Classe de PCSI

Cours de physique

Année 2023-2024

Fiches Bilan

Thème II. Mouvements et interactions
Mécanique

Chapitre n°12. Description et repérage du mouvement du point matériel

Chapitre n°13. Dynamique du point matériel

Chapitre n°14. Approche énergétique du mouvement du point matériel

Chapitre n°15. Mouvement de particules chargées dans un champ électrique ou magnétique

Chapitre n°16. Théorème du moment cinétique pour le point matériel

Chapitre n°17. Mouvement à force centrale

Chapitre n°18. Mouevment d'un solide

CAMILLE VERNET

Collège • Lycée • Cpge

Chapitre n°12 Description et repérage du mouvement du point matériel

Cadre de la mécanique classique

- En mécanique classique, le **temps est absolu**, et le **mouvement est relatif.**
- La vitesse des systèmes étudiés est très inférieure à celle de la vitesse dans le vide (au-delà : relativité)
- La taille des systèmes étudiés est très supérieure à celle d'un atome ($d \gg \lambda_{dB}$) (sinon : mécanique quantique)

Référentiels

Un référentiel $\mathscr{R}$ est défini par la donnée d'un repère d'espace (une origine d'espace, 3 directions fixes) et de temps (une origine des temps, une horloge).

Élements cinématiques

- **Vecteur position** : $\overrightarrow{OM}$, avec O un point fixe du référentiel $\mathscr{R}$ d'étude.
- **Vecteur déplacement élémentaire** : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)$
  Il est tangent à chaque instant à la trajectoire de M.
- **Vecteur vitesse de M à t dans $\mathscr{R}$** : $\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R}) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}}$.
  Il est tangent à chaque instant à la trajectoire de M.
- **Vecteur accélération de M à t dans $\mathscr{R}$** : $\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R}) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{/\mathscr{R}}$.
  Il est dirigé à tout instant vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire (si la trajectoire n'est pas rectiligne !)

Quelques mouvements particuliers

- **Mouvement rectiligne** : la trajectoire est une droite, alors $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ gardent la même direction.
- **Mouvement circulaire** : la trajectoire est un cercle.
- **Mouvement uniforme** : la **NORME** du vecteur vitesse est une constante.
  $\|\overrightarrow{v}\| = \text{cst} \Rightarrow \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{v}$ son orthogonaux (sauf si l'un des deux est nul).

Mouvement UNIFORME $\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{v}\right\| = \text{cste}$
MAIS
le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ N'est PAS CONSTANT
et le vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ N'est PAS NUL.

- **Mouvement rectiligne uniforme** : la norme, la direction et le sens du vecteur vitesse sont constants, donc le vecteur vitesse est constant, donc le vecteur accélération est nul (c'est l'unique cas !).
- **Mouvement accéléré** : la norme du vecteur vitesse augmente.
  $\|\overrightarrow{v}\| \nearrow \Rightarrow \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} > 0$: les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ sont dans le même sens.
- **Mouvement décéléré** : la norme du vecteur vitesse diminue.
  $\|\overrightarrow{v}\| \searrow \Rightarrow \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} < 0$: les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ sont de sens opposés.

NE PAS CONFONDRE :

- vecteur (direction, sens, norme) : $\overrightarrow{F}$
- composantes du vecteur (nombre algébrique) :
  F_x, F_y tq $\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{u_x} + F_y\overrightarrow{u_y} + \dots$
- norme du vecteur (nombre positif) : $\left\|\overrightarrow{F}\right\|$

HOMOGÉNÉITÉ

$\overrightarrow{\text{vecteur}} = \overrightarrow{\text{vecteur}}$ $\text{scalaire} = \text{scalaire}$

Ce qu'il faut savoir faire

- Établir les expressions des composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
  Pour les coordonnées cartésiennes : c'est très simple ! et vous maitrisez depuis la Terminale.
  Pour les coordonnées cylindriques :
  Faire très attention aux vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ qui ne sont pas constants, et qu'il faut donc dériver, pour cela. Pour commencer il faut les exprimer dans la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$, puis calculer la dérivée.
  Pour le reste des calculs de dérivées, il faut utiliser la formule de la dérivée d'un produit.
- Exprimer, à partir d'un schéma, le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé, et en déduire les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- **Choisir le système de coordonnées adapté au problème posé.**
- Mouvement de vecteur accélération constant :
  - Exprimer la vitesse et la position en fonction du temps. *Par intégration du vecteur-accélération.*
  - Obtenir la trajectoire en coordonnées cartésiennes. *Isoler t dans une des deux équations horaires (la plus simple) et l'injecter dans l'autre équation horaire.*
- Mouvement circulaire uniforme et non uniforme :
  - Exprimer les composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération en coordonnées polaires planes. *Partir de l'expression du vecteur-position en coordonnées polaires, la dériver une première fois pour obtenir le vecteur-vitesse, puis la dériver une deuxième fois pour obtenir le vecteur-accélération.*
  - Identifier les liens entre les composantes du vecteur-accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur-vitesse et sa variation temporelle.
  - Situer qualitativement la direction du vecteur-accélération dans la concavité d'une trajectoire plane.

Méthodes

❑ **Comment calculer le vecteur vitesse et le vecteur accélération à partir des équations horaires ?**
À partir des équations horaires en cartésiennes ou en cylindriques on obtient les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération par dérivations successives, suivants les formules du cours.

$$\begin{tikzcd}
\overrightarrow{OM} \arrow[r, shift left, "\left(\frac{\mathrm{d}\bullet}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}}"] \arrow[rr, bend left, "(2)"] & \vec{v}(M/\mathscr{R}) \arrow[l, shift left, "\left(\int \bullet \mathrm{d}t\right)+CI"] \arrow[r, shift left, "\left(\frac{\mathrm{d}\bullet}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}}"] & \vec{a}(M/\mathscr{R}) \arrow[l, shift left, "\left(\int \bullet \mathrm{d}t\right)+CI"] \arrow[ll, bend left, "(1)"]
\end{tikzcd}$$

❑ **Comment déterminer les équations horaires cartésiennes à partir de l'accélération ?**
On considère un point en mouvement dont on connaît le vecteur accélération, ainsi que les conditions initiales : vecteurs vitesse et position à la date $t = 0$. On cherche à déterminer ses équations horaires.

— On déterminer les composantes, à chaque instant, du vecteur vitesse de M par intégration des composantes du vecteur accélération. Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions initiales sur le vecteur vitesse.

— On déterminer les composantes, à chaque instant, du vecteur position de M par intégration des composantes du vecteur vecteur. Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions initiales sur le vecteur position.

— Cette méthode n'est pas utilisable dans les autres systèmes de coordonnées, car on utilise ici le fait que les vecteurs unitaires cartésiens sont des constantes.

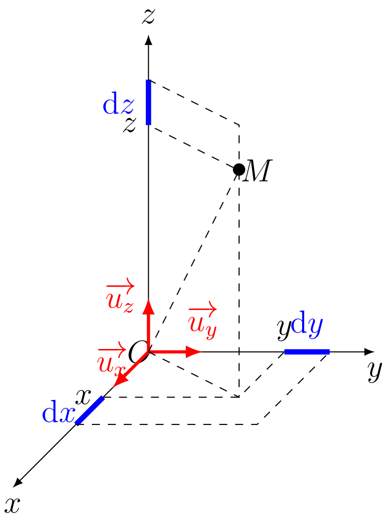
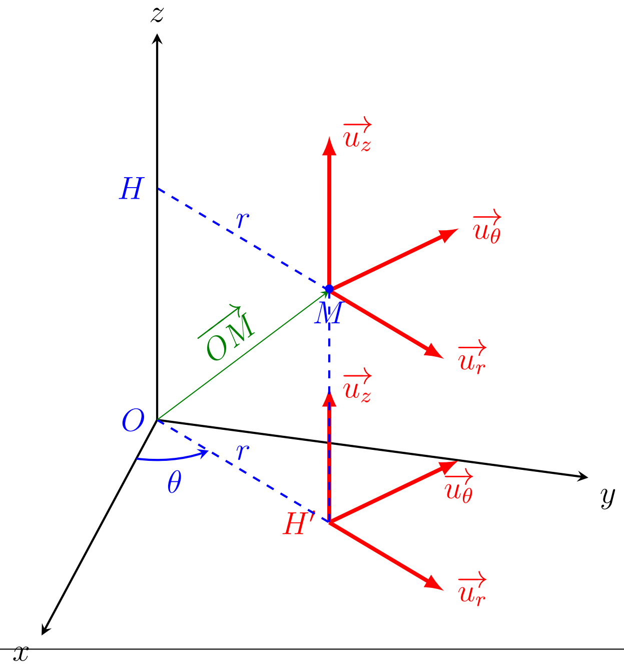
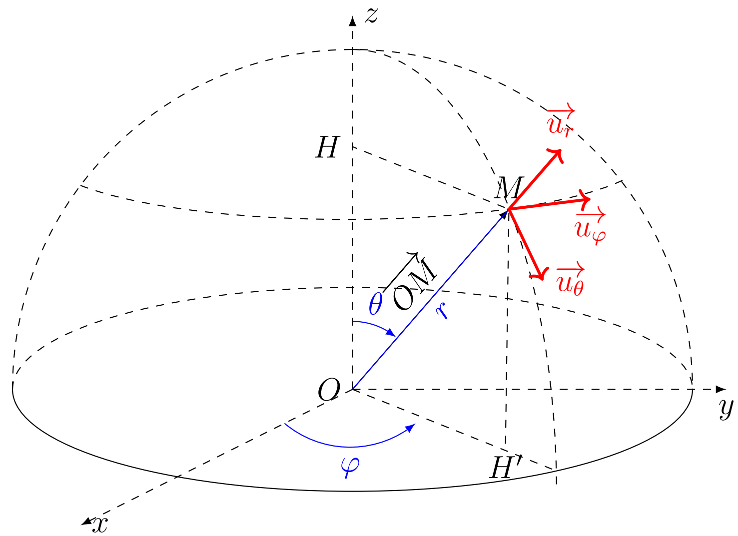
❑ **Comment déterminer les équations cartésiennes de la trajectoire à partir des équations horaires ?**
Dans l'espace, il faut non pas une mais deux équations cartésiennes pour décrire une courbe.

— Pour les courbes planes auxquelles nous nous limiterons, l'une des équations est celle du plan contenant la trajectoire. Il s'agit souvent d'un plan simple à décrire, parallèle à l'un des trois plans de base du repère.

— Pour déterminer l'équation cartésienne de la courbe dans ce plan, il faut éliminer la variable temps entre les différentes équations horaires.

C'est ce que l'on fait, notamment, lorsqu'on étudie le mouvement parabolique dans le champ de pesanteur.

Systèmes de coordonnées

	Système cartésien	Système cylindrique	Système sphérique
Définition			
Coordonnées de M	(x, y, z)	(r, θ, z)	(r, θ, φ)
Vecteur position	$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$	$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$	$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$
Vecteur déplacement élémentaire	$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$	$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$	$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$
Vecteur vitesse	$\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R}, t) = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$	$\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R}, t) = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$	
Vecteur accélération	$\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R}, t) = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$	$\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R}, t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$	

Chapitre n°13 Dynamique du point matériel

Lois de Newton

- **Principe d'inertie - Référentiel galiléen**
  Il existe une classe privilégiée de référentiels, appelés **référentiels galiléens**, dans lesquels un point matériel isolé ou pseudo-isolé persévère dans un mouvement rectiligne uniforme.
  Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.
- **Principe des actions réciproques** Soient deux corps A et B en interaction :
  - le corps A exerce sur B la force $\overrightarrow{F_{A\to B}}$;
  - le corps B exerce sur A la force $\overrightarrow{F_{B\to A}}$.

  Les forces $\overrightarrow{F_{A\to B}}$ exercée par A sur B et $\overrightarrow{F_{B\to A}}$ exercée par B sur A
  — sont portées par la droite (AB) : $\overrightarrow{F_{B\to A}} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$;
  — sont opposées : $\overrightarrow{F_{B\to A}} = -\overrightarrow{F_{A\to B}}$
- **Quantité de mouvement d'un point matériel**
  La **quantité de mouvement** d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ est définie par : $\overrightarrow{p(M/\mathscr{R})} = m\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$.
  $\left\|\overrightarrow{p(M/\mathscr{R})}\right\|$ s'exprime en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
- **Principe fondamental de la dynamique pour le point matériel**
  Soit un point matériel M de masse m dont on étudie le mouvement dans le référentiel $\mathscr{R}_g$ supposé galiléen à l'échelle de l'expérience et qui est soumis à des actions mécaniques extérieures de résultantes $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$.
  Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :
  $$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p(M/\mathscr{R}_g)}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}_g} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$$
  Pour un système fermé de masse m constante, on peut l'écrire :
  $$m\overrightarrow{a(M/\mathscr{R}_g)} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$$
- La **quantité de mouvement d'un solide** de masse m de centre d'inertie G s'écrit :
  $$\overrightarrow{p}(\mathcal{S}/\mathscr{R}) = m\,\overrightarrow{v}(G/\mathscr{R})$$
  Le PFD s'écrit alors
  $$m\,\overrightarrow{a}(G/\mathscr{R}) = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$$

Actions mécaniques

- Le **poids de l'objet de masse m** s'écrit $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$, avec $\overrightarrow{g}$ le vecteur champ de pesanteur terrestre.
  Le poids a les caractéristiques suivantes :
  — s'exerce au centre d'inertie de l'objet de masse m
  — dirigé selon la verticale du lieu considéré ;
  — vers le centre de la Terre ;
  — de norme mg,
  avec à la surface de la Terre, $g = \dfrac{GM_T}{R_T^2} = 9,8\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ (on peut considérer g homogène jusqu'à des altitudes de quelques kilomètres).
- **Poussée d'Archimède**
  Tout corps au repos ou en mouvement dans un fluide subit de la part de ce fluide une action mécanique : la **poussée d'Archimède** qui possède les caractéristiques suivantes :

- point d'application : centre de masse du fluide déplacé (centre de masse du fluide qui occuperait la place du corps s'il n'était pas là)
- direction : verticale du lieu considéré (droite passant par le point d'application et le centre de la Terre)
- sens : du centre de la Terre vers le point d'application (« vers le haut »)
- norme : égale au poids du fluide déplacé : $\left\|\overrightarrow{\Pi_A}\right\| = m_{\text{fluide déplacé}}g$

Ainsi la **poussée d'Archimède est opposée au poids du fluide déplacé** : $\overrightarrow{\Pi_A} = -m_{\text{fluide déplacée}}\overrightarrow{g}$. Dans le cas où le fluide est homogène (corps uniquement dans l'eau, ou dans l'air, et pas entre deux fluides), la poussée d'Archimède s'écrit : $\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{\text{fluide}}V_{\text{fluide déplacé}}\overrightarrow{g}$

- **Force de rappel élastique**

  La force de rappel élastique exercée par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 s'écrit :

  $$\boxed{\overrightarrow{f_{\text{élastique}}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u}}$$

  avec $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire dirigé dans le sens d'allongement du ressort.

- **Tension du fil**

  Un fil, infiniment souple, tendu, exerce sur un objet accroché à une de ses extrémités une force de contact, appelée **tension du fil** et notée $\overrightarrow{T}$, dont les caractéristiques sont :

  - Direction : celle du fil ;
  - Sens : d'une extrémité du fil vers l'autre ;
  - Norme : inconnue, elle dépend des autres forces.

    Pour un fil idéal, inextensible et de masse négligeable, la norme $\left\|\overrightarrow{T}\right\|$ est uniforme le long du fil.

  Si le fil n'est pas tendu, la tension est nulle.

Ce qu'il faut savoir faire

- ❏ Établir un bilan des forces sur un système, ou plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur une figure.
- ❏ Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel à l'aide du principe fondamental de la dynamique.
- ❏ Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme : Mettre en équation le mouvement sans frottement et le caractériser comme un mouvement à vecteur-accélération constant.
- ❏ Influence de la résistance de l'air. Exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats fournis par un logiciel d'intégration numérique.
- ❏ Proposer un protocole expérimental de mesure de frottements fluides (cf TD n°10).
- ❏ Pendule simple. Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire. Établir l'équation du portrait de phase (intégrale première) dans ce cadre et le tracer.
- ❏ Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.

Chapitre n°14 Approche énergétique du mouvement du point matériel

Puissance et travail

- Le **travail élémentaire** de la force $\overrightarrow{f}$ subie par un point matériel dans le référentiel $\mathscr{R}$ lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est défini par

$$\delta W\left(\overrightarrow{f}\right) = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Le travail s'exprime en Joule (J).

- Le **travail** de la force $\overrightarrow{f}$ lors du déplacement d'un point M du point A (instant t_A) vers un point B (instant t_B) :

$$W_{A\to B}\left(\overrightarrow{f}\right) = \int_{M\in \text{chemin} A\to B} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Le travail dépend (a priori) du chemin suivi pour aller du point A au point B

- La **puissance** de la force $\overrightarrow{f}$ subie par un point matériel dans le référentiel $\mathscr{R}$ est définie par

$$\mathscr{P}\left(\overrightarrow{f}\right) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$$

La puissance s'exprime en Watt (W).
On a la relation $\delta W\left(\overrightarrow{f}\right) = \mathscr{P}\left(\overrightarrow{f}\right)\mathrm{d}t$

- Une force est **motrice** si $\mathscr{P}\left(\overrightarrow{f}\right) > 0 \Leftrightarrow \delta W(\overrightarrow{f}) > 0$.

Une force est **résistante** si $\mathscr{P}\left(\overrightarrow{f}\right) < 0 \Leftrightarrow \delta W(\overrightarrow{f}) < 0$.

Une force pour laquelle $\mathscr{P}\left(\overrightarrow{f}\right) = 0 \Leftrightarrow \delta W(\overrightarrow{f}) = 0$ ne travaille pas.

Énergie cinétique

- L'**énergie cinétique** d'un point matériel de masse m dans le référentiel $\mathscr{R}$:

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}m\left\|\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}\right\|)^2$$

- **Théorème de la puissance cinétique** en référentiel galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}\left(\overrightarrow{F}\right)$$

avec $\mathscr{P}\left(\overrightarrow{F}\right)$ la puissance de résultante des forces (=somme des puissances des différentes forces qui s'exercent sur M).

- **Loi de l'énergie cinétique** en référentiel galiléen lors du déplacement de M depuis le point A (instant t_A) vers un point B (instant t_B) :

$$\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c = W_{A\to B}\left(\overrightarrow{F}\right)$$

avec $\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c = \mathscr{E}_c(B) - \mathscr{E}_c(A)$ et $W_{A\to B}\left(\overrightarrow{F}\right)$ la somme des travaux des forces qui s'exercent sur M

Force conservative et énergie potentielle

- Une **force est conservative** ssi son travail sur le trajet AB ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B.
Une **force est conservative** ssi il existe une fonction, appelée **énergie potentielle** et notée $\mathscr{E}_p$ telle que

$$\delta W\left(\overrightarrow{f}\right) = -\mathrm{d}\mathscr{E}_p$$

Elle est définie à une constante additive près.
Au cours du déplacement de M du point A vers le point B nous avons la relation

$$W_{A\to B}\left(\overrightarrow{f}\right) = -\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_p = -\left(\mathscr{E}_p(B) - \mathscr{E}_p(A)\right)$$

- **Énergie potentielle de pesanteur** :

$$\mathscr{E}_{pp} = -m\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{OM} + \text{cste}$$

Si l'axe (Oz) est vertical ascendant, alors $\mathscr{E}_{pp} = mgz + \text{cste}$.
Si l'axe (Oz) est vertical descendant, alors $\mathscr{E}_{pp} = -mgz + \text{cste}$

- **Énergie potentielle élastique** :

$$\mathscr{E}_{p,\acute{e}l} = \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2 + \text{cste}$$

■ L'**énergie mécanique** d'un point matériel est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles associées aux forces conservatives auxquelles sont soumises le point matériel : $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p$

L'**énergie mécanique se conserve** ssi le point matériel n'est **soumis qu'à des forces conservatives** et à des forces qui ne travaillent pas (aucune force non conservative).

L'énergie mécanique ne se conserve pas si le point matériel est soumis à des forces non conservatives.

■ **Mouvement conservatif à une dimension**

Mouvement conservatif : $\mathscr{E}_m$ **est constante, sa valeur est fixée par les conditions initiales** $x(0)$ et $\dot{x}(0)$.

À 1 dimension : une seule variable d'espace est nécessaire pour décrire le mouvement (x ou θ ou ...).

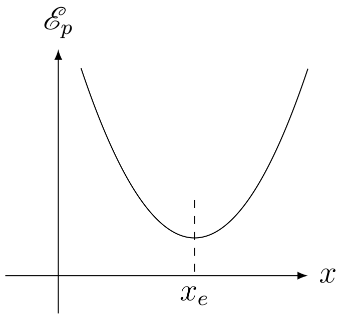
On note $\overrightarrow{F} = F(x)\overrightarrow{u_x}$ la résultante des forces conservatives, et $\mathscr{E}_p(x)$ l'énergie potentielle associée, telle que $\delta W(\overrightarrow{F}) = -\mathrm{d}\mathscr{E}_p$. Alors :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{u_x}$$

- Un point matériel d'énergie mécanique $\mathscr{E}_m$ ne peut accéder qu'aux positions x pour lesquelles l'énergie potentielle est telle que : $\mathscr{E}_p(x) \leq \mathscr{E}_m$.
  À partir du graphe de l'énergie potentielle en fonction de x, en reportant la valeur de l'énergie mécanique (en traçant une droite horizontale), vous pouvez déterminer les positions accessibles par M.
- Le point matériel M est **à l'équilibre** en x_e si, déposé en ce point sans vitesse, il reste en ce point.
  La position x_e correspond à un extremum de l'énergie potentielle : $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x}(x_e) = 0$.

- **Équilibre stable** : quand on écarte un point M de sa position d'équilibre, il apparaît une force qui tend à ramener M vers sa position d'équilibre initiale.

  L'énergie potentielle est minimale en x_e.



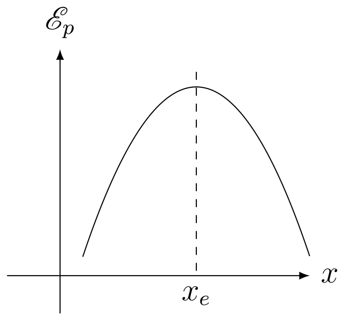
Cela se traduit par :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x}(x_e) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e) > 0$$

Équilibre instable : quand on écarte un point M de sa position d'équilibre, il apparaît une force qui tend à éloigner davantage M de sa position d'équilibre initiale.

Dans ce cas, l'énergie potentielle est maximale en x_e.



Cela se traduit par :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x}(x_e) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e) < 0$$

- Au **voisinage d'une position d'équilibre stable**, l'énergie potentielle peut être approximée par (formule de Taylor-Young)

$$\mathscr{E}_p(x) \approx \mathscr{E}_p(x_e) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e)(x - x_e)^2$$

qui est similaire à l'énergie potentielle élastique avec $k = \dfrac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e)$.

Le mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable est harmonique (sinusoïdal) et s'identifie à celui d'un **oscillateur harmonique**.

Ce qu'il faut savoir faire

- Utiliser la loi de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique en référentiel galiléen. Choisir la loi adaptée au contexte. *Vous devez savoir choisir la loi adaptée :*
  - *Établir l'équation différentielle du mouvement (mouvement à 1D) : LPC*
  - *Déterminer une vitesse en un point particulier, une distance d'arrêt, . . . : LEC*
- Établir les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique.
  - *Exprimer le travail élémentaire de la force dont on souhaite déterminer une énergie potentielle.*
  - *Chercher $\mathscr{E}_p$ telle que $\delta W = -\mathrm{d}\mathscr{E}_p$: vous prouvez alors la nature conservative de la force, et vous en déterminez une énergie potentielle.*
- Distinguer les forces conservatives et les forces non conservatives. Reconnaître les cas de conservation et de non conservation de l'énergie mécanique.
- Sur le graphe de l'énergie potentielle pour un problème conservatif à une dimension :
  - déduire le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle ;
    Partir du fait que $\mathscr{E}_c \geq 0$, qui impose que les positions accessibles sont celles pour lesquelles $\mathscr{E}_m \geq \mathscr{E}_(x)$.
  - déduire l'existence de positions d'équilibre et leur nature stable ou instable ;
- Établir l'équation du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable et l'identifier au modèle de l'oscillateur harmonique.
  - *Écrire le développement de Taylor-Young de l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre stable x_e. Simplifier compte tenu du fait que x_e est un équilibre.*
  - *Utiliser la conservation de l'énergie mécanique : $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$, et en déduire l'équation différentielle du mouvement.*
  - *Identifier avec l'oscillateur harmonique et en déterminer la pulsation propre.*

.

Chapitre n°15 Mouvement de particules chargées dans un champ électrique ou magnétique

Mouvement dans un champ électrique

- Une particule chargée de charge électrique q soumise à un champ électrique $\overrightarrow{E}$ subit une action mécanique, modélisée par la **force de Lorentz** :

$$\boxed{\overrightarrow{f_E} = q\overrightarrow{E}}$$

avec q en Coulomb (C) et E en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$.

- **Ordres de grandeur de champs électriques :**

Dispositif	Valeur du champ
Tube fluorescent	$10 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$
Atmosphère par temps clair	$10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$
Atmosphère par temps orageux	$10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$
Champ disruptif de l'air (foudre)	$3.10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$
Vu par l'électron dans un atome	$10^{12} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

Le poids des particules chargées (électron, proton, ...) est négligeable devant la force de Lorentz.

- Une particule chargée en mouvement dans un champ électrique uniforme et permanent a un **vecteur accélération constant**.
- La trajectoire de la particule chargée est parabolique ($\overrightarrow{v_0}$ incliné par rapport à $\overrightarrow{E}$) ou rectiligne ($\overrightarrow{v_0}$ colinéaire à $\overrightarrow{E}$).
- La force électrostatique ($\overrightarrow{E}$ uniforme et permanent) est une **force conservative** qui dérive de l'**énergie potentielle électrostatique**

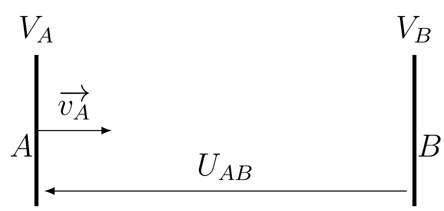
$$\mathscr{E}_{p,e} = qV$$

où V est le potentiel électrostatique.

- Une **particule chargée peut être accélérée entre** A **et** B **par une différence de potentiel** U_{AB} :

$$\Delta_{A\to B}\mathscr{E}_c = -q(V_b - V_A) = q(V_A - V_B) = qU_{AB}$$

La particule est accélérée ssi $q\ U_{AB} > 0$.



Mouvement dans un champ magnétique

- Une particule chargée de charge électrique q soumise à un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ (créés par un environnement extérieur) subit une action mécanique, modélisée par la **force de Lorentz** (dans le référentiel $\mathscr{R}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{f_B} = q\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})} \wedge \overrightarrow{B}}$$

avec q en Coulomb (C) ; v en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et B en Tesla (T)

- **Ordres de grandeur de champs magnétiques :**

Dispositif	Valeur du champ
À la surface de la Terre	5.10^{-5} T
Aimant permanent usuel	0,1 T à 1 T
Bobines pour IRM	3 T

Le poids des particules chargées (électron, proton, ...) est négligeable devant la force de Lorentz.

- **Puissance de la force de Lorentz**
Un champ magnétique ne peut pas modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée, car la force magnétique ne travaille pas.
- **Le mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique uniforme et permanent est nécessairement uniforme.**
Le champ magnétique peut uniquement dévier la trajectoire d'une particule chargée.

- On admet, que lorsque la particule chargée entre dans la zone où règne le champ magnétique avec un vecteur vitesse perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$, le **mouvement est circulaire**.
- Le PFD appliqué à la particule chargée permet d'établir le **rayon de la trajectoire** :

$$m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \Rightarrow -mR\dot{\theta}^2 = qR\dot{\theta}B \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{qB}{m} \Rightarrow R = \frac{v_0}{|\dot{\theta}|} = \frac{mv_0}{|q|B}$$

Applications

- **Spectromètre de masse** : un champ électrique permet d'accélérer des ions (isotopes du même élément en général), qui sont ensuite déviés par un champ magnétique. La vitesse en sortie de la zone accélératrice dépend de la masse de l'ion, et le rayon de la trajectoire circulaire également, ce qui permet de séparer les ions en fonction de leurs masses, afin de réaliser une datation (Carbone 14 par ex.), d'enrichir l'uranium.
- **Accélérateurs de particules** : accélérateurs linéaires (champ électrique uniquement), synchrotron et cyclotron (le champ électrique permet d'accélérer les particules, tandis que le champ magnétique permet d'incurver la trajectoire et ainsi faire passer les particules plusieurs fois par les zones accélératrices).

Ce qu'il faut savoir faire

- ❏ Établir et comparer les ordres de grandeur des forces électrique, magnétique et le poids des particules chargées.
- ❏ Montrer que le champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée.
- ❏ Montrer que le champ magnétique ne peut pas modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée.
- ❏ Établir l'équation de la trajectoire d'une particule chargée plongée dans un champ électrique. La caractériser par un vecteur accélération constant.
- ❏ Montrer que la force électrostatique est conservative et en établir l'énergie potentielle.
- ❏ Établir l'expression de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
- ❏ Établir le rayon de la trajectoire circulaire d'une particule chargée dans un champ magnétique.

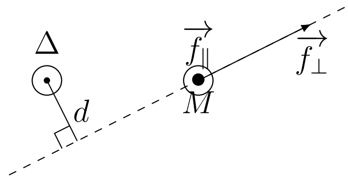
Chapitre n°16 Théorème du moment cinétique pour le point matériel

Chapitre n°18 Mécanique du solide

- Un **solide** est un système matériel indéformable dont les points restent à distance constante les uns des autres : $\forall\ A,\ B \in$ solide $AB =$ cste
- **Mouvement de translation**
  - Un solide $\mathcal{S}$ est en **translation** par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ lorsque les directions du repère lié au solide restent fixes par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ d'étude.
    Autrement dit : Le solide est en translation ssi $\forall(A, B) \in$ solide , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est constant au cours du mouvement.
  - Tous les points d'un solide décrivent la même trajectoire, ils ont même vecteur vitesse et même vecteur accélération.
  - Tous les points d'un solide en **translation rectiligne** dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude décrivent des trajectoires rectilignes parallèles entre elles dans $\mathscr{R}$.
  - Tous les points d'un solide en **translation circulaire** dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude décrivent des trajectoires circulaires dans $\mathscr{R}$ de même rayon mais dont les centres sont décalés les uns par rapport aux autres.
- **Mouvement de rotation**
  - Un solide a un mouvement de **rotation autour d'un axe fixe** par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ si les points liés rigidement au solide et situés sur cet axe à un instant quelconque sont fixes par rapport à $\mathscr{R}$ et au solide.
  - Les points d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ décrivent des cercle de même axe (Δ) et de rayons différents.
- **Comment reconnaître la nature du mouvement d'un solide $\mathcal{S}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$?**
  Prendre deux points A et B du solide $\mathcal{S}$ étudié.
  - Si $\forall A, B \in \mathcal{S}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur constant au cours du mouvement, alors le solide $\mathcal{S}$ est en translation dans le référentiel $\mathscr{R}$.
    - Si la trajectoire de A (et B) est rectiligne, il s'agit d'une **translation rectiligne**.
    - Si A et B décrivent un cercle de même rayon et de centres différents, il s'agit d'une **translation circulaire**.
  - Si A et B ont un mouvement circulaire de même centre (et de rayons a priori différents) alors $\mathcal{S}$ est en rotation dans le référentiel $\mathscr{R}$ et l'axe de rotation passe par le centre commun des cercles.
- **Actions mécaniques dans un solide en rotation autour d'un axe fixe**
  - Un **couple** est un ensemble de forces de résultante nulle, mais de moment total non nul. Par abus de langage, « couple » désignera souvent le moment total, qui sera noté $\overrightarrow{\Gamma}$.
  - Une **liaison pivot** d'axe Δ entre deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est une liaison n'autorisant qu'une rotation de $\mathcal{S}_2$ par rapport à $\mathcal{S}_1$ autour d'un seul axe Δ, fixe par rapport à $\mathcal{S}_1$.
  - La **liaison pivot d'axe Δ est parfaite** si le moment scalaire de l'action de contact entre les deux solides par rapport à l'axe Δ est nul : $\mathscr{M}_\Delta(\text{liaison pivot parfaite}) = 0$
- Un **dispositif rotatif** est un dispositif dans lequel un solide indéformable appelé **rotor** est en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un solide immobile appelé **stator**.

Ce qu'il faut savoir faire

- ❏ Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.
- ❏ Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et à la vitesse angulaire.
- ❏ Établir l'expression de la quantité de mouvement d'un système restreint au cas de deux points sous la forme $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}(G)$.
- ❏ Déterminer les équations du mouvement du centre d'inertie d'un système fermé.
- ❏ Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
- ❏ Exploiter la relation pour le solide entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
- ❏ Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition de la masse.
- ❏ Exprimer le moment d'une force à l'aide du bras de levier.
  1. Déterminer, à l'aide d'un schéma, le bras de levier d, c'est-à-dire la distance entre la droite d'action de la force et l'axe orienté Δ.
  2. Calculer la valeur absolue du moment $\left|\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right)\right| = \left\|\overrightarrow{f}\right\| \times d$, avec d le bras de levier.
  3. Déterminer le signe de $\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right)$:
     — si $\overrightarrow{f}$ fait tourner dans le sens direct par rapport à l'axe orienté Δ : $\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right) = +d \times \left\|\overrightarrow{f}\right\|$
     — si $\overrightarrow{f}$ fait tourner dans le sens indirect par rapport à l'axe orienté Δ : $\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right) = -d \times \left\|\overrightarrow{f}\right\|$

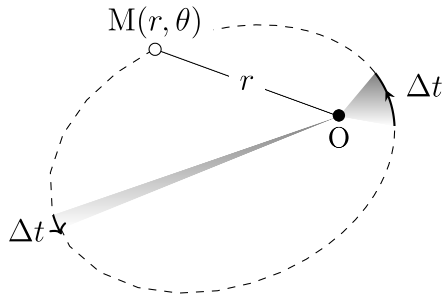


- ❏ Étudier le pendule pesant : mettre en équation, la résoudre dans le cas des petits angles, établir une intégrale première du mouvement, lire et interpréter le portrait de phase.
- ❏ Étudier le pendule de torsion : mettre en équation, la résoudre, établir une intégrale première du mouvement.
- ❏ Utiliser la relation $\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2$.
- ❏ Utiliser la loi de l'énergie cinétique pour un système déformable en prenant en compte le travail des forces intérieures. Mener le bilan énergétique du tabouret d'inertie.

	Point matériel $M(m)$	Système mécanique $\mathcal{S} = \{M_i(m_i)\}_{i\in[1,N]}$	Solide en **translation**	Solide **en rotation autour d'un axe fixe Δ**
		de masse totale m et de centre de masse G tel que $\forall\ A$, $m\overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{AM_i} \Leftrightarrow \vec{0} = \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{GM_i}$		
Quantité de mouvement	$\vec{p}(M) = m\vec{v}(M)$	$\vec{p}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}(M_i) = m\vec{v}(G)$		
Loi de la quantité de mouvement	$\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}(M)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}$	$\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \Rightarrow m\overrightarrow{a_{(G)}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$: permet l'étude du mouvement de G		
Moment cinétique par rapport à O	$\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)$	$\overrightarrow{L_O}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{v}(M_i)$		
Moment cinétique par rapport à $\Delta = (O;\overrightarrow{u_\Delta})$	$L_\Delta(M) = \overrightarrow{L_O}(M) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$	$L_\Delta(\mathcal{S}) = \overrightarrow{L_O}(\mathcal{S}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$		$L_\Delta = J_\Delta\omega$, avec J_Δ moment d'inertie par rapport à Δ
Moment d'une force par rapport à O	$\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$	$\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_{\text{ext}\to i}}$: pas de simplification dans le cas général Cas du poids : $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(m\vec{g}) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}$		
Théorème du moment cinétique par rapport à O fixe	$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\vec{F})$	$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathscr{M}_O^{\text{ext}}}$		
Théorème du moment cinétique par rapport à $\Delta = (O;\overrightarrow{u_\Delta})$ fixe	$\dfrac{\mathrm{d}L_\Delta(M)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{F})$	$\dfrac{\mathrm{d}L_\Delta(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}}$		$J_\Delta\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}}$
Énergie cinétique	$\mathscr{E}_c(M) = \dfrac{1}{2}mv^2(M)$	$\mathscr{E}_c(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{2}m_iv^2(M_i)$	$\mathscr{E}_c(\mathcal{S}) = \dfrac{1}{2}m(v(G))^2$	$\mathscr{E}_c(\mathcal{S}) = \dfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = \dfrac{1}{2}L_\Delta\omega$
Puissance d'une force	$\mathscr{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}(M)$		$\mathscr{P}^{\text{ext}} = \left(\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_{\text{ext}\to i}}\right) \cdot \overrightarrow{v(G)}$ $\mathscr{P}^{\text{int}} = 0$ (solide)	$\mathscr{P}^{\text{ext}} = \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}} \times \omega$ $\mathscr{P}^{\text{int}} = 0$ (solide)
Travail d'une force	$\mathcal{W}_{AB}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$		$W_{AB}^{\text{ext}} = \int_A^B \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_{\text{ext}\to i}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OG}$ $\mathcal{W}^{\text{int}} = 0$ (solide)	$\mathcal{W}_{AB}^{\text{ext}} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathscr{M}_\Delta^{\text{ext}}\mathrm{d}\theta$ $\mathcal{W}^{\text{int}} = 0$ (solide)
Théorème de la puissance/l'énergie cinétique	$\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(M)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{F})$ $\Delta_{AB}\mathscr{E}_c(M) = \sum \mathcal{W}_{AB}(\vec{F})$	$\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}^{\text{ext}} + \sum \mathscr{P}^{\text{int}}$ $\Delta_{AB}\mathscr{E}_c(\mathcal{S}) = \sum \mathcal{W}_{AB}^{\text{ext}} + \sum \mathcal{W}_{AB}^{\text{int}}$	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}m(v(G))^2\right) = \sum \mathscr{P}^{\text{ext}}$ $\Delta_{AB}\mathscr{E}_c(\mathcal{S}) = \sum \mathcal{W}_{AB}^{\text{ext}}$	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2\right) = \sum \mathscr{P}^{\text{ext}}$ $\Delta_{AB}\mathscr{E}_c(\mathcal{S}) = \sum \mathcal{W}_{AB}^{\text{ext}}$

Chapitre n°17 Mouvement dans un champ de force centrale

Lois de Kepler



1ère loi de Kepler (1609) Les planètes du système solaire décrivent une orbite elliptique dont le soleil est l'un des foyers.

2ème loi de Kepler (1609) Les aires balayées par la ligne Soleil-planète pendant des intervalles de temps égaux sont égales.

3ème loi de Kepler (1619) Le carré de la période de révolution d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse qu'elle décrit

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$$

Force centrale

- Une **force** s'appliquant au point matériel M est dite **centrale**, lorsque sa droite d'action passe constamment par un point fixe O du référentiel $\mathscr{R}$. Le point fixe O est appelé **centre de force**.
- **Le moment cinétique du point M par rapport au centre de force O se conserve au cours du mouvement.**
- La conservation du moment cinétique a deux conséquences :
  — Le **mouvement du point M est plan** : il a lieu dans le plan contenant le centre de force O et perpendiculaire au moment cinétique par rapport à O. Le plan du mouvement est imposé par les conditions initiales $\overrightarrow{OM}(t=0)$ et $\overrightarrow{v}(t=0)$.
  — Le mouvement se fait selon la **loi des aires** : le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye des aires égales en des temps égaux. Constante des aires $\mathscr{C} = r^2\dot{\theta}$.

Interactions Newtoniennes

Force de gravitation entre deux masses ponctuelles $\{(O, m_O); (M, m)\}$	**Force électrostatique entre deux charges ponctuelles $\{(O, q_O); (M, q)\}$**
$\overrightarrow{F_{O\to M}} = -G\dfrac{m_O m}{OM^2}\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ avec $G = 6,67.10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2} la constante universelle de gravitation	$\overrightarrow{F_{O\to M}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_O q}{OM^2}\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ avec $\varepsilon_0 = 8,89.10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1} la permittivité absolue du vide
La force de gravitation est **toujours attractive.**	La force électrostatique est **attractive** si $q_O q < 0$ La force électrostatique est **répulsive** si $q_O q > 0$
$\mathscr{E}_{p,\text{grav}}(r) = -\dfrac{G m_O m}{r}$ avec $r = OM$	$\mathscr{E}_{p,\text{élec}}(r) = \dfrac{q_O q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ avec $r = OM$

- Les interactions Newtoniennes sont des **forces centrales conservatives**.
- L'étude du mouvement radial peut être fait en exprimant l'**énergie potentielle effective**, à l'aide des coordonnées polaires :

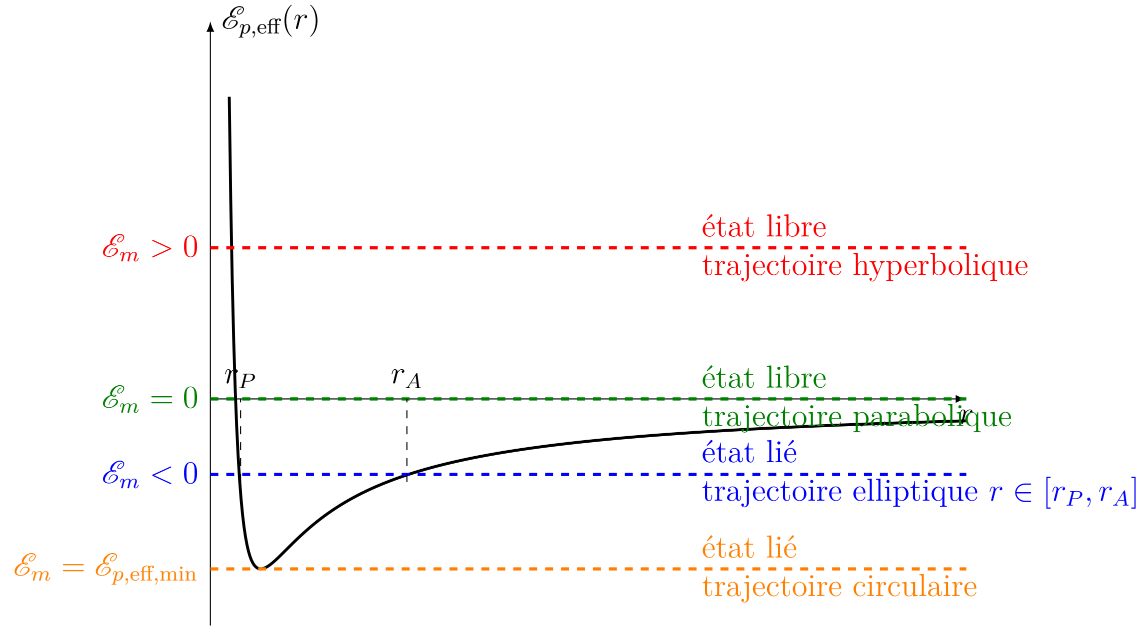
$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + \mathscr{E}_p(r)$$

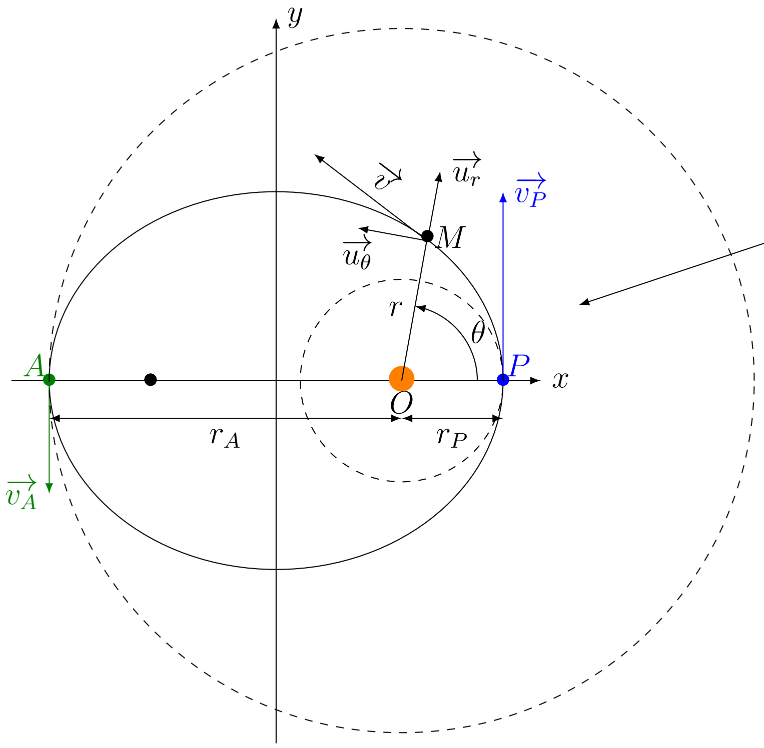
or la constante des aires vaut $\mathscr{C} = r^2\dot{\theta}$, ainsi

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{m\mathscr{C}^2}{2r^2} + \mathscr{E}_p(r)}_{\mathscr{E}_{p,\text{eff}}(r)} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathscr{E}_{p,\text{eff}}(r)$$

Les positions radiales r accessibles sont celles pour lesquelles $\mathscr{E}_m \geq \mathscr{E}_{p,\text{eff}}(r)$

- Mouvements radiaux dans le cas de l'interaction Newtonienne attractive.





D'après l'étude énergétique, la zone accessible à M d'$\mathscr{E}_m < 0$ est située entre les deux cercles de centre O et de rayons r_P et r_A.

Mouvement circulaire

- La loi des aires ($\mathscr{C} = r^2\dot{\theta} =$ constante) impose au **mouvement circulaire d'être de plus uniforme**.
- L'application du **PFD permet d'accéder à la norme du vecteur vitesse** :

$$m\,\vec{a} = -\frac{Gmm_O}{R^2}\vec{e_r} \Leftrightarrow -mR\dot{\theta}^2 = -\frac{Gmm_O}{R^2} \Leftrightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{Gm_O}{R^2} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{Gm_O}{R}}$$

- La **période du mouvement circulaire uniforme** est donnée par $T = \dfrac{2\pi R}{v}$

  On retrouve alors la 3$^{\text{ème}}$ loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_O} = \text{constante}$$

  On générale la 3$^{\text{ème}}$ loi de Kepler au mouvement elliptique en remplaçant le rayon par le demi grand-axe a :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante} = \frac{4\pi^2}{Gm_O}$$

qui traduit que le rapport de la période du système étudié (planète ou satellite) au carré sur le rayon de la trajectoire au cube est une constante qui ne dépend que de la masse du centre de force (étoile ou planète), c'est le même pour tous les objets en mouvement lié autour du centre de force de masse m_O.

- L'**énergie mécanique** sur le mouvement circulaire vaut

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p(r) = -\frac{Gm_O m}{2R} < 0$$

- On généralise cette expression au mouvement elliptique en remplaçant le rayon par le demi grand-axe a :

$$\mathscr{E}_m = -\frac{Gm_O m}{2a} < 0$$

Satellite géostationnaire

- C'est un satellite qui reste constamment au-dessus d'un même point de la surface terrestre. Un satellite géostationnaire est donc immobile par rapport à un observateur immobile de la Terre.
  Ce sont des satellites météo, d'alerte ou de télécommunication (signaux récupérés par des paraboles).
- La trajectoire du satellite géostationnaire est contenue dans le **plan équatorial**, qui est le seul plan commun entre le plan de la trajectoire d'un satellite autour de la Terre et le plan du mouvement d'un point à la surface de la Terre.
- La période du satellite géostationnaire est de 24h.
- L'utilisation de la 3$^{\text{ème}}$ loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{(R_T+h)^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$ permet d'accéder à l'altitude h de l'orbite géostationnaire, qui est unique : $h = 36000$ km

Vitesses cosmiques

- La **première vitesse cosmique** notée v_{c1}, est la **vitesse en orbite rasante**, c'est-à-dire la vitesse minimale à communiquer à un objet situé initialement à la surface de la planète pour le satelliser.
  Elle vaut 7,9 km/s pour la Terre.
- La **deuxième vitesse cosmique** ou **vitesse de libération** est la vitesse minimale à communiquer à un objet situé initialement à la surface de la planète pour qu'il puisse échapper à l'attraction de la planète, autrement dit pour qu'il puisse partir de la planète et s'en éloigner à l'infini.
  Elle vaut 11,2 km/s pour la Terre

Ce qu'il faut savoir faire

- ❑ Établir les expressions de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie électrostatique (champ créé par une charge ponctuelle).
- ❑ Établir à partir du théorème du moment cinétique la conservation du moment cinétique d'un point matériel soumis à un seul champ de force centrale.
- ❑ Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.
- ❑ Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique.
- ❑ Montrer que le mouvement circulaire d'un point soumis à une force centrale est uniforme et établir sa période.
- ❑ Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire.
  Exploiter sans démonstration la généralisation de la troisième loi de Kepler au cas d'une trajectoire elliptique.
- ❑ Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.
- ❑ Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.
- ❑ Justifier la localisation d'un satellite géostationnaire dans le plan équatorial.
- ❑ Établir l'altitude d'un satellite géostationnaire.
- ❑ Exprimer les vitesses cosmiques : en orbite basse et vitesse de libération.
- ❑ Approche documentaire : Relier l'échelle spatiale sondée à l'énergie mise en jeu lors d'une collision en s'appuyant sur l'expérience de Rutherford.