Classe de PCSI

Cours de physique

Année 2025-2026

Outils mathématiques pour la physique

Surfaces et volumes
Un peu de trigonométrie
Vecteurs
Équations différentielles

CAMILLE VERNET
Collège • Lycée • Cpge

I Dans le plan

- Périmètre d'un cercle de rayon R :

$$\mathscr{P} = 2\pi R$$

- Aire d'un disque de rayon R :

$$\mathscr{A} = \pi R^2$$

- Aire d'un triangle :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\text{base} \times \text{hauteur}$$

II Dans l'espace

- Cylindre de rayon R et de hauteur h :
  - Section du cylindre :

$$S = \pi R^2$$

  - Aire latérale du cylindre :

$$\mathscr{A} = 2\pi R \times h$$

  - Volume du cylindre :

$$\mathscr{V} = \pi R^2 \times h$$

- Sphère/boule de rayon R :
  - Surface de la sphère de rayon R :

$$S = 4\pi R^2$$

  - Volume de la boule de rayon R :

$$\mathscr{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

- Volume d'une pyramide de hauteur h et de base (carrée ou triangulaire) d'aire $\mathscr{A}_{\text{base}}$:

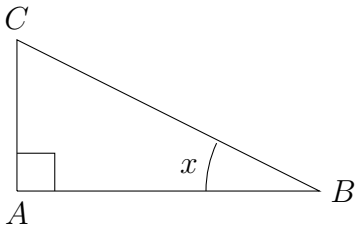
$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{A}_{\text{base}} \times h$$

- Volume d'un cône de hauteur h et de base de rayon R :

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\pi R^2 \times h$$

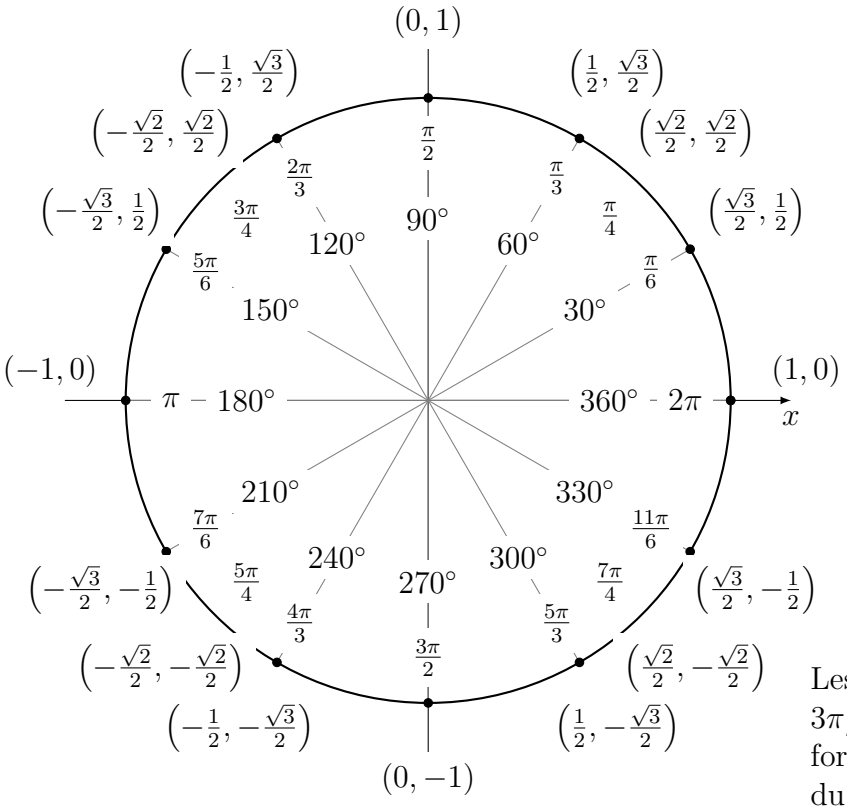
I Définitions et propriétés

■ Définitions géométriques



$$\cos(x) = \frac{AB}{BC} \quad \sin(x) = \frac{AC}{BC} \quad \tan(x) = \frac{AC}{AB}$$

■ Cercle trigonométrique



■ Valeurs remarquables :

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	$\tan(\theta)$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	3
$\frac{\pi}{2}$	0	1	∞

Les autres valeurs remarquables ($-\pi/2$, $-\pi/3$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, $-\pi/6$, $-\pi/4$ ...) sont à retrouver à l'aide des formules de décalages données ci-dessous et à l'aide du cercle trigonométrique.

■ Parité

- $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est une fonction paire : $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
- $\theta \mapsto \sin(\theta)$ est une fonction impaire : $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\theta \mapsto \tan(\theta)$ est une fonction impaire : $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

■ Périodicité

- $\theta \mapsto \cos(\theta)$ et $\theta \mapsto \sin(\theta)$ sont des fonctions 2π − périodiques
- $\theta \mapsto \tan(\theta)$ est une fonction π − périodique

II Décalages de π et $\frac{\pi}{2}$

Entraînez-vous à retrouver ces valeurs à l'aide du cercle trigonométrique plutôt que de les apprendre par cœur « bêtement ».

■ $\cos(\theta \pm \pi) = -\cos(\theta)$

■ $\sin(\theta \pm \pi) = -\sin(\theta)$

■ $\tan(\theta \pm \pi) = \tan(\theta)$

■ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$

■ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$

■ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$

III Premières relations

- $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$
- $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$
- $1 + \tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$

IV Formules d'addition

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$

V Formules de duplication

- $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
- $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$
- $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$
- $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$

VI Linéarisation

- **Carrés**
  - $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}\Big(1 + \cos(2x)\Big)$
  - $\sin^2(x) = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \cos(2x)\Big)$
- **Produits en sommes**

  Les trois formules ci-dessous se retrouvent facilement en faisant des combinaisons des formules $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$ et $\sin(\alpha - \beta)$:
  - $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\Big)$
  - $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta)\Big)$
  - $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\Big(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\Big)$

VII Sommes en produits

- $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$
- $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$
- $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$
- $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$

I Base et repère orthonormés directs

Définitions

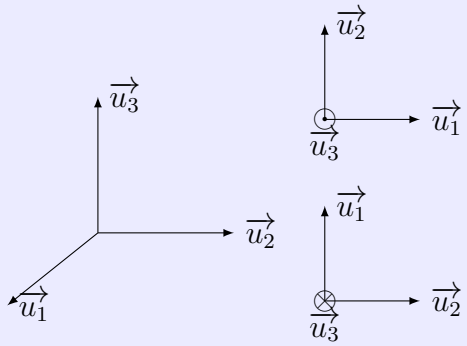
Base orthonormée directe (BOND) $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$.

Elle est composée de trois vecteurs :

— « ortho » : perpendiculaires entre eux ;

— « normée » : unitaires c'est-à-dire de norme 1 ;

— « directe » : respectant
la **règle du tire-bouchon** (on visse de $\overrightarrow{u_1}$ vers $\overrightarrow{u_2}$ et on avance dans le sens de $\overrightarrow{u_3}$)
ou des **trois doigts de la main droite** (pouce selon $\overrightarrow{u_1}$, index selon $\overrightarrow{u_2}$, majeur selon $\overrightarrow{u_3}$).



$\odot$: le vecteur vient vers nous ; $\otimes$: le vecteur part derrière la feuille (imaginez une flèche)

Repère orthonormé direct (ROND) : $(O; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ on ajoute un point O, l'origine du repère, à une base orthonormée directe.

II Composantes d'un vecteur

Nous étudierons différents systèmes de repérage d'un point de l'espace dans le chapitre 12. Dans ce qui suit nous utiliserons la base orthonormée $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ associée aux coordonnées cartésiennes. Mais les résultats se généralisent pour toute base orthonormée, par exemple la base cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$, ou la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ associée aux coordonnées sphériques.

Définition

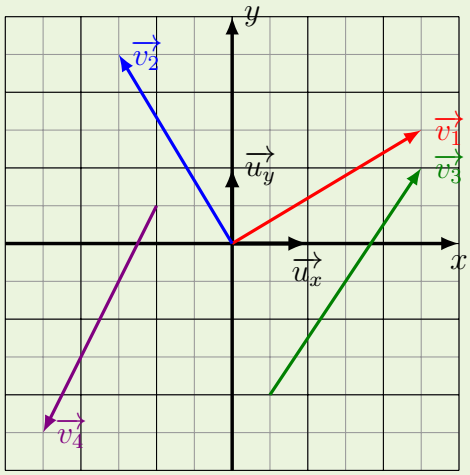
Tout vecteur $\overrightarrow{v}$ se décompose de façon unique dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$: $\boxed{\overrightarrow{v} = v_x\overrightarrow{u_x} + v_y\overrightarrow{u_y} + v_z\overrightarrow{u_z}}$
avec v_x, v_y et v_z sont les **composantes du vecteur** $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.
Les composantes v_x, v_y et v_z sont des **grandeurs scalaires algébriques**.

En colonne, on peut l'écrire : $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

Activité n°1 –

Plaçons nous à deux dimensions. Exprimer les quatre vecteurs dans la base orthonormée $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ (qui sont de norme 1, donc leur longueur représente 1 unité).

1. $\overrightarrow{v_1} =$
2. $\overrightarrow{v_2} =$
3. $\overrightarrow{v_3} =$
4. $\overrightarrow{v_4} =$



III Produit scalaire

III.1 Définition

Définition

Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{v}$ est un scalaire (c'est-à-dire un nombre), noté $\vec{w} \cdot \vec{v}$ et défini, pour deux vecteurs exprimés dans la même base orthonormée, par :

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = w_x v_x + w_y v_y + w_z v_z$$

Il faut faire attention à **exprimer les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{v}$ dans la même base.**
Il peut aussi se calculer à l'aide de :

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \|\vec{w}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{(\vec{w}, \vec{v})}\right)$$

Activité n°2 –
Calculer le produit scalaire de $\vec{v_1}$ avec le $\vec{v_2}$ et de $\vec{v_3}$ avec $\vec{v_4}$.

III.2 Propriétés

- Le **produit scalaire est symétrique** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Le **produit scalaire est bilinéaire** :
  - $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{v} \cdot \left(\lambda \vec{w}\right) = \lambda\left(\vec{v} \cdot \vec{w}\right)$
  - $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\left(\lambda \vec{u}\right) \cdot \vec{w} = \lambda\left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right)$
- si $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ **OU** $\left\{\vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}\right\}$
- **Dérivée** : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u} \cdot \vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

III.3 Norme d'un vecteur

À connaître

La **norme** d'un vecteur $\vec{v}$ est la racine carrée de son carré scalaire : $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
C'est un **scalaire (=un nombre) positif**.

Attention – Erreur à ne pas commettre

$$\left\|\vec{v} \pm \vec{w}\right\|^2 = \left\|\vec{v}\right\|^2 + \left\|\vec{w}\right\|^2 \pm 2\vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\left\|\vec{v} + \vec{w}\right\|^2 \neq \left\|\vec{v}\right\|^2 + \left\|\vec{w}\right\|^2 \text{ et } \left\|\vec{v} - \vec{w}\right\|^2 \neq \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{w}\right\|^2$$

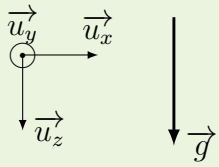
Activité n°3 – Calculs de norme

1. Reprendre l'activité n°1 et calculer les normes des quatre vecteurs.
2. On donne le vecteur vitesse exprimé dans la base cartésienne orthonormée directe $\left(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z}\right)$: $\vec{v} = \dot{x}\vec{u_x} + \dot{y}\vec{u_y} + \dot{z}\vec{u_z}$. Exprimer sa norme.
3. On donne le vecteur vitesse exprimé dans la base cylindrique orthonormée directe $\left(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z}\right)$: $\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}$. Exprimer sa norme.

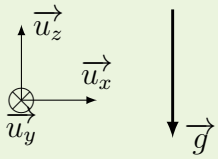
Activité n°4 – Norme et vecteurs unitaires

Dans cet exercice on notera x la norme du vecteur $\vec{x}$.
Exprimer les vecteurs suivants en fonction de leur norme et d'un des vecteurs $\vec{u_x}$, $\vec{u_y}$, $\vec{u_z}$, $\vec{u_r}$, $\vec{u_\theta}$ présents sur le schéma.

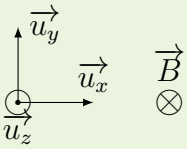
1. Exprimer le vecteur $\vec{g}$.



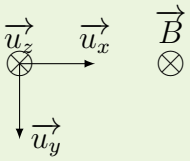
2. Exprimer le vecteur $\vec{g}$.



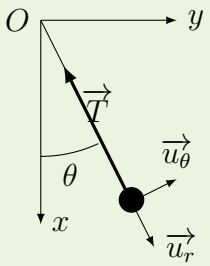
3. Exprimer le vecteur $\vec{B}$.



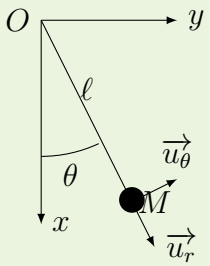
4. Exprimer le vecteur $\vec{B}$.



5. Exprimer le vecteur $\vec{T}$.



6. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$.



III.4 Projection d'un vecteur

III.4.a) Produits scalaires entre les vecteurs d'une BON

Les produits scalaire des vecteurs de la base orthonormée sont :

- $\vec{u_x} \cdot \vec{u_x} = \vec{u_y} \cdot \vec{u_y} = \vec{u_z} \cdot \vec{u_z} = 1$ (car ils sont de norme 1)
- $\vec{u_x} \cdot \vec{u_y} = \vec{u_y} \cdot \vec{u_z} = \vec{u_x} \cdot \vec{u_z} = 0$ (car ils sont orthogonaux 2 à 2)

III.4.b) Projection d'un vecteur quelconque

Pour tout vecteur $\vec{w}$, exprimé dans la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$: $\vec{w} \cdot \vec{u_x} = \left(w_x\vec{u_x} + w_y\vec{u_y} + w_z\vec{u_z}\right) \cdot \vec{u_x} = w_x$

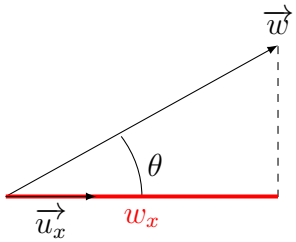
À connaître

La **composante w_α d'un vecteur $\vec{w}$** (α est un indice parmi x, y, z, r, θ ou φ) est le produit scalaire de $\vec{w}$ avec le vecteur unitaire $\vec{u_\alpha}$: $\boxed{w_\alpha = \vec{w} \cdot \vec{u_\alpha}}$

On peut alors écrire $\boxed{\vec{w} = \left(\vec{w} \cdot \vec{u_x}\right)\vec{u_x} + \left(\vec{w} \cdot \vec{u_y}\right)\vec{u_y} + \left(\vec{w} \cdot \vec{u_z}\right)\vec{u_z}}$

Géométriquement : $w_x = \vec{w} \cdot \vec{u_x} = \|\vec{w}\| \times \underbrace{\|\vec{u_x}\|}_{=1} \times \cos\left(\widehat{\vec{u_x}, \vec{u}}\right) = \|\vec{w}\| \cos(\theta)$,

avec $\theta = \left(\widehat{\vec{u_x}, \vec{w}}\right)$, l'angle entre le vecteur unitaire $\vec{u_x}$ et le vecteur $\vec{w}$ que l'on projette sur $\vec{u_x}$.



Méthode

- Pour déterminer les composantes d'un vecteur dans une BOND, il faut déterminer les projections du vecteur sur les vecteurs unitaires de la BOND, c'est-à-dire calculer les produits scalaires du vecteur étudié avec les vecteurs unitaires de la BOND.
- Lors de la projection d'un vecteur, il faudra toujours :
  - vérifier le signe de la projection :
    - si $\overrightarrow{w}$ pointe dans le même sens que $\overrightarrow{u_\alpha}$, alors $w_\alpha > 0$;
    - si $\overrightarrow{w}$ pointe dans le sens opposé à $\overrightarrow{u_\alpha}$, alors $w_\alpha < 0$
  - vérifier que le « cos » ou le « sin » est le bon :
    - « faire tendre l'angle entre $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u_\alpha}$ vers 0 »
    - si la composante tend vers une valeur maximale, alors c'est le « cos » qui intervient ;
    - si la composante tend vers 0, alors c'est le« sin » qui intervient.

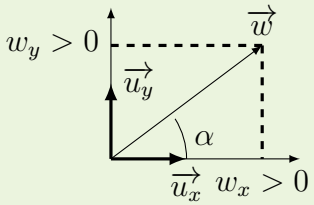
Attention – Ne pas confondre

vecteur norme du vecteur composantes du vecteur

Activité n°5 – Projections

Dans les différents cas ci-dessous, exprimer le vecteur $\overrightarrow{w}$ dans la base $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}\right)$ en fonction de sa norme w, de l'angle indiqué (θ ou α ou β) et les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$.

1. *Cas traité* :



Correction : Le vecteur $\overrightarrow{w}$ a deux composantes, une selon $\overrightarrow{u_x}$ et une selon $\overrightarrow{u_y}$, il s'écrit donc sous la forme $\overrightarrow{w} = w_x\overrightarrow{u_x} + w_y\overrightarrow{u_y}$. Déterminons w_x et w_y :

- $w_x = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_x} = \left\|\overrightarrow{w}\right\| \times \left\|\overrightarrow{u_x}\right\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{w}}) = w \times 1 \times \cos(\alpha)$
- $w_y = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_y} = \left\|\overrightarrow{w}\right\| \times \left\|\overrightarrow{u_y}\right\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{w}}) = w \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, soit $w_y = w\sin(\alpha)$.

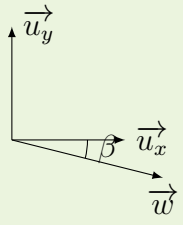
Ainsi $\overrightarrow{w} = w(\cos(\alpha)\overrightarrow{u_x} + \sin(\alpha)\overrightarrow{u_y})$

On vérifie :

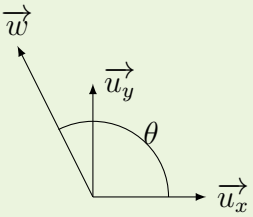
— les signes : comme $\alpha \in [0, \pi/2]$, $\cos(\alpha) > 0$ et $\sin(\alpha) > 0$, ce qui est cohérent avec les signes des composantes sur le schéma.

— les cos/sin : Si on fait tendre α vers 0, la composante selon $\overrightarrow{u_x}$ devient bien maximale et la composante selon $\overrightarrow{u_y}$ devient bien nulle.

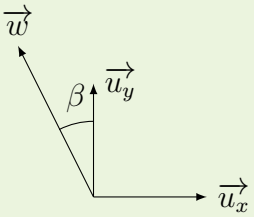
2.



3.

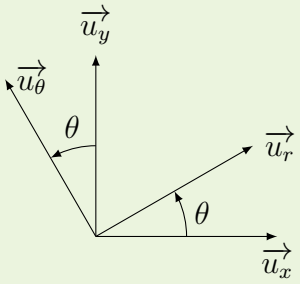


4.



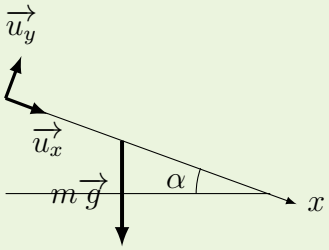
Activité n°6 – Projections fréquentes

Exprimer les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction de θ, $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$.



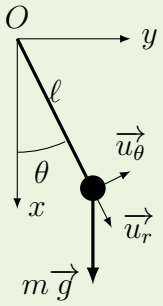
On considère la situation ci-contre.
Le vecteur $m\overrightarrow{g}$ est un vecteur de norme mg.

Exprimer le vecteur $m\overrightarrow{g}$ en fonction de mg, $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$.



On considère la situation ci-contre.
Le vecteur $m\overrightarrow{g}$ est un vecteur de norme mg.

Exprimer le vecteur $m\overrightarrow{g}$ en fonction de mg, $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$.



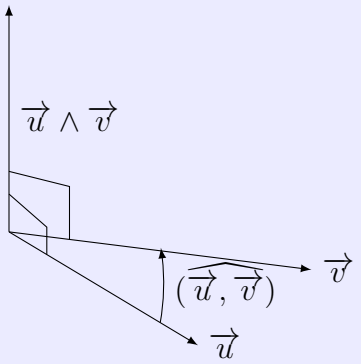
IV Produit vectoriel

IV.1 Définition

Définition

Le **produit vectoriel** des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un ***vecteur*** noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

- la <u>direction</u> est orthogonale à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, c'est-à-dire au plan défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- le <u>sens</u> est donné par la **règle des trois doigts de la main droite** : le pouce est selon $\vec{u}$, l'index selon $\vec{v}$, alors le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est donné par le majeur
  ou par la **règle du tire-bouchon** : on « visse » selon le sens qui amène le vecteur $\vec{u}$ vers le vecteur $\vec{v}$ et on progresse selon le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
- la <u>norme</u> est $\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \left|\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\right|$



Attention

Il faut faire très attention **à l'ordre des vecteurs** lors du calcul d'un produit vectoriel.

IV.2 Quelques propriétés et formules

- Le produit vectoriel est **<u>antisymétrique</u>** $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- Le produit vectoriel est **<u>bilinéaire</u>** $\left(\lambda\vec{A} + \mu\vec{B}\right) \wedge \vec{C} = \lambda\vec{A} \wedge \vec{C} + \mu\vec{B} \wedge \vec{C}$ et $\vec{C} \wedge \left(\lambda\vec{A} + \mu\vec{B}\right) = \lambda\vec{C} \wedge \vec{A} + \mu\vec{C} \wedge \vec{B}$
- Le produit vectoriel est **<u>distributif</u>** $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- **<u>Double produit vectoriel</u>** : $\boxed{\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right)\vec{v} - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)\vec{w}}$
- **<u>Dérivée d'un produit vectoriel</u>** : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$

IV.3 Calculs de produits vectoriels utiles

IV.3.a) Produit vectoriel de vecteurs d'une BON

i- Dans une base cartésienne$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z \;;\; \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x \;;\; \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$$
$$\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x = -\vec{u}_z \;;\; \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = -\vec{u}_x \;;\; \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_y$$

ii- Dans une base cylindrique$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

$$\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z \;;\; \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_r \;;\; \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = -\vec{u}_z \;;\; \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta = -\vec{u}_r \;;\; \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_\theta$$

iii- Dans une base sphérique$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

$$\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \;;\; \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \;;\; \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = -\vec{u}_\varphi \;;\; \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_\theta = -\vec{u}_r \;;\; \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\varphi = -\vec{u}_\theta$$

IV.3.b) Expression

Soient $\overrightarrow{w} = w_x\overrightarrow{u_x} + w_y\overrightarrow{u_y} + w_z\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{v} = v_x\overrightarrow{u_x} + v_y\overrightarrow{u_y} + v_z\overrightarrow{u_z}$

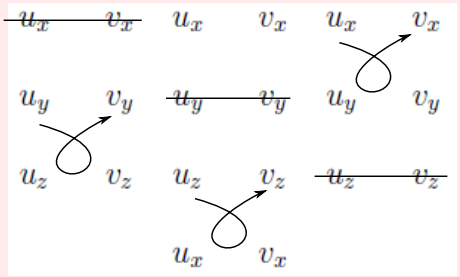
Le produit vectoriel de $\overrightarrow{w}$ par $\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} = (w_x\overrightarrow{u_x} + w_y\overrightarrow{u_y} + w_z\overrightarrow{u_z}) \wedge (v_x\overrightarrow{u_x} + v_y\overrightarrow{u_y} + v_z\overrightarrow{u_z})$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} &= w_x\overrightarrow{u_x} \wedge v_x\overrightarrow{u_x} + w_x\overrightarrow{u_x} \wedge v_y\overrightarrow{u_y} + w_x\overrightarrow{u_x} \wedge v_z\overrightarrow{u_z} \\
&+ w_y\overrightarrow{u_y} \wedge v_x\overrightarrow{u_x} + w_y\overrightarrow{u_y} \wedge v_y\overrightarrow{u_y} + w_y\overrightarrow{u_y} \wedge v_z\overrightarrow{u_z} \\
&+ w_z\overrightarrow{u_z} \wedge v_x\overrightarrow{u_x} + w_z\overrightarrow{u_z} \wedge v_y\overrightarrow{u_y} + w_z\overrightarrow{u_z} \wedge v_z\overrightarrow{u_z} \\
\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0} + w_xv_y\overrightarrow{u_z} + (-w_xv_z\overrightarrow{u_y}) \\
&+ (-w_yv_x\overrightarrow{u_z}) + \overrightarrow{0} + w_yv_z\overrightarrow{u_x} \\
&+ w_zv_x\overrightarrow{u_y} + (-w_zv_y\overrightarrow{u_x}) + \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

D'où, en regroupant, $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} = (w_yv_z - w_zv_y)\overrightarrow{u_x} + (w_zv_x - w_xv_z)\overrightarrow{u_y} + (w_xv_y - w_yv_x)\overrightarrow{u_z}$

Ce qui s'obtient beaucoup plus simplement et rapidement avec le moyen mnémotechnique suivant :

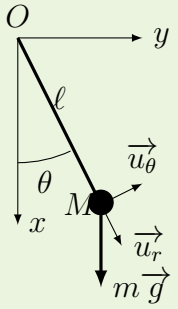
À connaître : Moyen mnémotechnique



$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_yv_z - u_zv_y \\ u_zv_x - u_xv_z \\ u_xv_y - u_yv_x \end{vmatrix}$$

Activité n°7 – Produits vectoriels

1. Que vaut $\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{v}$?
2. Que vaut $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}$ lorsque $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{f} = f\overrightarrow{u_r}$?
3. Calculer le produit vectoriel de $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ avec $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$; $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ forme une base orthonormée directe.
4. Calculer le produit vectoriel de $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ avec $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$; $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ forme une BOND.
5. Calculer le produit vectoriel de $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$, où $\overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$; $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ forme une BOND
6. On considère la situation ci-contre.
   Le vecteur $m\overrightarrow{g}$ est un vecteur de norme mg.
   Déterminer l'expression du produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{g}$.



À retenir

$$\overrightarrow{\text{vecteur}} = \overrightarrow{\text{vecteur}}$$

$$\text{scalaire} = \text{scalaire}$$

$$\overrightarrow{\text{vecteur}} \cdot \overrightarrow{\text{vecteur}} = \text{scalaire}$$

$$\overrightarrow{\text{vecteur}} \wedge \overrightarrow{\text{vecteur}} = \overrightarrow{\text{vecteur}}$$

I Équations différentielles du premier ordre : $\dot{y} + \frac{1}{\tau} y = K$

Méthode

1. Déterminer la **solution générale de l'équation homogène (sans second membre)**

$$\frac{\mathrm{d}y_H}{\mathrm{d}t} + \frac{y_H}{\tau} = 0 \quad \text{(EH)}$$

$$y_H(t) = Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R} \text{ une constante d'intégration}$$

2. Déterminer une **solution particulière y_P de (E), recherchée sous la forme du second membre**, ici constant : $\frac{\mathrm{d}y_P}{\mathrm{d}t} + \frac{y_P}{\tau} = K$, or $\frac{\mathrm{d}y_P}{\mathrm{d}t} = 0$ et donc $y_P = K\tau$.
3. La **solution générale de (E) est la somme de la solution homogène et de la solution particulière** :

$$y(t) = y_H(t) + y_P \qquad y(t) = Ae^{-t/\tau} + K\tau$$

4. **Déterminer la constante d'intégration** A à l'aide de la condition initiale $y(t = 0)$.

II Équations différentielles du deuxième ordre

II.1 Type « oscillateur harmonique » : $\ddot{y} + \omega_0^2 y = K$

Méthode

1. Déterminer la **solution générale de l'équation homogène (sans second membre)**

$$\ddot{y}_H + \omega_0^2 y_H = 0$$

$$y_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ deux constantes d'intégration}$$

$$y_H(t) = Y_m\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{avec } (Y_m, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi] \text{ deux constantes d'intégration}$$

2. Déterminer une **solution particulière y_P de (E), recherchée sous la forme du second membre**, ici constant : $\ddot{y_P} + \omega_0^2 y_P = K$, or $\ddot{y_P} = 0$, donc $y_P = \frac{K}{\omega_0^2}$
3. La **solution générale de (E) est la somme de la solution homogène et de la solution particulière** :

$$y(t) = y_H(t) + y_P = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{K}{\omega_0^2}$$

$$x(t) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{K}{\omega_0^2}$$

4. **Déterminer les deux constantes d'intégration** à l'aide des deux conditions initiales : $y(t = 0)$ et $\dot{y}(t = 0)$.
   a) Exprimer $y(t = 0) = A$ et égaliser avec la valeur de $y(t = 0)$ fournie par l'énoncé : vous avez déterminé A.
   b) Dériver y par rapport au temps : $\dot{y}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$
   c) Exprimer $\dot{y}(t = 0) = B\omega_0$ et égaliser avec la valeur de $\dot{y}(t = 0)$ fournie par l'énoncé : vous avez déterminé B.

II.2 $\ddot{y} - \alpha^2 y = K$

Méthode

1. **Résolution de l'équation homogène sans second membre** : $\ddot{y}_H - \alpha^2 y_H = 0$ (EH)
   a) Écrire l'équation caractéristique (EC) : $r^2 - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = \alpha^2$
   b) En déduire les racine de (EC) : $r = \pm\alpha$
   c) En déduire les solutions générales $y_H(t)$ de l'équation homogène (EH), en introduisant deux constantes d'intégration A et B :

$$y_H(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{\alpha t} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ deux constantes d'intégration}$$

$$y_H(t) = A\text{ch}(\alpha t) + B\text{sh}(\alpha t) \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ deux constantes d'intégration}$$

2. **Déterminer la solution particulière y_P recherchée sous la même forme que le second membre**, qui est constant ici : $y_P = \dfrac{K}{\alpha^2}$
3. La **solution générale recherchée est la somme de la solution homogène et de la solution particulière** : $y(t) = y_H(t) + y_P = Ae^{-\alpha t} + Be^{\alpha t} + \dfrac{K}{\alpha^2}$
4. Déterminer les **constantes d'intégration** à l'aide des conditions initiales sur la fonction et sa dérivée : $y(0)$ et $\dot{y}(0)$ (à l'image de la méthode pour l'oscillateur harmonique).

II.3 Type « oscillateur amorti » : $\ddot{y} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = K$

Méthode

1. **Résolution de l'équation homogène sans second membre** : $\ddot{y}_H + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{y}_H + \omega_0^2 y_H = 0$ (EH)
   a) Écrire l'équation caractéristique (EC) : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$
   b) Calculer le discriminant Δ de (EC).
   c) Étudier le signe de Δ, selon les valeurs numériques fournies, et en déduire les racines r de l'équation caractéristique (EC).
   d) En déduire les solutions générales $y_H(t)$ de l'équation homogène (EH), en introduisant deux constantes d'intégration A et B :
   — Si $\Delta < 0$, alors $y_H(t) = \exp\left(\Re(r)t\right)\left(A\cos(\Im(r)t) + B\sin(\Im(r)t)\right)$
   — Si $\Delta > 0$, alors $y_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
   — Si $\Delta = 0$, alors $y_H(t) = (At + B)\exp(rt)$
2. **Déterminer la solution particulière y_P recherchée sous la même forme que le second membre**, qui est constant ici : $y_P = \dfrac{K}{\omega_0^2}$
3. La solution générale recherchée est la somme de la solution homogène et de la solution particulière : $y(t) = y_H(t) + y_P$
4. Déterminer les **constantes d'intégration** à l'aide des conditions initiales sur la fonction et sa dérivée : $y(0)$ et $\dot{y}(0)$ (à l'image de la méthode pour l'oscillateur harmonique).

III Équation différentielle avec second membre sinusoïdal

Méthode

La résolution d'une équation différentielle avec une second membre sinusoïdal :

$$\dot{y} + \frac{1}{\tau} y = A\cos(\omega t + \varphi_e) \quad \text{ou} \quad \ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = A\cos(\omega t + \varphi_e)$$

La solution générale de l'équation homogène, dans les deux cas présentés ici, correspond à un régime transitoire qui disparaît au bout de quelques constantes de temps. Nous ne nous intéresserons qu'à l'évolution en régime sinusoïdal forcé, après la fin du régime transitoire.
L'étude du régime sinusoïdal forcé se fait en utilisant **la notation complexe**.

1. La solution particulière, en régime sinusoïdal forcé, est à chercher sous la forme d'une fonction sinusoïdale, de même pulsation que le second membre : $y(t) = Y_m\cos(\omega t + \varphi_s)$. Les inconnues à déterminer sont l'amplitude Y_m et φ_s.
2. Utiliser la notation complexe :
   - $A\cos(\omega t + \varphi_e) \longrightarrow Ae^{j(\omega t+\varphi_e)} = \underline{A}e^{j\omega t}$, avec $\underline{A} = Ae^{j\varphi_e}$, l'amplitude complexe.
   - $Y_m\cos(\omega t + \varphi_s) \longrightarrow Y_m e^{j(\omega t+\varphi_s)} = \underline{Y_m}e^{j\omega t}$, avec $\underline{Y_m} = Y_m e^{j\varphi_s}$, l'amplitude complexe de y.
3. Passer l'équation différentielle en notation complexe en utilisant le fait que dériver en notation complexe revient à multiplier par $j\omega$:

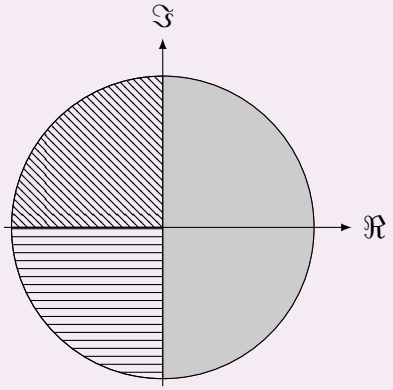
   $$\underline{\dot{y}} = j\omega \times \underline{y} \quad \text{et} \quad \underline{\ddot{y}} = -\omega^2 \times \underline{y}$$

   Les équations différentielles deviennent alors des équations en $\underline{Y_m}$:

   $$j\omega\underline{Y_m}e^{j\omega t} + \frac{1}{\tau}\underline{Y_m}e^{j\omega t} = \underline{A}e^{j\omega t} \quad \text{ou} \quad -\omega^2\underline{Y_m}e^{j\omega t} + \frac{\omega_0}{Q}j\omega\underline{Y_m}e^{j\omega t} + \omega_0^2\underline{Y_m}e^{j\omega t} = \underline{A}e^{j\omega t}$$

4. Isoler l'amplitude complexe $\underline{Y_m}$.
5. L'amplitude Y_m s'en déduit en calculant le module de $\underline{Y_m}$: $Y_m = \left|\underline{Y_m}\right|$
6. La phase φ_s se détermine en calculant l'argument de $\underline{Y_m}$: $\varphi_s = \arg(\underline{Y_m})$

Attention – Erreur à ne pas commettre

Attention, pour déterminer l'argument d'un nombre complexe ($\underline{z} = a + jb$), il est nécessaire de déterminer l'intervalle auquel il appartient en étudiant les signes de sa partie réelle et imaginaire.

- Si $\Re(\underline{z}) = a > 0$, alors $\arg(\underline{z}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ( ).
  Alors $\arg(\underline{z}) = \arctan\left(\frac{\Im(\underline{z})}{\Re(\underline{z})}\right)$
- Si $\Re(\underline{z}) = a < 0$, alors $\arg(\underline{z}) \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
  - Si $\Im(\underline{z}) = b > 0$, alors $\arg(\underline{z}) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ( )
    Alors $\arg(\underline{z}) = \arctan\left(\frac{\Im(\underline{z})}{\Re(\underline{z})}\right) + \pi$
  - Si $\Im(\underline{z}) = b < 0$, alors $\arg(\underline{z}) \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ ( )
    Alors $\arg(\underline{z}) = \arctan\left(\frac{\Im(\underline{z})}{\Re(\underline{z})}\right) - \pi$