Devoir du 8 juin 2020

CORRECTION

Exercice 1

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$M = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(M)$ sous forme factorisée. À quelle condition la matrice M est-elle inversible ?

RÉPONSE :

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} a-b-c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & -b-a-c & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a-b-c & 1 & 1 \\ 2b & -1 & 0 \\ 2c & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & -1 & 0 \\ 2c & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \boxed{(a+b+c)^3}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est inversible si et seulement si } a+b+c \neq 0}$

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $A_n \in M_n(\mathbb{C})$ par $A_1 = (a+2)$, $A_2 = \begin{pmatrix} a+2 & a \\ 2 & a+2 \end{pmatrix}$ et

$$\forall n \geqslant 3 \quad A_n = \begin{pmatrix} a+2 & a & & (0) \\ 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & 2 & a+2 \end{pmatrix}.$$

On note $D_n = \det(A_n)$

1. Calculer D_1 et D_2

   RÉPONSE : $\boxed{D_1 = a+2}$ et $\boxed{D_2 = (a+2)^2 - 2a = a^2 + 2a + 4}$.

2. Établir une relation entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} pour tout $n \geqslant 3$.

   RÉPONSE : On développe par rapport à la première ligne pour obtenir $D_n = (a+2)D_{n-1} - a\Delta$ et on développe Δ par rapport à sa colonne 1 pour obtenir $\Delta = 2D_{n-2}$. On a ainsi :

   $$\boxed{D_n = (a+2)D_{n-1} - 2aD_{n-2}}$$

3. En déduire D_n en fonction de a, n. On fera attention au cas $a = 2$...

   RÉPONSE : il s'agit d'une récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

   $$r^2 - (a+2)r + 2a = (r-2)(r-a)$$

   * Si $a \neq 2$ alors il existe deux complexes λ, μ tels que $\forall n > 0 : D_n = \lambda a^n + \mu 2^n$. De plus

     $$D_1 = a + 2 = \lambda a + 2\mu, D_2 = a^2 + 2a + 4 = \lambda a^2 + 4\mu$$

     donc $\lambda = \frac{a}{a-2}$ et $\mu = \frac{2}{2-a}$. Ainsi :

     $$\boxed{\forall n > 0 : D_n = \frac{1}{a-2}\left(a^{n+1} - 2^{n+1}\right)}$$

   * Si $a = 2$ alors il existe deux complexes λ, μ tels que $\forall n > 0 : D_n = (\lambda + \mu n)2^n$. De plus

     $$D_1 = 4 = 2\lambda + 2\mu, D_2 = 12 = 4\lambda + 8\mu$$

     donc $\lambda = \mu = 1$ et $\boxed{\forall n > 0 : D_n = (n+1)2^n}$.

4. Dans cette quetion n est fixé. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ la matrice A_n n'est-elle pas inversible ?

   RÉPONSE : -Si $a = 2$ alors $\det(A_n) = D_n = (n+1)2^n \neq 0$ donc A_n est inversible.
   -Si $a \neq 2$: A_n n'est pas inversible si et seulement si $D_n = 0$, autrement dit $\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} = 1$:

   $$\boxed{A_n \text{ non inversible } \Leftrightarrow a \in \{2e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, 1 \leq k \leq n\}}$$

Exercice 3

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ et } T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

1. Rappeler la nature de la suite (S_n). À l'aide d'une comparaison somme-intégrale, calculer un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.

   RÉPONSE : La série de terme général $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est une série de Riemann divergente, donc la suite de ses sommes partielles $\boxed{(S_n) \text{ diverge}}$.
   La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. Nous obtenons :

   $$\forall n \geqslant 1 \quad \int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant S_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

   donc

   $$\forall n \geqslant 1 \quad 2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1$$

   Or $2\sqrt{n+1} - 2 \sim 2\sqrt{n} - 1 \sim 2\sqrt{n}$ quand $n \to +\infty$, donc $\boxed{S_n \sim 2\sqrt{n}}$.

2. Dans cette question on pose $a_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} + \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$.

   (a) Calculer un équivalent de a_n et montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

   RÉPONSE :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\sqrt{n}} + \sqrt{n} - \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}} + \sqrt{n} - \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) \\
&= \frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}) \\
&\sim \boxed{\frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}}}
\end{aligned}$$

   La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, donc $\boxed{\sum a_n \text{ converge}}$

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{S_n}{2} - \sqrt{n+1} + 1$

   RÉPONSE : Soit $n > 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2\sqrt{k}} + \sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\
&= \frac{1}{2} S_n + \sqrt{1} - \sqrt{n+1} \text{ (télescopage)} \\
&= \boxed{\frac{S_n}{2} - \sqrt{n+1} + 1}
\end{aligned}$$

   (c) En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $S_n = 2\sqrt{n} + \theta + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$

   RÉPONSE : Notons $\ell = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ (qui existe d'après Q2a). En partant de Q2b nous avons :

$$\begin{aligned}
S_n &= 2\left(\sqrt{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k - 1\right) \\
&= 2\left(\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \ell - 1 + o(1)\right) \\
&= 2\left(\sqrt{n}(1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})) + \ell - 1 + o(1)\right) \\
&= \boxed{2\sqrt{n} + 2(\ell - 1) + o(1)}
\end{aligned}$$

   Nous obtenons la formule attendue avec $\theta = 2(\ell - 1)$.

3. Montrer que les suites (T_{2n}) et (T_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$. On notera $\tau = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.

   RÉPONSE : Pour tout $n > 0$,

$$T_{2n+2} - T_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \geqslant 0$$
$$T_{2n+3} - T_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \leqslant 0$$

   donc la suite (T_{2n}) est croissante et la suite (T_{2n+1}) est décroissante. De plus

$$T_{2n+1} - T_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Donc $\boxed{\text{les suites } (T_{2n}) \text{ et } (T_{2n+1}) \text{ sont adjacentes}}$. Ces deux suites convergent donc vers la même limite, donc la suite (T_n) converge, donc $\boxed{\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \text{ converge.}}$

4. Montrer que $\forall n > 0 \quad T_{2n} = S_{2n} - \sqrt{2}S_n$

   RÉPONSE : Soit $n > 0$,

$$\begin{aligned}
T_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2.\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \\
&= \boxed{S_{2n} - \sqrt{2}S_n}
\end{aligned}$$

5. En déduire une relation entre τ et θ.

   RÉPONSE : D'après Q2c, quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}
T_{2n} = S_{2n} - \sqrt{2}S_n &= (2\sqrt{2n} + \theta) - \sqrt{2}(2\sqrt{n} + \theta) + o(1) \\
&= (1 - \sqrt{2})\theta + o(1)
\end{aligned}$$

   En passant à la limite nous obtenons $\boxed{\tau = (1 - \sqrt{2})\theta}$

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n \quad \text{et la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n| \text{ converge}$$

On s'intéresse à la nature de la série $\sum u_n$.

1. Préciser la limite de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Peut-on conclure directement sur la nature de $\sum u_n$?

   RÉPONSE : La série $\sum |v_n|$ converge, donc $\lim v_n = 0$, donc

   $$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\left(1 - \frac{\alpha}{n} + v_n\right) = 1$$

   La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure directement quant à la nature de $\sum u_n$.

2. Montrer que les série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{|v_n|}{n}$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n^2$ convergent.

   RÉPONSE : Nous avons les comparaisons suivantes :

   $$\frac{|v_n|}{n} = o(|v_n|) \text{ et } v_n^2 = o(|v_n|)$$

   (La deuxième comparaison vient du fait que la suite (v_n) a pour limite 0.)

   Or la série $\sum |v_n|$ converge, donc $\boxed{\text{les séries } \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{|v_n|}{n} \text{ et } \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n^2 \text{ convergent}}$

3. On veut montrer dans cette question qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \sim \frac{K}{n^\alpha}$. Pour cela on pose

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \ln(n^\alpha u_n) \text{ et } b_n = a_{n+1} - a_n$$

   (a) Démontrer, en exploitant ($\star$) que la série $\sum\limits_{n>0} b_n$ est convergente.

   RÉPONSE : Pour tout $n > 0$,

   $$\begin{aligned} b_n = a_{n+1} - a_n &= \ln\left((1+\frac{1}{n})^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \alpha \ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1 - \frac{\alpha}{n} + v_n) \text{ (d'après } \star) \\ &= \alpha(\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})) + (-\frac{\alpha}{n} + v_n + O(\frac{1}{n^2} + \frac{|v_n|}{n} + v_n^2)) \\ &= v_n + O(\frac{1}{n^2} + \frac{|v_n|}{n} + v_n^2) \end{aligned}$$

   Or les série $\sum v_n$, $\sum \frac{1}{n^2}$,$\sum \frac{|v_n|}{n}$ et $\sum v_n^2$ convergent, donc $\boxed{\text{la série } \sum b_n \text{ converge.}}$

   (b) Qu'en déduit-on pour la suite $(a_n)_{n>0}$? Conclure.

   RÉPONSE : La suite (a_n) et la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ ont même nature, donc $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ converge}}$. En notant ℓ sa limite, nous avons $n^\alpha u_n = e^{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^\ell > 0$, donc $\boxed{u_n \sim \frac{K}{n^\alpha}}$ où $K = e^\ell$

4. Préciser la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ selon la valeur de α.

   RÉPONSE : D'après Q3 les série $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ont même nature : $\boxed{\text{elles convergent si et seulement si } \alpha > 1}$

5. Applications : Utiliser les résultats qui précèdent pour déterminer la nature de la série de terme général (u_n) dans chacun des cas suivants :

   (a) $u_n = n^{-n} n! e^n$

   RÉPONSE : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e(1+\frac{1}{n})^{-n} = e^{1-n\ln(1+\frac{1}{n})} = 1+\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})$. La série $\sum u_n$ diverge (NB : on retrouve ce résultat avec la formule de Stirling)

   (b) $u_n = \dfrac{n.n!}{(a+1)\cdots(a+n)}$ $(a>0)$

   RÉPONSE : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+a+1)} = 1-\frac{a-1}{n}+O(\frac{1}{n^2})$. la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a>2$.

   (c) $u_n = \dfrac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)}$

   RÉPONSE : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} = 1-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})$; la série $\sum u_n$ diverge.