CORRECTION

Règles de ce QCM :

- *Il y a quatre exercices*
- *il peut y a voir plusieurs bonnes réponses pour une même question, et au moins une des réponses est correcte*
- *En cas de réponse fausse, la note attribuée à la question est* 0

Exercice 1 (5 points)

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les quatre vecteurs

$$e_1 = (1, -2, 0), \qquad e_2 = (-1, 0, 1), \qquad e_3 = (0, 1, 1), \qquad e_4 = (-1, -1, 0)$$

On note B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (e_1, e_2, e_3)$. On admettra que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. (1 point) La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) :

   (a) est libre
   (b) est génératrice de $\mathbb{R}^3$
   (c) est une base de $\mathbb{R}^3$
   (d) n'est ni libre ni génératrice

   RÉPONSE : (b)
   Une famille de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ ne peut être libre puisque $4 > \dim(\mathbb{R}^3)$. En revanche la famille proposée contient la base $B' = (e_1, e_2, e_3)$, donc est génératrice.

2. (1,5 points) La famille (e_2, e_3, e_4) :

   (a) est libre
   (b) est génératrice de $\mathbb{R}^3$
   (c) a pour rang 2
   (d) a pour rang 3

   RÉPONSE : (c)
   On constate la relation $e_2 = e_3 + e_4$, donc la famille est liée et $\text{rg}(e_2, e_3, e_4) = \text{rg}(e_3, e_4)$. Or (e_3, e_4) est libre, donc $\text{rg}(e_3, e_4) = 2$. Finalement la famille a pour rang $2 < \dim(\mathbb{R}^3)$: elle n'est pas génératrice.

3. (1 point) La matrice de passage de B vers B' est égale à

   (a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   RÉPONSE : (d)

4. (1,5 point) La matrice de passage de B' vers B est

(a) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

RÉPONSE : (a)
C'est l'inverse de la matrice de passage de B vers B'.

Exercice 2 (4,5 points)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$

1. (2 points) Le rang de A est égal à 3 si et seulement si

   (a) A n'est pas inversible

   (b) Le noyau de A est réduit à 0

   (c) $\lambda \neq 0$

   (d) $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -1$

   RÉPONSE : (b) et (d)
   Pour trouvons $\mathrm{rg}(A)$ nous pouvons échelonner ainsi :

$$A \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & -2 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda+2 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (\lambda+2)L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

   Par conséquent $\mathrm{rg}(A) = 2 < 3$ si $\lambda \in \{0, -1\}$, auquel cas A n'est pas inversible (et a un noyau non nul). Dans les autres cas $\mathrm{rg}(A) = 3$ et A est inversible.

2. (1 point) On suppose dans cette question $\lambda = 0$. La dimension du noyau de A est égale à

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3

   RÉPONSE : (b)
   Nous avons vu que $\mathrm{rg}(A) = 2$ si $\lambda = 0$. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 1$.

3. (1,5 points) On suppose dans cette question $\lambda = 1$. La matrice A :

   (a) n'est pas inversible

   (b) a pour rang 2

   (c) a pour inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) a pour inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

RÉPONSE : (d)
Si $\lambda = 1$ alors A est inversible de rang 3. On trouve par exemple A^{-1} en échelonnant la matrice augmentée $(A|X)$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Exercice 3 (5 points)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{2}(x + y - z, 2y, -x + y + z)$$

1. (1 point) L'application f :

   (a) est linéaire

   (b) est un projecteur

   (c) est une symétrie

   (d) est bijective

   RÉPONSE : (a) et (b)
   f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f^2 = f$, c'est donc un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Un projecteur autre que 0 et Id comme f ne peut être bijectif.

2. (1 point) La matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

   (a) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ y & 2y & y \\ -z & 0 & z \end{pmatrix}$

   (b) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y & -z \\ 0 & 2y & 0 \\ -x & y & z \end{pmatrix}$

   (d) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   RÉPONSE : (d)

3. (1,5 points) Le noyau et l'image de f :

   (a) sont supplémentaires

   (b) sont en somme directe

   (c) ont même dimension 2

   (d) ont pour dimensions respectives 1 et 2

   RÉPONSE : (a),(b),(d)
   La théorie des projecteurs nous dit que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires. En particulier ces sous-espaces sont en somme directe, et la somme de leur dimension est égale à 3.
   Les deux premières colonnes de A sont clairement indépendantes, donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) \geqslant 2$. De plus f n'est pas bijective donc $\text{rg}(f) < 3$. Finalement $\text{rg}(f) = 2$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$

4. (1,5 points) Le noyau de $\text{Id}_{\mathbb{R}^3} - f$:

(a) est égal à $\mathrm{Im}(f)$

(b) est ègal à $\mathrm{Ker}(f)$

(c) a pour matrice $I_3 - A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

(d) est supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$

RÉPONSE : (a),(c),(d)
D'après le cours sur les projecteurs, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - f) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4 (5,5 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle dont le noyau est noté H et $a \in E$ un vecteur tel que $\varphi(a) = 1$. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$f : x \mapsto 2x + \varphi(x)a$$

On se donne une base $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ de H. On pourra admettre que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, a)$ est une base de E.

1. (1,5 point) Le noyau de f :

   (a) est égal à H

   (b) est strictement inclus dans H *(ie inclus dans H et distinct de H)*

   (c) est égal à $\{0\}$

   (d) est égal à $Vect(a)$

   RÉPONSE : (c)
   Le vecteur a n'appartient pas à H (puisque $\varphi(a) \neq 0$) et $\dim(H) = n - 1$, donc $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$. Soit $x \in E$, ce vecteur se décompose de manière unique sous la forme $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc

   $$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(h + \lambda a) = 0 \Leftrightarrow f(h) + \lambda f(a) = 0 \Leftrightarrow 2h + 3\lambda a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = 0 \\ 3\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

   donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

2. (1 points) La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$
   (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   RÉPONSE : (c)
   Il suffit d'observer que $f(e_j) = 2e_j$ pour tout $j \leq n - 1$ et $f(a) = 3a$.

3. (1,5 points) En notant $f^2 = f \circ f$, on a la relation :

   (a) $f^2 = 2f$
   (c) $f^2 + 2f + 4\,\mathrm{Id}_E = 0$

   (b) $f^2 = 5f - 6\,\mathrm{Id}_E$
   (d) $(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - 3\,\mathrm{Id}_E) = 0$

   RÉPONSE : (b) et (d)
   En notant A la matrice précédente on voit facilement que $(A - 2I).(A - 3I) = 0$, donc $(f - 2\,\mathrm{Id}) \circ (f - 3\,\mathrm{Id}) = 0$. En développant il vient $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id} = 0$

4. (1,5 points) Dans cette question on considère le cas particulier $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi : P \mapsto P(1)$ et $a = X^2$. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

RÉPONSE : (a)
Notons $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, nous avons

$$\begin{cases} f(1) = 2 + X^2 \\ f(X) = 2X + X^2 \\ f(X^2) = 3X^2 \end{cases}$$

donc $M_B(f) = M_B(f(1), f(X), f(X^2)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$