $\forall x \in I \quad |f'(x)| \leqslant k$. Montrer que f est k-lipschitzienne.

RÉPONSE :

1. Une fonction 0-lip est constante
2.
3. $x \mapsto x^2$ n'est pas lip sur $\mathbb{R}$
4.
5. C'est l'inégalité des accroissements finis

4 ($\star\star$) Soit $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$.

1. Étudier f et résoudre l'équation $f(x) = x$. Représenter graphiquement f et la droite d'équation $y = x$
2. Étudier les variations de f'. En déduire que $\forall x \in [e,3] \quad 0 \leq f'(x) \leq k$, où $k = \frac{\ln 3 - 1}{(\ln 3)^2} \approx 0,0817$ à 10^{-4} près.
3. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [e,3]$
   (b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - e| \leq k|u_n - e|$
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - e| \leq k^n(3-e)$
   (d) Conclure sur la nature et la limite éventuelle de la suite (u_n)

RÉPONSE :

1.
2.
3. (a) Par récurrence, en observant que $f([e,3]) \subset [e,3]$
   (b) Accroissements finis entre e et u_n + Q2
   (c) Par récurrence à partir de Q3b
   (d) $|k| < 1$ donc $k^n \to 0$ donc (Q3c) $u_n \to e$

5 ($\star\star$) Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \cos u_n$

1. Montrer, en étudiant la fonction $g : x \mapsto \cos x - x$, que l'équation $\cos x = x$ a une unique solution $\ell \in [0,1]$
2. Montrer qu'il existe un réel $k \in]0,1[$ à préciser tel que $\forall (x,y) \in [0,1]^2 \quad |\cos x - \cos y| \leq k|x-y|$
3. Montrer que $\forall n \geqslant 2 \quad u_n \in [0,1]$

4. Montrer que $\forall n \geqslant 2 \quad |u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$
5. En déduire que $\forall n \geq 2 \quad |u_n - \ell| \leq k^{n-2}|u_2 - \ell|$
6. Conclure sur la nature et la limite éventuelle de la suite (u_n)

RÉPONSE :

1. théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g sur $[0, 1]$
2. $\forall x \in [0, 1] \quad |\cos'(x)| = |\sin x| \leq \sin 1$, on applique donc l'inégalité des accroissements finis à cos sur $[0, 1]$ avec $k = \sin 1$
3. $u_1 = \cos u_0 \in [-1, 1] \subset [-\pi/2, \pi/2]$, donc $u_2 = \cos u_1 \in [0, 1]$. Pour $n > 2$ on raisonne par récurrence.
4. Q2 avec $x = u_n$ et $y = \ell$
5. récurrence
6. $k^{n-2} \to 0$ donc (u_n) converge vers ℓ.

6 ($\star\star$) Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Montrer que la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$ converge et préciser sa limite.

RÉPONSE : f est dérivable en 0 donc il existe une fonction θ telle que $\lim_{x\to 0} \theta(x) = 0$ et $\forall x \quad f(x) = f(0) + xf'(0) + x\theta(x) = xf'(0) + x\theta(x)$. On remplace x par k/n^2 on on ajoute pour k allant de 1 à n :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) + v_n = \frac{n+1}{2n} f'(0) + v_n$$

où $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \theta(\frac{k}{n^2})$. On montre alors que $v_n \to 0$ en exploitant $\lim_{x\to 0} \theta(x)$.
Donc (u_n) converge vers $\frac{f'(0)}{2}$

7 ($\star\star$) Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe C^1.

RÉPONSE : Le taux d'accroissement de f en 0 a pour limite 0 donc $f'(0) = 0$. Cependant $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$

8 ($\star\star$) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(0) = \lim_{+\infty} f$. Montrer que f' s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$.

RÉPONSE : On peut se ramener au théorème de Rolle en montrant qu'il existe $\alpha < \beta$ tels que $f(\alpha) = f(\beta)$. Si f est non constante, elle va prendre des valeurs distinctes de $f(0)$, disons une valeur $M = f(x_0) > f(0)$; le théorème des valeurs intermédiaires assure que la valeur $\frac{M+f(0)}{2}$ est atteinte sur l'intervalle $[0, x_0]$ en un point α, et aussi sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$ en un point β (faire un dessin)

9 ($\star\star\star$) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

RÉPONSE : On démontre par récurrence : pour tout n, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et il existe un polynôme P_n tel que $\forall x > 0 \quad f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}$ et $\forall x \leq 0 \quad f^{(n)}(x) = 0$.
La continuité de $f^{(n)}$ en 0 se voit par croissance comparée puissance/exponentielle

10 ($\star\star\star$) Soit $f \in \mathcal{D}^2(]a, b[, \mathbb{R})$ continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et telle que f'' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que f ne s'annule pas sur $]a, b[$.

RÉPONSE : Par contraposition : si f s'annule en $c \in]a, b[$, alors $f(a) = f(c) = f(b)$. D'après Rolle f' va s'annuler en $u \in]a, c[$ et aussi en $v \in]c, b[$. Donc $f'(u) = f'(v)$. Appliquons encore Rolle mais cette fois à f' : f'' s'annule sur $]u, v[$, donc sur $]a, b[$.

11 ($\star\star\star$)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n fois dérivable et s'annulant (au moins) $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$, montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.
2. Applications : soit f une fonction polynômiale non nulle de degré $n \in \mathbb{N}$,
   (a) montrer que f s'annule au plus n fois sur $\mathbb{R}$
   (b) montrer que l'équation $e^x = f(x)$ a au plus $n+1$ solutions dans $\mathbb{R}$.

RÉPONSE :

1. On reprend l'idée de l'exercice précédent : si f s'annule $n+1$ fois, alors par Rolle f' s'annule n fois, f'' s'annule $n-1$ fois ,... et enfin $f^{(n)}$ va s'annuler 1 fois
2. Si f est un polynôme de degré n,
   (a) alors $f^{(n)}$ est une constante non nulle ; f ne peut donc pas s'annuler en $n+1$ points distincts.
   (b) posons $g(x) = e^x - f(x)$, cette fois $g^{(n+1)} = \exp$ ne s'annule pas donc g ne peut pas s'annuler en $n+2$ points distincts

12 $(\star\star\star)$ Soient $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose $g(a) \neq g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

RÉPONSE : On applique Rolle entre a et b à la fonction

$$h : x \mapsto (f(a)-f(b))(g(x)-g(b)) - (g(a)-g(b))(f(x)-f(b))$$

13 $(\star\star\star)$ Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi : t \mapsto f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - \alpha \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. Vérifier que l'on peut choisir α de sorte que $\varphi(a) = \varphi(b)$
2. Démontrer la formule de Taylor-Lagrange : il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

RÉPONSE :

1. On constate que $\varphi(b) = 0$ et $\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \alpha \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ d'où

$$\alpha = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right)$$

2. On applique Rolle à φ sur $[a,b]$: $\exists c \in]a,b[\quad \varphi'(c) = 0$. Or on calcule :

$$\varphi' : t \mapsto -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) \right) + \alpha \frac{(b-t)^n}{(n)!} = \frac{(b-t)^n}{n!} (\alpha - f^{(n+1)}(t))$$

Par suite de $\varphi'(c) = 0$ on déduit $\alpha = f^{(n+1)}(c)$: c'est bien la formule attendue