CORRECTION

Règles de ce QCM :

* *Il y a cinq exercices*
* *il peut y a voir plusieurs bonnes réponses pour une même question, et au moins une des réponses est correcte*
* *En cas de réponse fausse, la note attribuée à la question est* 0

Exercice 1 (4 points)

On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \sqrt{1 + \lfloor 4x^2 \rfloor}$$

(on rappelle que $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t)

1. (1 point) La fonction f :

   (a) est en escalier sur $[0,1]$, avec la subdivision adaptée $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$

   (b) est en escalier sur $[0,1]$, avec la subdivision adaptée $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$

   (c) est continue sur $[0,1]$

   (d) est positive et bornée sur $[0,1]$

   RÉPONSE : (a) et (d)
   Plus précisément,

$$f = \mathbf{1}_{[0,1/2[} + \sqrt{2}\mathbf{1}_{[1/2,1/\sqrt{2}[} + \sqrt{3}\mathbf{1}_{[1/\sqrt{2},\sqrt{3}/2[} + 2\mathbf{1}_{[\sqrt{3}/2,1[} + \sqrt{5}\mathbf{1}_{\{1\}}$$

2. (1 point) On a l'inégalité :

   (a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \leqslant 2$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \geqslant 2$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 2xdx \geqslant \int_0^1 f(x)dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$

   RÉPONSE : (a) et (d)
   On a en effet les inégalités :

$$\forall x \in [0,1[\quad f(x) \leqslant 2$$
$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) \leqslant \sqrt{1+4x^2}$$

3. (1 point) La valeur exacte de $I = \int_0^1 f(x)dx$ est

   (a) $I = 3 - \dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{3}$

   (b) $I = 5 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{3}$

(c) $I = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ (d) $I = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

RÉPONSE : (b)
On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f &= \int_0^1 (\mathbf{1}_{[0,1/2[} + \sqrt{2}\mathbf{1}_{[1/2,1/\sqrt{2}[} + \sqrt{3}\mathbf{1}_{[1/\sqrt{2},\sqrt{3}/2[} + 2\mathbf{1}_{[\sqrt{3}/2,1[} + \sqrt{5}\mathbf{1}_{\{1\}}) \\ &= (1/2 - 0) + \sqrt{2}(1/\sqrt{2} - 1/2) + \sqrt{3}(\sqrt{3}/2 - 1/\sqrt{2}) + 2(1 - \sqrt{3}/2) \\ &= 5 - 1/\sqrt{2} - \sqrt{6}/2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

4. (1 point) Soit $J = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$. Avec le changement de variable « $x = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(t)$ », on obtient, avec une constante $\alpha > 0$, la relation

(a) $J = \displaystyle\int_0^\alpha \operatorname{ch}(t)dt$ (c) $J = \displaystyle\int_0^\alpha \operatorname{ch}^2(t)dt$

(b) $J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\alpha \operatorname{ch}(t)dt$ (d) $J = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{1}{2}\operatorname{ch}^2(t)dt$

RÉPONSE : (d)
le nombre α est la solution de l'equation $\operatorname{sh}(\alpha) = 2$, il vaut $\alpha = \ln(2+\sqrt{5})$

Exercice 2 (4 points)

Un sac contient n jetons numérotées de 1 à n ($n \geqslant 1$).
On effectue l'expérience aléatoire suivante : on choisit au hasard un jeton dans le sac ; si on note k le numéro obtenu, on tire alors k fois de suite à pile ou face avec une pièce non truquée.
Étant donnés $(k, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![0, n]\!]$, on considère les événements :
A_k :« le numéro du jeton pioché est k »,
B_j :« la pièce est tombée exactement j fois sur pile »,
C :« la pièce est tombée sur pile au moins une fois ».

1. (1,5 points) Si $j \geqslant 1$, la probabilité de B_j est

   (a) $\mathbf{P}(B_j) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=j}^{n} \dfrac{1}{2^k}$

   (b) $\mathbf{P}(B_j) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} \dfrac{1}{2^k}$

   (c) $\mathbf{P}(B_j) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \dfrac{1}{2^k}$

   (d) $\mathbf{P}(B_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_j | A_k)\, \mathbf{P}(A_k)$

   RÉPONSE : (b) et (d)
   (d) est la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'événements $(A_1, \cdots, A_n)$.
   (b) s'en déduit en remarquant que $\mathbf{P}(B_j|A_k) = \binom{k}{j}\frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in [\![j, n]\!]$, et $\mathbf{P}(B_j|A_k) = 0$ si $k < j$

2. (1,5 points) La probabilité de C est

   (a) $\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(B_0)$

   (b) $\mathbf{P}(C) = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n2^n}$

   (c) $\mathbf{P}(C) = 1 - \frac{1}{n}$

   (d) $\mathbf{P}(C) = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

   RÉPONSE : (a) et (b)
   (a) vient du fait que $B_0 = \overline{C}$. Ensuite $\mathbf{P}(B_0)$ se calcule comme dans la question précédente :

$$\mathbf{P}(B_0) = \mathbf{P}(B_j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{2^n})$$

3. (1 points) La probabilité de A_k sachant C est

   (a) $\mathbf{P}(A_k|C) = \mathbf{P}(A_n|C)$

   (b) $\mathbf{P}(A_k|C) = \frac{\mathbf{P}(A_k \cap C)}{\mathbf{P}(C)}$

   (c) $\mathbf{P}(A_k|C) = \frac{\mathbf{P}(C|A_k)\,\mathbf{P}(A_k)}{\mathbf{P}(C)}$

   (d) $\mathbf{P}(A_k|C) = \frac{\mathbf{P}(C|A_k)\,\mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(A_k)}$

   RÉPONSE : (b) et (c)
   -(b) est la définition d'une probabilité conditionnelle. (c) est la formule de Bayes

Exercice 3 (4 points)

On dispose de n urne $U_2, U_3, \cdots, U_{n+1}$. Pour tout i, l'urne U_i contient i boules numérotées de 1 à i.
On choisit une urne au hasard, puis on extrait deux boules simultanément de cette urne.
On considère les événements :
E :« l'écart entre les numéros est égal à 1, autrement dit les numéros obtenus sont des entiers consécutifs »
F :« l'écart entre les numéros est inférieur ou égal à 2 »

1. (1,5 points) La probabilité de E est

(a) $\mathbf{P}(E) = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \frac{i-1}{i^2}$

(b) $\mathbf{P}(E) = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i}$

(c) $\mathbf{P}(E) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i}$

(d) $\mathbf{P}(E) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i^2}$

RÉPONSE : (b)
Notons A_i :« c'est l'urne numéro i qui est choisie ». Ces événements forment un système complet donc

$$\mathbf{P}(E) = \sum_{i=2}^{n+1} \mathbf{P}(E|A_i)\,\mathbf{P}(A_i)$$

Fixonx $i \in [\![2, n+1]\!]$. Les tirages dans l'urne i s'apparentent à des 2-combinaisons de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, i\}$. Nous avons $\mathbf{P}(E|A_i) = \frac{card(S)}{\binom{i}{2}}$, où S est l'ensemble des combinaisons de la forme $\{j, j+1\}$, avec $1 \leqslant j \leqslant i-1$. Donc

$$\mathbf{P}(E|A_i) = \frac{i-1}{\binom{i}{2}} = \frac{2}{i}$$

2. (1,5 points) La probabilité de F est

(a) $\mathbf{P}(F) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \frac{2i+1}{i^2}$

(b) $\mathbf{P}(F) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \frac{i}{i-1}$

(c) $\mathbf{P}(F) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \frac{2}{i^2}$

(d) $\mathbf{P}(F) = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \frac{2i-3}{i(i-1)}$

RÉPONSE : (d)
Comme dans la question précédente,

$$\mathbf{P}(F) = \sum_{i=2}^{n+1} \mathbf{P}(F|A_i)\,\mathbf{P}(A_i)$$

et

$$\mathbf{P}(F|A_i) = \frac{card(W)}{\binom{i}{2}}$$

où W est l'union de S (voir réponse à la question précédente) et de l'ensemble des combinaisons de la forme $\{j, j+2\}$, $1 \leqslant j \leqslant i-2$; on obtient $card(W) = (i-1)+(i-2) = 2i-3$

3. (1 points) Les événements E et F

   (a) sont incompatibles

   (b) sont indépendants

   (c) ne sont pas incompatibles

   (d) ne sont pas indépendants

   RÉPONSE : (c) et (d)
   $E \subset F$ donc :
   (c) : $E \cap F = E \neq \varnothing$
   (b) : $\mathbf{P}(E \cap F) = \mathbf{P}(E) \neq \mathbf{P}(E).\mathbf{P}(F)$

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{dt}{1+t^3}$

1. (1,5 points) L'ensemble de définition D_f de la fonction f est :

(a) $D_f =]0, +\infty[$
(b) $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$
(c) $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$
(d) $D_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

RÉPONSE : (a)
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Donc $f(x)$ existe si et seulement si le segment $[x, 1/x]$ est inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. C'est le cas si $x > 0$; en revanche pour $x < 0$, les nombres x et $1/x$ sont situés de part et d'autre de -1... et $f(x)$ n'est pas défini.

2. (1,5 points) La fonction f est dérivable sur D_f et pour tout $x \in D_f$,

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$
(b) $f'(x) = \dfrac{1}{1-x+x^2}$
(c) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
(d) $f'(x) = 1$

RÉPONSE : (b)
On calcule

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{1+x}{1+x^3} = \frac{1}{1-x+x^2}$$

3. (2 points) La fonction f :

(a) s'annule en 1
(b) est positive sur $]0, +\infty[$
(c) a une limite finie en $+\infty$
(d) a pour limite $+\infty$ en $+\infty$

RÉPONSE : (a) et (c)
On a bien $f(1) = 0$. f change de signe en 1 (attention à l'ordre des bornes de l'intégrale x et $1/x$).
D'après la question précédente, f est croissante sur D_f. On peut voir aussi que f est majorée. Par exemple pour $x > 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{1/x}^{1} \frac{dt}{1+t^3} + \int_{1}^{x} \frac{dt}{1+t^3} \\ &\leqslant \int_{1/x}^{1} dt + \int_{1}^{x} \frac{dt}{t^3} \\ &= (1-\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{x^2}) \\ &\leqslant \frac{3}{2} \end{aligned}$$

donc f a bien une limite finie en $+\infty$.

Exercice 5 (3 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+n)e^{-\frac{3k}{n}}$

1. (1 points) S_n est une somme de Riemann de la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

   (a) $f(x) = (x+1)e^{-3x}$

   (b) $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$

   (c) $f(x) = (x+1)e^{-x^3}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}e^{-3x}$

   RÉPONSE : (a)

   On peut en effet écrire avec cette fonction : $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+1\right)e^{-\frac{3k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$

2. (2 points) La suite (S_n) converge vers

   (a) $\dfrac{2e+1}{e^3}$

   (b) $\dfrac{5}{2}$

   (c) $\dfrac{4e^3+e+1}{2e^3+e-1}$

   (d) $\dfrac{4e^3-7}{9e^3}$

   RÉPONSE : (d)

   La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc la suite (S_n) de ses sommes de Riemann converge vers

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f &= \int_0^1 (x+1)e^{-3x}dx \\
&= \left[(x+1)\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 e^{-3x}dx \text{ (intégration par parties)} \\
&= \left[-(x+1)\frac{e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9}\right]_0^1 \\
&= -\frac{7e^{-3}}{9} + \frac{4}{9} \\
&= \frac{4e^3-7}{9e^3}
\end{aligned}$$