Classe de PCSI

Cours de physique

Année 2023-2024

Fiches Bilan

Thème I. Ondes et signaux
Optique, Électricité, Oscillateurs, filtrage

CAMILLE VERNET

Collège • Lycée • Cpge

Chapitre n°1 Fondements de l'optique géométrique

Sources lumineuses

- les **lampes à incandescence**, ou **sources de lumière blanche**, dont le spectre est continu (constitué de toutes les longueurs d'onde dans l'intervalle visible, et même au-delà),
- les **lampes spectrales** dont le spectre est **discontinu** (**spectre de raies**) et caractéristique de l'élément chimique,
- les **lasers**, émettant une lumière sensiblement **monochromatique**.

On travaillera fréquemment avec le **modèle de la source ponctuelle monochromatique**, c'est-à-dire une source ponctuelle (pas étendue) possédant une seule longueur d'onde (spectre à une raie).

Propagation de la lumière dans un milieu transparent

- **Dans le vide** :
  - la célérité de la lumière est $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
  - La longueur d'onde dans le vide d'une onde de fréquence f est : $\lambda_0 = \dfrac{c}{f}$
- **Dans un milieu transparent** :
  - **Indice d'un milieu transparent n** : $n = \dfrac{c}{v}$, avec v la célérité de l'onde dans le milieu d'indice n.
  - La longueur d'onde d'une onde de fréquence f est : $\lambda = \dfrac{v}{f}$
  - Relation entre longueur d'onde dans le vide et longueur d'onde dans un milieu : $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{n}$

Approximation de l'optique géométrique

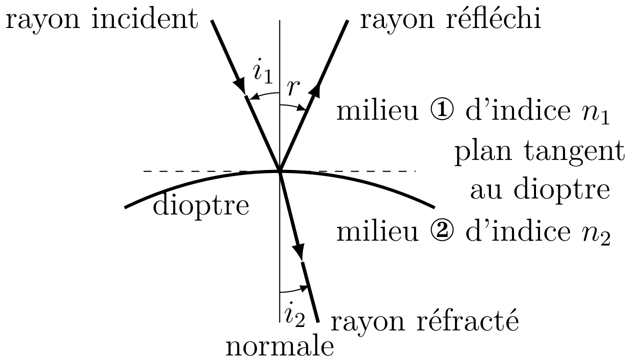
- **Approximation de l'optique géométrique**

  Le **modèle géométrique** de la lumière est valable si les longueurs caractéristiques (d) de variation de l'indice optique c'est-à-dire les dimensions caractéristiques du système (diamètre de la lentille, diaphragme, obstacle ...) sont grandes devant la longueur d'onde (λ) : $\boxed{d \gg \lambda}$.
- Les **rayons lumineux**, qui indiquent la direction de propagation de l'énergie lumineuse, sont dans le cadre de l'optique géométrique, **indépendants** les uns des autres (pas d'interférences).

  Ils se propagent **rectilignement dans un MTLHI** (=transparents linéaires homogènes isotropes) (notamment pas de diffraction). De plus, ils vérifient le **principe du retour inverse de la lumière** : le trajet suivi par la lumière entre deux points situés sur le même rayon lumineux est indépendant du sens de propagation de la lumière.

Réflexion et réfraction : les lois de Snell-Descartes

- **Vocabulaire**



- **Lois de Snell-Descartes** :

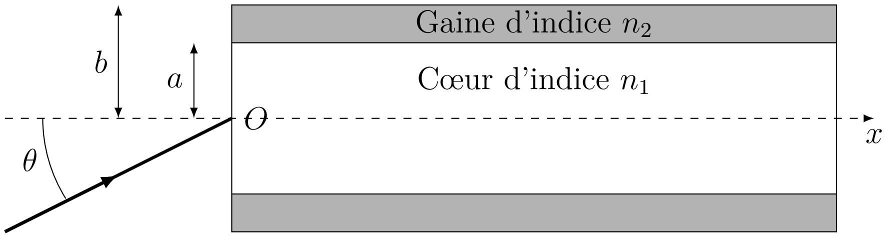
  Loi de la réflexion
  1) Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale au point d'incidence.
  2) L'angle d'incidence i_1 et l'angle de réflexion r ont des valeurs égales mais opposées : $r = -i_1$.

  Loi de la réfraction
  1) Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale au point d'incidence.
  2) L'angle d'incidence i_1 et de réfraction i_2 sont reliés par la relation suivante : $n_1 \times \sin(i_1) = n_2 \times \sin(i_2)$

- Il y a **réflexion totale** (absence de rayon réfracté) ssi
  - $n_2 < n_1$,
  - $i_1 > i_{1\ell}$, où $i_{1\ell}$ est l'angle d'incidence limite pour lequel $i_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Rq : Lorsque $n_2 > n_1$, le rayon réfracté existe toujours.

Fibre optique à saut d'indice



- Le **cône d'acceptance** d'une fibre optique est le cône à l'intérieur duquel la fibre optique peut recevoir du signal.
- Les rayons parvenant dans la fibre avec des angles d'incidence différents suivent des chemins optiques (ou modes) différents.
  À chaque mode correspond un temps de parcours légèrement différent, ce qui entraîne une **dispersion intermodale** (qui n'a aucun rapport avec la dispersion des fréquences due à l'indice de réfraction du milieu).
  On définit le **retard intermodal** qui est le temps de retard à l'arrivée du rayon le plus lent (le plus incliné) par rapport au rayon le plus rapide (rayon axial).

Ce qu'il faut savoir

- ❏ Caractériser une source lumineuse par son spectre.
- ❏ Définir le modèle de l'optique géométrique.
- ❏ Énoncer les lois de Snell-Descartes.

Ce qu'il faut savoir faire

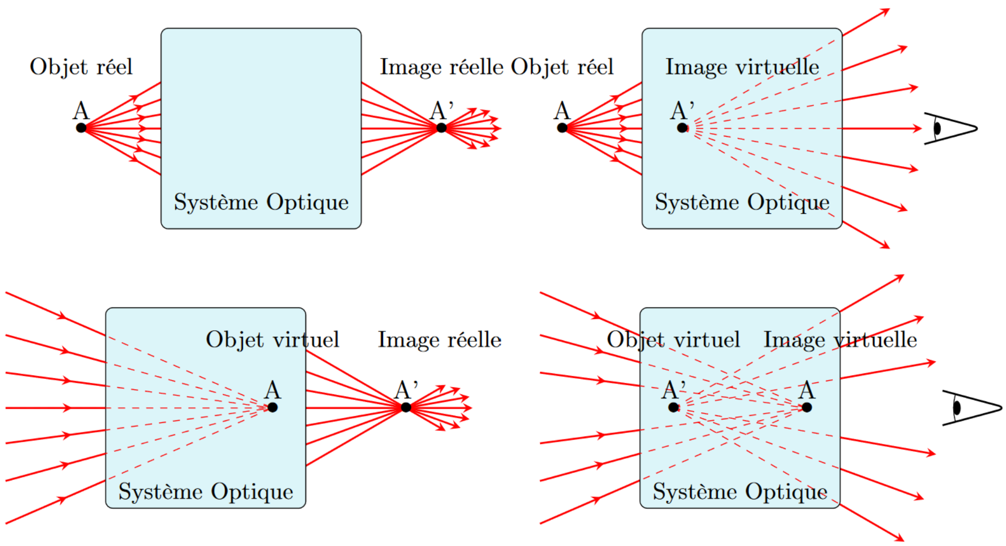
- ❏ Utiliser les lois de Snell-Descartes pour déterminer des angles de d'incidence, de réflexion ou de réfraction.
- ❏ Établir la condition de réflexion totale.
- ❏ Fibre optique : Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.

Chapitre n°2 Formation des images

- Un **miroir plan** est une surface plane parfaitement réfléchissante (métallique) recouverte d'une couche de verre : tout rayon incident est totalement réfléchi, il n'y a pas de rayon réfracté.
  - Un système optique est **rigoureusement stigmatique** si tout rayon incident passant par un point A a son rayon émergent qui passe par un unique point A'. Les points A et A' sont dits rigoureusement conjugués.
  - Un système optique est **aplanétique** si l'image d'un plan perpendiculaire à l'axe optique est un plan perpendiculaire à l'axe optique.

Vocabulaire sur les systèmes optiques

- Un **Système Optique** (SO) est une succession de dioptres (surfaces réfractantes) et/ou de miroirs (surfaces réfléchissantes) fournissant une « image » d'un système de points lumineux nommé « objet ».
- Le plus souvent le SO admet un axe de symétrie appelé **axe optique** orienté dans le sens de propagation de la lumière incidente. On parle alors de **système optique centré**.
- Un point objet ou un point image est dit **réel** s'il y a **effectivement une intersection** de rayons lumineux qui passent par ce point.
- On parle de point objet ou de point image **virtuel** si c'est l'**intersection des prolongements** de rayons lumineux qui passent par ce point.



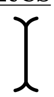
Conditions de Gauss

- Un système optique réalise un **stigmatisme approché** si les rayons incidents issus d'un point objet A passent au voisinage de A', dont la taille est inférieure à la dimension caractéristique des cellules du capteur. Cette notion dépend donc du capteur utilisé.
- Les systèmes optiques usuels centrés réalisent un stigmatisme et un aplanétisme approchés dans les **conditions de Gauss**, dans lesquelles les rayons sont peu inclinés par rapport à l'axe optique, et peu éloignés de l'axe optique.

Lentilles minces

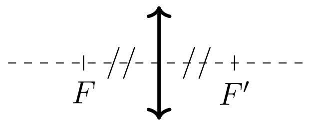
- **Définitions**
  - Une **lentille** est constituée d'un milieu transparent délimité par deux dioptres sphériques ou un dioptre sphérique et un dioptre plan, dont les centres sont situés sur l'axe de révolution Δ.
  - On ne s'intéressera qu'aux **lentilles minces** dont l'épaisseur e est petite devant les rayons de courbures des deux dioptres et devant la distance entre les centres des deux dioptres.
  - Les lentilles à **bords minces** sont des **lentilles convergentes** :

    
  - Les lentilles à **bords épais** sont des **lentilles divergentes** :

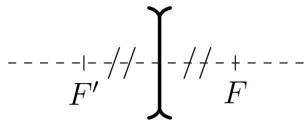
    
- On note S_1 et S_2 les sommets des faces de la lentille situés sur l'axe Δ. Dans le modèle de la lentille mince, $S_1 \approx S_2$, on appelle **centre optique**, noté O le point ainsi définit.

  Un rayon passant par le centre optique n'est pas dévié.

- **Foyers principaux**
  - Le **foyer principal image F'** est l'image d'un point situé à l'infini **sur l'axe optique**. (Les rayons arrivant parallèlement à l'axe optique ressortent en passant par F').
  - Le **foyer principal objet F** est le point objet dont l'image se forme à l'infini **sur l'axe optique**. (Les rayons incidents passant par F ressortent parallèlement à l'axe optique).



lentille convergente



lentille divergente

- **Distance focale et vergence**
  - La **distance focale image** est la distance algébrique $f' = \overline{OF'}$ (en **mètre**)
  - La **vergence** $V = \dfrac{1}{f'}$ (en **dioptrie** $\delta = \mathrm{m}^{-1}$)
  - La distance focale image f' et la vergence d'une **lentille convergente** sont positives.
  - La distance focale image f' et la vergence d'une **lentille divergente** sont négatives.
- **Foyers secondaires**
  - On appelle **plan focal image** le plan transverse passant par le foyer principal image F'.
    Les **foyers secondaires image**, notés ϕ' sont les points du plan focal image différents de F'. Le foyer secondaire image est le point image dont l'objet est situé à l'infini hors de l'axe optique : les rayons incidents sont parallèles entre eux et inclinés par rapport à l'axe optique.
  - On appelle **plan focal objet** le plan transverse (perpendiculaire à l'axe optique) passant par le foyer principal objet F.
    Les **foyers secondaires objet**, notés ϕ sont les points du plan focal objet différents de F. L'image d'un foyer secondaire objet est située à l'infini hors de l'axe optique : les rayons émergents sont parallèles entre eux et inclinés par rapport à l'axe optique.
- On définit le **grandissement transversal** par : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
  - Si $\gamma > 0$, l'image est droite (de même sens) ; Si $\gamma < 0$, l'image est renversée
  - Si $|\gamma| > 1$, l'image est agrandie ; Si $|\gamma| < 1$, l'image est rétrécie.
- **Relations de conjugaison**
  Pour un objet AB transverse avec A situé sur l'axe optique conjugué avec l'image $A'B'$ par une lentille mince de centre optique O, de foyer principal objet F, de foyer principal image F' et de distance focale f' : $A \xrightarrow{\mathscr{L}(O,f')} A'$

Relations	… de conjugaison	… de grandissement
… avec origine au centre (de Descartes)	$\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$	$\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$
… avec origine aux foyers (de Newton)	$\overline{F'A'} \times \overline{FA} = -f'^2$	$\gamma = \dfrac{\overline{F'A'}}{-f'} = \dfrac{f'}{\overline{FA}}$

■ Méthode de construction d'image d'un objet par une lentille

- **Pour construire l'image d'un objet par un lentille, il faut utiliser les trois rayons** :
  - Le rayon passant par le centre optique O n'est pas dévié par la lentille.
  - Le rayon incident issu de B et parallèle à l'axe optique émerge en passant par F'.
  - Le rayon incident issu de B et passant par F émerge parallèlement à l'axe optique.
- ⚠ **Règles : Réels ou virtuels ? Traits pleins ou traits pointillés ?**
  - Les rayons incidents sont en traits pleins avant la lentille et leurs prolongements après la lentille en pointillés.

- Un objet réel est à l'intersection des rayons incidents avant la lentille. Un objet virtuel est à l'intersection des prolongements après la lentille des rayons incidents.
- Les rayons émergents sont en traits pleins après la lentille et leurs prolongements avant la lentille en pointillés.
- Une image réelle est à l'intersection des rayons émergents après la lentille. Une image virtuelle est à l'intersection des prolongements avant la lentille des rayons émergents.

L'œil

- L'œil est modélisé par l'association d'une lentille convergente de vergence variable (accommodation) et d'un capteur fixe par rapport à la lentille.
- Un œil peut voir nets des objets situés entre son punctum remotum (à l'infini pour un œil emmétrope) et son punctum proximum (à environ 25 cm pur un œil emmétrope). Il voit sans fatigue des objets situés à son punctum remotum et accommode en augmentant la vergence de son cristallin des objets plus proches.

L'appareil photo

- Un appareil photographique numérique est modélisé par l'association :
  - une lentille mince convergente de distance focale f' ;
  - un diaphragme placée devant la lentille mince, assimilée à une ouverture circulaire ;
  - un capteur CCD sur lequel l'image est enregistrée, dans un plan transverse, située à une distance d réglable de la lentille convergente, telle que l'image de l'objet photographié se forme dessus.
- La **profondeur de champ**, c'est-à-dire la distance entre le point net le plus proche de l'objectif et le point net le plus éloigné de l'objectif, est d'autant plus importante que le diamètre du diaphragme D est petit.

Ce qu'il faut savoir

- ❏ Énoncer les conditions permettant un stigmatisme approché et les relier aux caractéristiques d'un détecteur.
- ❏ Définir et connaître les propriétés du centre optique, des foyers principaux et secondaires, de la distance focale et de la vergence.
- ❏ Connaître les formules de conjugaison et de grandissement de Descartes et de Newton.
- ❏ Connaître la condition $D \geq 4f'$ pour former l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente.
- ❏ Connaître les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire ε de la plage d'accommodation.

Ce qu'il faut savoir faire

- ❏ Calculer des angles et des distances avec des formules trigonométriques.
- ❏ Construire l'image d'un objet par un miroir plan ou par une lentille mince et identifier sa nature réelle ou virtuelle.
- ❏ Utiliser les formules de conjugaison et de grandissement de Descartes et Newton.
- ❏ Établir la condition $D \geq 4f'$ pour former l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente.
- ❏ Modèle l'œil comme l'association d'une lentille de vergence variable et d'un capteur fixe.

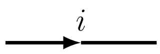
Chapitre n°3 Circuits électriques dans l'A.R.Q.S.

Vocabulaire des circuits

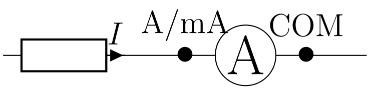
- **Dipôle** : composant électrique comportant deux bornes,
- **Noeud** : borne commune à plus de deux dipôles,
- **Branche** : portion d'un circuit entre deux nœuds consécutifs,
- **Maille** : ensemble de branches successives définissant un circuit fermé,
- Des dipôles sont **en série** lorsqu'ils appartiennent à une même branche, ils sont donc parcourus par le même courant.
- Des dipôles sont **en parallèle** (ou **en dérivation**) s'ils sont reliés aux deux mêmes nœuds, ils sont alors soumis à la même différence de potentiel.

Dans le cadre de l'**Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire (A.R.Q.S)**, tous les effets liés à la propagation des signaux sont négligés.
Cette approximation est valable si « le circuit n'est pas trop grand » et « la fréquence f pas trop élevée » : la taille ℓ du circuit doit être telle que : $\ell \ll \dfrac{v}{f}$, avec v la vitesse de propagation des signaux.

Courant électrique

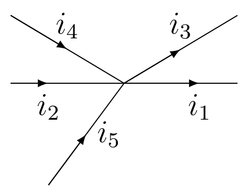
- La **charge électrique**, notée q est un scalaire qui caractérise la propriété d'un corps chargé à en attirer un autre par l'intermédiaire des forces électriques. Elle s'exprime en Coulomb (C). Elle est additive, quantifiée (multiples entiers de la charge élémentaire) et conservative (constante pour un système fermé).
- Le **courant électrique** est un déplacement ordonné de particules chargées dans un conducteur.
- ∘ L'**intensité du courant** est le débit de charges à travers une section du conducteur (=c'est la quantité de charges qui traversent une section d'un conducteur dans un sens donné par unité de temps) ; elle est représentée par une flèche sur un fil : 

  - ∘ L'intensité du courant électrique est par définition : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ où dq est la quantité de chargés traversant la section du conducteur, dans le sens de la flèche, pendant le temps dt.
  - ∘ L'intensité s'exprime en Ampère.
  - ∘ L'intensité se mesure avec un ampèremètre : le courant entre par la borne A et sort par la borne COM.



  - ∘ **Ordres de grandeur** : En TP quelques mA à 10 mA.
- **Loi des nœuds**
La somme algébrique des intensités des courants électriques arrivant **en un nœud** est nulle :

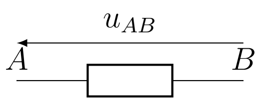
$$\sum \varepsilon_k i_k = 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{entrant}} i = \sum_{\text{sortant}} i$$



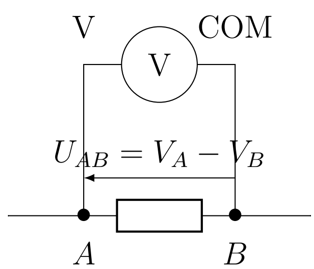
$\varepsilon_k = +1$ si la flèche du courant i_k est dirigée vers le nœud ;
$\varepsilon_k = -1$ si la flèche du courant i_k part du nœud

Tension ou différence de potentiel

- La **tension** u_{AB} est la différence de potentiel entre les points A et B : $u_{AB} = V_A - V_B$



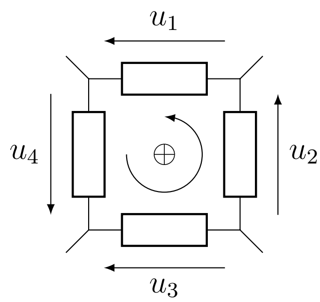
Elle s'exprime en Volt.
- On définit la **masse** comme le point du circuit dont le potentiel est fixé (arbitrairement) à zéro.
- La tension u_{AB} se mesure à l'aide d'un voltmètre branché en parallèle, avec la borne V au point A et la borne COM au point B.



- **Ordres de grandeur** : en TP quelques Volts
- **Loi des mailles**

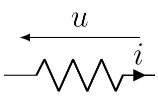
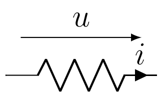
Dans une **maille orientée**, la somme algébrique des tensions est nulle :

$$\sum \varepsilon_k u_k = 0$$

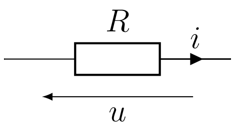
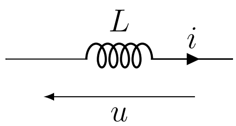
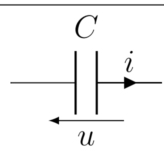


$\varepsilon_k = +1$ si la tension u_k est orientée dans le sens de parcours de la maille
$\varepsilon_k = -1$ si la tension u_k est orientée dans le sens opposé à celui de parcours de la maille

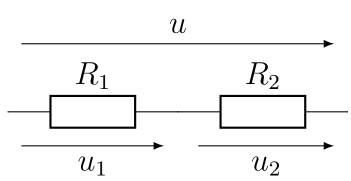
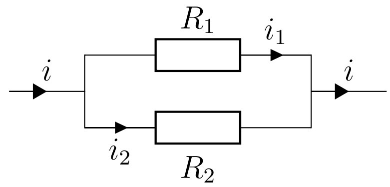
Puissance électrique (en watt (W))

Convention récepteur	**Convention générateur**
 La flèche de i et la flèche de u sont **en sens opposé**.	 La flèche de i et la flèche de u sont **de même sens**.
$\boxed{\mathscr{P}_r = u \times i}$ est la **puissance algébriquement reçue** par le dipôle .	$\boxed{\mathscr{P}_c = u \times i}$ est la **puissance algébriquement cédée** par le dipôle.
$\mathscr{P}_r$ est **algébrique** : • Si $\mathscr{P}_r > 0$, le dipôle reçoit effectivement de la puissance ; • Si $\mathscr{P}_r < 0$, le dipôle cède effectivement de la puissance, il cède la puissance $-\mathscr{P}_r$.	$\mathscr{P}_c$ est **algébrique** : • Si $\mathscr{P}_c > 0$, le dipôle cède effectivement de la puissance ; • Si $\mathscr{P}_c < 0$, le dipôle reçoit effectivement de la puissance, il reçoit la puissance $-\mathscr{P}_c$.

Dipôles linéaires passifs

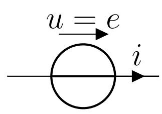
Dipôle passif	Résistance	Bobine	Condensateur
Symbole			
Relation u/i en convention récepteur	$u = Ri$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
Relation u/i en convention générateur	$u = -Ri$	$u = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$i = -C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
Unité	Ohm (Ω)	Henry (H)	Farad (F)
Ordre de grandeur (TP) Ordre de grandeur (application)	qq Ω à qq MΩ sèche cheveux 40 Ω	µH à qq mH Électroaimant 100 H	qq nF à qq µF électrotechnique 1 F
Puissance reçue	$\mathscr{P} = Ri^2$	$\mathscr{P} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right)$	$\mathscr{P} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Cu^2\right)$
Énergie stockée	\	$\mathscr{E}_L = \dfrac{1}{2}Li^2$	$\mathscr{E}_C = \dfrac{1}{2}Cu^2$

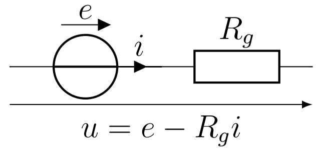
Associations de résistances

	Série	Dérivation
Schéma		
Expression de $R_{\text{éq}}$	$R_{\text{éq}} = R_1 + R_2$	$\dfrac{1}{R_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \Leftrightarrow R_{\text{éq}} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$
Pont diviseur	de tension : $u_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} u$	de courant : $i_1 = \dfrac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} i$

Dipôles actifs : Sources de tension

- Une **source idéale de tension** impose la tension $u = e$ quelque soit l'intensité i du courant qui la traverse. e est la force électromotrice (f.é.m.)
- Une **source réelle de tension** est représentée par le modèle de Thévenin qui associe en série une source idéale de f.é.m. e et une résistance R_g.





Ce qu'il faut savoir

- ❏ Savoir que la charge est quantifiée.
- ❏ Exprimer l'intensité du courant électrique en termes de débit de charge.
- ❏ Relier la loi des nœuds au postulat de la conservation de la charge.
- ❏ Citer les ordres de grandeur des intensités et des tensions dans différents domaines d'application.
- ❏ Utiliser les relations entre l'intensité et la tension de R, L et C.
- ❏ Citer les ordres de grandeur des composants R, L, C.
- ❏ Connaître l'expression de la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance et de l'énergie stockée dans un condensateur ou dans une bobine.
- ❏ Savoir que l'intensité du courant à travers une bobine et que la tension aux bornes d'un condensateur sont des fonctions continues du temps (au sens mathématique du terme).

Ce qu'il faut savoir faire

- ❏ Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence.
- ❏ Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur.
- ❏ Utiliser la loi des nœuds et la loi des mailles.
- ❏ Utiliser les relations entre l'intensité et la tension de R, L et C.
- ❏ Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente.
- ❏ Établir et utiliser les ponts diviseurs de courant et de tension.
- ❏ Établir l'expression de la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance.
- ❏ Établir l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur ou dans une bobine.
- ❏ Expliquer les branchements des appareils de mesure, et les réaliser en TP.

Chapitre n°4 Circuit linéaire du premier ordre

Régime libre et échelon de tension

- Un circuit est en **régime libre** s'il ne comporte aucun générateur ; ses grandeurs électriques évoluent néanmoins au cours du temps si, à un instant initial, un condensateur est chargé.
- Un circuit est soumis à **échelon de tension** s'il comporte une source de tension de f.é.m. nulle jusqu'à l'instant initial choisi, puis constante à partir de cet instant. Cela correspond en pratique à l'allumage d'un générateur de tension constante, ou à la fermeture d'un interrupteur.

Conditions initiales

- **La tension aux bornes du condensateur et la charge du condensateur ne peuvent pas subir de discontinuité**, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-)$ et $q(0^+) = q(0^-)$ (ce sont des fonctions continues du temps).
- L'**intensité du courant à travers une bobine ne peut pas subir de discontinuité** (c'est une fonction continue du temps).
- Les autres grandeurs électriques du circuit s'en déduisent à partir des lois des mailles, des nœuds et des relations u/i des différents dipôles.

Régime transitoire du premier ordre

- **Établir l'équation différentielle**
  1. Lister les grandeurs électriques (tension, intensité) inconnues (qui ont du être représentées sur le circuit précédemment).
     Le nombre de grandeurs électriques inconnues vous donne le nombre d'équations indépendantes à écrire.
  2. Écrire toutes les relations indépendantes possibles :
     - lois des mailles indépendantes (attention aux redondances) ;
     - lois des nœuds (attention aux redondances) ;
     - relations entre intensité et tension pour tous les dipôles.
  3. Combiner ces relations entre elles pour ne conserver que la grandeur qui nous intéresse.
- **Équation différentielle :**
  Un système est dit du premier ordre lorsqu'il est régi par une équation différentielle qui lie une de ses variables avec sa dérivée première. L'équation peut alors se mettre sous la forme : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = \dfrac{u_\infty}{\tau}$ (E), avec τ la constante de temps.
- **Résolution :**
  1. Déterminer la **solution générale de l'équation homogène (sans second membre)**

$$\frac{\mathrm{d}u_H}{\mathrm{d}t} + \frac{u_H}{\tau} = 0 \quad \text{(EH)}$$

$$u_H(t) = Ke^{-t/\tau} \quad \text{avec } K \text{ une constante d'intégration}$$

  2. Déterminer une **solution particulière u_P de (E), recherchée sous la forme du second membre**, ici constant : $\dfrac{\mathrm{d}u_P}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_P}{\tau} = \dfrac{u_\infty}{\tau}$, or $\dfrac{\mathrm{d}u_P}{\mathrm{d}t} = 0$ et donc $u_P = u_\infty$.

  La solution générale de (E) est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$u(t) = u_H(t) + u_P \qquad u(t) = Ke^{-t/\tau} + u_\infty$$

  3. Déterminer la constante d'intégration K à l'aide de la condition initiale $u(t = 0)$.

État final

1. Reproduire le circuit électrique une fois le nouveau **régime permanent** atteint en remplaçant les **condensateurs par un interrupteur ouvert** et les **bobines par un fil**.
2. En déduire les tensions aux bornes des fils et les intensités à travers les interrupteurs ouverts qui sont nulles.

3. Appliquer les lois des nœuds, les lois des mailles et les relations intensité-tension pour déterminer les autres grandeurs électriques.

Bilan énergétique

- Pour obtenir un bilan de puissance, il faut multiplier la loi des mailles par le courant i qui circule dans le circuit, puis identifier les différentes puissances.
- Interpréter le bilan de puissance en terme de transferts de puissance : qui transfère de la puissance à qui ? Pour cela, déterminer si on parle de puissance reçue ou fournie (selon la convention du dipôle) et déterminer son signe.
- Le bilan énergétique sur la durée du régime transitoire s'obtient en intégrant par rapport au temps le bilan de puissance sur la durée du régime transitoire.

Ce qu'il faut savoir

- ❑ Connaître les relations entre l'intensité et la tension de R, L et C
- ❑ Citer les ordres de grandeur des composants R, L, C.
- ❑ Savoir que l'intensité du courant à travers une bobine et que la tension aux bornes d'un condensateur sont des fonctions continues du temps (au sens mathématique du terme).
- ❑ Connaître l'expression de la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance et de l'énergie stockée dans un condensateur ou dans une bobine.

Ce qu'il faut savoir faire

- ❑ Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon.
- ❑ Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine, pour déterminer notamment les conditions initiales.
- ❑ Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.
- ❑ Déterminer les conditions initiales dans un circuit.
- ❑ Déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon (Résoudre une équation différentielle du premier ordre avec une condition initiale).
- ❑ Réaliser un bilan de puissance.

Chapitre n°5 Oscillateur harmonique

Méthode de rédaction d'un exercice de mécanique du point :

① Définir le système étudié.

② Définir le référentiel d'étude.

③ Faire un bilan des forces extérieures précis qui s'exercent sur le système étudié.

④ Faire un schéma du dispositif étudié, sur lequel les forces seront représentées, ainsi que les axes cartésiens nécessaires.

⑤ Appliquer la loi de la dynamique adéquate au problème (pour l'instant : le principe fondamental de la dynamique).

⑥ Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au système étudié et dans le référentiel choisi.

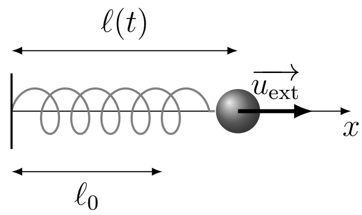
⑦ Projeter sur l'axe du mouvement.

⑧ En déduire l'équation différentielle du mouvement du système étudié.

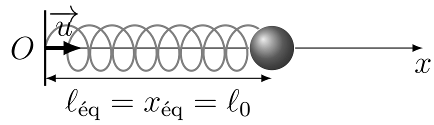
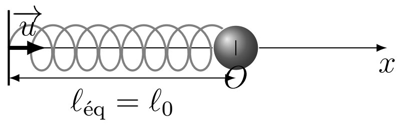
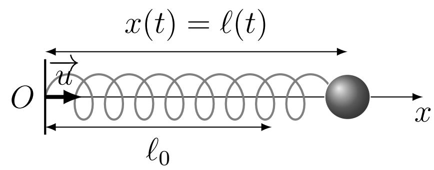
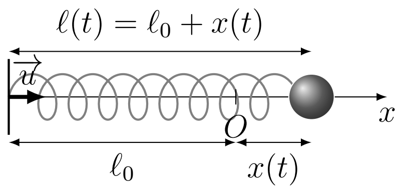
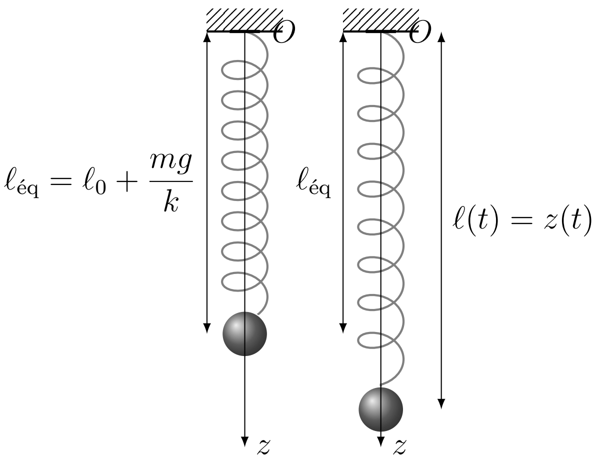
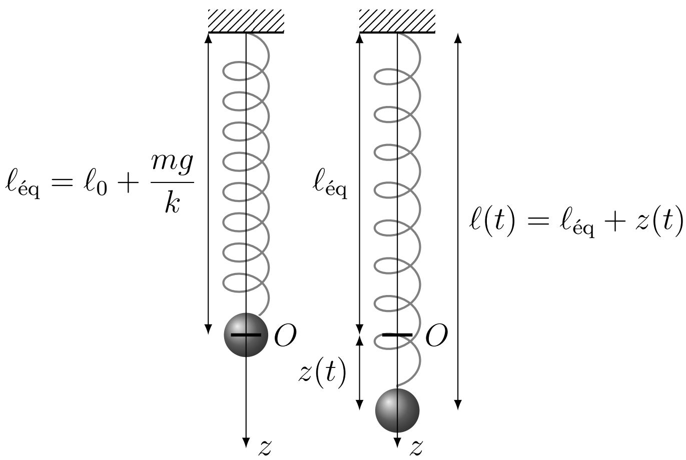
Force de rappel élastique

$\overrightarrow{f} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$, avec

- k la constante de raideur du ressort,
- ℓ_0 la longueur à vide (longueur du ressort lorsqu'il est posé horizontalement sans qu'aucune force ne s'exerce dessus)
- ℓ la longueur instantanée du ressort : ℓ dépend du temps
- $\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$ le **vecteur unitaire vers l'extérieur du ressort**.



Diverses configurations

⚠	Origine O au point d'attache du ressort	Origine O à la position d'équilibre
Ressort horizontal	À l'équilibre  	À l'équilibre 
	À t  $\overrightarrow{f} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_x} = -k(x(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$	À t  $\overrightarrow{f} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_x} = -k(\ell_{\text{éq}} + x(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$
Ressort vertical	 À l'équilibre À t $\ell_{\text{éq}} = z_{\text{éq}}$ $\overrightarrow{f} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z} = -k(z(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z}$	 À l'équilibre À t $z_{\text{éq}} = 0$ $\overrightarrow{f} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z} = -k(\ell_{\text{éq}} + z(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z}$

Position d'équilibre

La **position d'équilibre** est une position $x_{\text{éq}}$ où M peut rester immobile : s'il y est déposé sans vitesse initiale il reste immobile.
En $x_{\text{éq}}$, la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le mobile est nulle : $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

Équation différentielle de l'oscillateur harmonique

- Principe fondamental de la dynamique : $m\overrightarrow{a}(M) = \sum \overrightarrow{F}$.
- Un système régit par une équation différentielle s'écrivant

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{\text{éq}}}$$

est une **oscillateur harmonique** de pulsation propre ω_0 et de position d'équilibre $x_{\text{éq}}$.

⚠ les expressions de $x_{\text{éq}}$ et de ω_0 dépendent de l'oscillateur.

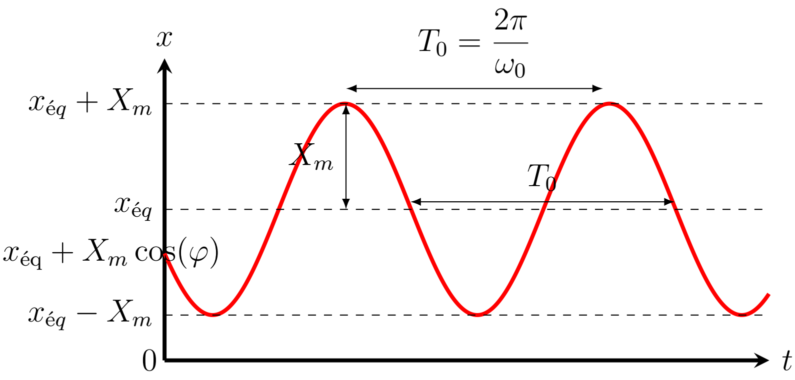
Mouvement de l'oscillateur harmonique

- **Solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique**

  Elles peuvent s'écrire sous deux formes équivalents :
  $\boxed{x(t) = x_{\text{éq}} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$ ou $\boxed{x(t) = x_{\text{éq}} + X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)}$ (avec $X_m > 0$).
  Les deux constantes d'intégration (A et B ou X_m et φ) se déterminent à l'aide des 2 conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$.

- **Caractéristiques des oscillations**

  L'origine O de l'axe (Ox) est prise (ici) au point d'attache du ressort *(comme dans le cours)*.



  - $X_m > 0$ est l'**amplitude** des oscillations.
  - $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ est la **période propre** des oscillations ; elle correspond à la plus petite durée au bout de laquelle la fonction $x(t)$ se répète identiquement à elle-même.
  - La **fréquence propre** $f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$.
  - f_0, T_0 et la **pulsation propre** ω_0 sont indépendantes des conditions initiales : on parle d'**isochronisme des oscillations**.
  - φ est la **phase à l'origine**, elle n'a pas d'interprétation physique autre que d'imposer la valeur de $x(t)$ à l'instant pris comme instant initial.

Conservation de l'énergie mécanique

- L'**énergie cinétique** $\mathscr{E}_c$ d'un point matériel de masse m se déplaçant à une vitesse v est définie par : $\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}mv^2$
- **Énergie potentielle élastique** : $\mathscr{E}_{p,\text{él}} = \dfrac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cste}$ (définie à une constante près)
- **Énergie potentielle de pesanteur** : $\mathscr{E}_{pp} = \pm mgz + \text{cste}$ (« $+$ » si l'axe (Oz) est ascendant ; « $-$ » est descendant).
- L'**énergie mécanique** est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles. Pour un oscillateur harmonique horizontal : $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_{p,\text{él}}$.
- L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique se conserve au cours du temps (est constante) car on néglige tous les phénomènes dissipatifs (ici les frottements).
- Dans les problèmes où l'altitude du point M varie, il sera nécessaire d'ajouter dans l'énergie potentielle le terme de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathscr{E}_{pp} = \pm mgz + \text{cste'}$ (« $+$ » si l'axe Oz est vers le haut, et « $-$ » si l'axe Oz est vers le bas).

Oscillateur électrique LC

- Un circuit constitué d'une bobine idéale et d'un condensateur idéal en série est un oscillateur harmonique régit par l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E$$

  de pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et E la fem du générateur qui l'alimente (s'il y en a un, 0 sinon).
- Pour **établir l'équation différentielle**, suivre la même méthode que pour les circuits linéaires du 1er ordre ou amorti.
- Pour **résoudre l'équation différentielle**, suivre la même méthode que pour l'oscillateur mécanique harmonique précédent.
- Pour **déterminer les conditions initiales**, suivre la même méthode que pour les oscillateurs électriques amortis.

Ce qu'il faut savoir

- ❏ Connaître l'expression de la force de rappel élastique.
- ❏ Connaître l'équation différentielle canonique d'un oscillateur harmonique.
- ❏ Connaître la définition et la caractérisation pratique d'une position d'équilibre.
- ❏ Connaître les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie mécanique.

Ce qu'il faut savoir faire

- ❏ Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique.
- ❏ Résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique à partir de conditions initiales données.
- ❏ Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence et de pulsation.
- ❏ Contrôler la cohérence de la solution obtenue avec la conservation de l'énergie mécanique.

Chapitre n°6 Oscillateurs mécanique et électrique amortis

Régime transitoire du second ordre

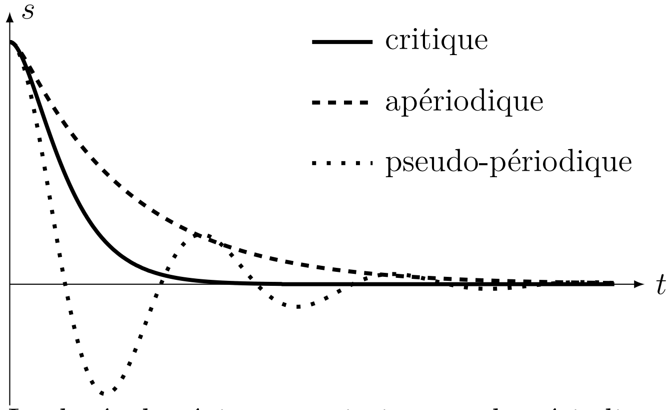
- **Équation différentielle** Un oscillateur amorti est régit par l'équation différentielle vérifiée par une grandeur s :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)$$

où Q le **facteur de qualité** (sans unité), ω_0 la **pulsation propre** (en rad/s), et $s(\infty)$ la valeur prise par s en régime permanent.

Les expressions de Q, ω_0 et $s(\infty)$ dépendent de l'oscillateur.

- **Solutions**
La solution d'une telle équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière constante : $s(t) = s_H(t) + s_p$.
Selon les valeurs des trois paramètres du problème (R, L, C ou k, m, α), la résolution de l'équation différentielle donne les différents régimes.



	Δ	Q	τ
Régime apériodique	$\Delta > 0$	$Q < \frac{1}{2}$	$\tau \approx \frac{1}{2\omega_0 Q}$
Régime critique	$\Delta = 0$	$Q = \frac{1}{2}$	$\tau \approx \frac{1}{\omega_0}$
Régime pseudo-périodique	$\Delta < 0$	$Q > \frac{1}{2}$	$\tau \approx \frac{2Q}{\omega_0}$

La durée du régime transitoire pseudo-périodique est d'autant plus grand que le facteur de qualité est élevé.
La durée du régime transitoire apériodique est d'autant plus grand que le facteur de qualité est faible.

Méthodes

♣ Comment établir l'équation différentielle d'un circuit en régime libre ou soumis à un échelon de tension ?

— Écrire les lois des nœuds et des mailles.

— Utiliser les équations relatives à chaque dipôle, de manière à ne garder qu'une seule inconnue : celle dont on souhaite déterminer l'équation différentielle qu'elle vérifie.

— Dans l'hypothèse où on ne peut pas éliminer une variable car seules les informations sur sa dérivée sont disponibles, il faut dériver toute l'équation.

♣ Comment établir l'équation différentielle d'un oscillateur mécanique amorti en régime libre ?

① Définir le système étudié.

② Définir le référentiel d'étude.

⑤ Faire un schéma où figurent le dispositif étudié, les axes du repère utilisé et les forces.

③ Faire un bilan des forces extérieures précis qui s'exercent sur le système étudié.

④ Appliquer la loi de la dynamique adéquate au problème : le principe fondamental de la dynamique.

L'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur mécanique s'obtient par projection du principe fondamental de la dynamique sur le vecteur unitaire caractérisant la direction du mouvement.

♣ Comment mettre sous forme canonique et identifier les termes ? :

- Diviser par le coefficient se trouvant devant la dérivée d'ordre le plus élevé, afin d'avoir un coefficient 1 devant.
- Identifier l'équation différentielle canonique $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)$ avec l'équation différentielle établie, afin de déterminer ω_0 et Q en fonction des paramètres de l'oscillateur.

♣ Comment déterminer les conditions initiales d'un circuit ?

Pour résoudre complètement l'équation différentielle, il est nécessaire de connaître $s(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$:

- Commencer par utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et de l'intensité du courant à travers une bobine, afin de déterminer le courant à travers la bobine à $t = 0^+$, $i_L(0^+)$, et la tension aux bornes du condensateur à $t = 0^+$, $u_c(0^+)$.
- Si besoin, utiliser les lois des nœuds et des mailles à $t = 0^+$, et les relations courant/tension à $t = 0^+$ pour les différents dipôles.

♣ Comment résoudre une équation différentielle (méthode générale) ?

La résolution se fait en 3 étapes **dans cet ordre** :

1. Détermination de la *solution générale de l'équation sans second membre.*
2. Détermination de la *solution particulière*, recherchée sous la même forme que le second membre (constant dans ce chapitre).
3. La solution recherchée est la somme des deux résultats précédents. La 3ème étape consiste à déterminer les *constantes d'intégration* à l'aide des conditions initiales sur la variable et sa dérivée.

♣ Comment résoudre une équation différentielle homogène du deuxième ordre ?

L'étape **1.** précédente se fait en plusieurs étapes :

- **Écrire l'équation caractéristique** associée à l'équation homogène : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$
- **Écrire le discriminant et déterminer son signe** à l'aide des valeurs numériques de l'énoncé.
- **Établir les racines**, réelles ou complexes, de l'équation caractéristique.
- En déduire la **forme générale de la solution de l'équation sans second membre**.

Régime apériodique	*Régime critique*	*Régime pseudo-périodique*
$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$	$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$
$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$	$r = -\omega_0$	$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \Leftrightarrow r_\pm = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega$
$s_H(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)$	$s_H(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$	$s_H(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$
$\tau \approx \frac{1}{2Q\omega_0}$	$\tau = \frac{1}{\omega_0}$	$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$

Les solutions de l'équation homogène tendent toujours vers 0 avec un certain temps τ caractéristique dont l'expression (et donc la valeur !) dépend de la nature du régime (c'est-à-dire des caractéristiques).

Ce qu'il faut savoir

- ❏ Connaître les équations différentielles canoniques du deuxième ordre.
- ❏ Connaître les formes des solutions d'une équation différentielle du deuxième ordre.

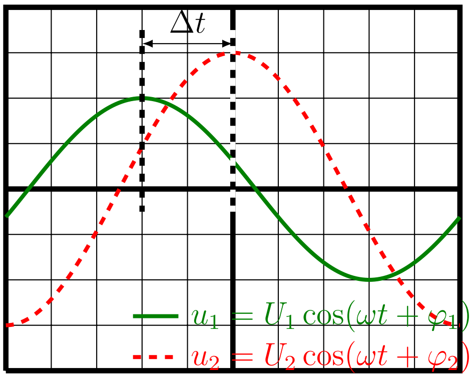
Ce qu'il faut savoir faire

- ❏ Établir et reconnaître l'équation différentielle pour un circuit linéaire du deuxième ordre.
- ❏ Établir et reconnaître l'équation différentielle pour un point matériel oscillant lié à un ressort et soumis à une force de frottement fluide.
- ❏ Écrire l'équation différentielle sous forme canonique pour identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
- ❏ Déterminer les conditions initiales dans un circuit.
- ❏ Résoudre l'équation différentielle linéaire à partir de conditions initiales données.
- ❏ Exploiter un relevé expérimental pour un système du deuxième (ou du premier) ordre.
- ❏ Prévoir l'évolution du système en utilisant un portrait de phase.

Chapitre n°7 Oscillateurs mécanique et électrique amortis en RSF

Ce chapitre concerne l'étude de circuits linéaires alimentés par un générateur délivrant une tension sinusoïdale de pulsation ω ou un système {masse-ressort} excité sinusoïdalement à la pulsation ω.

Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchrones



Comment déterminer le déphasage entre deux signaux synchrones ?

1°)Déterminer la valeur absolue de $\Delta\varphi$: $\left|\Delta\varphi\right| = 2\pi f \Delta t$ (Δt représenté ci-contre : mesure avec curseurs).

2°) Déterminer le signe de $\Delta\varphi$: u_1 passe par un maximum avant u_2, donc u_2 est en retard sur u_1, donc le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ est négatif.

3°) En déduire $\Delta\varphi$.

Ci-contre : $\Delta\varphi_{2/1} < 0$ *et vaut* $\Delta\varphi_{2/1} = -2\pi \times \dfrac{2}{10}\text{rad}$

Régime sinusoïdal forcé

L'évolution temporelle d'un oscillateur amorti soumis à une excitation sinusoïdale $A\cos(\omega t)$ de pulsation ω est régie par une équation différentielle s'écrivant

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = A\cos(\omega t)$$

avec ω_0 la pulsation propre et Q le facteur de qualité qui dépendent des caractéristiques de l'oscillateur.

La solution d'une telle équation différentielle s'écrit $s(t) = s_h(t) + s_P(t)$, avec $s_P(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$. La solution homogène, responsable du régime transitoire, tend vers 0 après quelques τ, la constante de temps caractéristique du régime transitoire.

Nous nous intéressons dans ce chapitre au **régime permanent sinusoïdal** (ou **régime sinusoïdal forcé**), une fois le régime transitoire terminé.

L'**évolution temporelle de s est sinusoïdale** $s(t) = S_m(\omega)\cos\big(\omega t + \varphi(\omega)\big)$**, de même pulsation ω que l'excitation** et dont l'amplitude $S_m(\omega)$ et le déphasage de $s(t)$ par rapport à l'excitation dépendent de ω.

Notation complexe

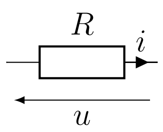
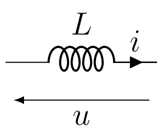
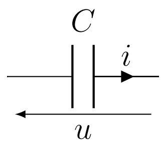
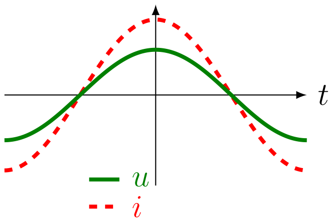
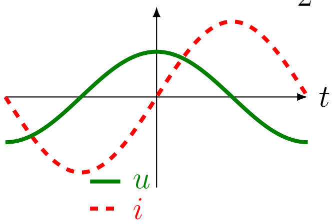
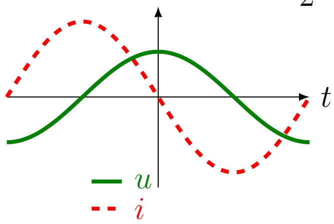
- À tout signal sinusoïdal $s(t) = S_m\cos(\omega t + \varphi)$ on associe le **signal complexe** $\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}$.
  Le signal $s(t) = S_m\cos(\omega t + \varphi)$ est alors la partie réelle de $\underline{s}(t)$: $s(t) = \Re(\underline{s}(t))$.
  - On définit l'**amplitude complexe** : $\underline{S_m} = S_m e^{j\varphi}$, ainsi $\underline{s}(t) = \underline{S_m} e^{j\omega t}$.
  - On détermine l'**amplitude** S_m **de** $s(t)$ en calculant **le module de** $\underline{S_m}$: $S_m = \left|\underline{S_m}\right|$
  - On détermine la **phase à l'origine** φ **de** $s(t)$ en calculant **l'argument de** $\underline{S_m}$: $\varphi = \arg(\underline{S_m})$
- Dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t} = j\omega\underline{s}$
- Primitive $\displaystyle\int \underline{s}\mathrm{d}t = \frac{\underline{s}}{j\omega}$
- L'équation différentielle, en notation complexe s'écrit :

$$\begin{aligned}
-\omega^2\ \underline{s} + \frac{\omega_0}{Q}j\omega\ \underline{s} + \omega_0^2\ \underline{s} &= Ae^{j\omega t}\\
-\omega^2\ \underline{S_m}\ e^{j\omega t} + \frac{\omega_0}{Q}j\omega\ \underline{S_m}\ e^{j\omega t} + \omega_0^2\ \underline{S_m}\ e^{j\omega t} &= Ae^{j\omega t}\\
\underline{S_m} &= \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0\omega}{Q}}
\end{aligned}$$

Impédances complexes

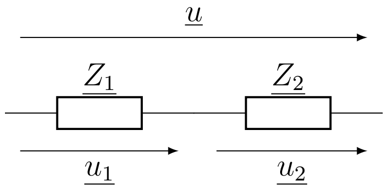
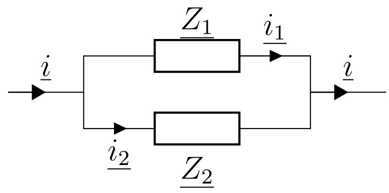
⚠ Cette notion n'est utilisable que si le circuit est linéaire et étudié en régime sinusoïdal.

- Pour un dipôle linéaire passif en convention récepteur, l'**impédance complexe** est définie par :
  $\underline{Z} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} = \dfrac{\underline{U_m}}{\underline{I_m}} = Ze^{j(\varphi_u - \varphi)} = Ze^{j\phi}$
  où $\phi = \varphi_u - \varphi = \arg(\underline{Z})$ est le déphasage de la tension aux bornes du dipôle par rapport à l'intensité du courant qui traverse le dipôle.
  Le module de l'impédance $Z = \left|\underline{Z}\right| = \dfrac{U_m}{I_m}$ s'exprime en ohm (Ω).
- On définit l'**admittance complexe** par : $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{\underline{i}}{\underline{u}} = \dfrac{\underline{I_m}}{\underline{U_m}}$
- **Impédances usuelles**

	Résistance	Bobine	Condensateur
Relation temporelle	 $u = Ri$	 $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	 $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
Relation complexe	$\underline{U_m} = R\underline{I_m}$	$\underline{U_m} = Lj\omega\underline{I_m}$	$\underline{I_m} = Cj\omega\underline{U_m} \Leftrightarrow \underline{U_m} = \dfrac{\underline{I_m}}{Cj\omega}$
Impédance,admittance	$\underline{Z_R} = R$, $\underline{Y_R} = \dfrac{1}{R}$	$\underline{Z_L} = Lj\omega$, $\underline{Y_L} = \dfrac{1}{Lj\omega}$	$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{Cj\omega}$, $\underline{Y_C} = Cj\omega$
$\omega \longrightarrow 0$		Fil	Interrupteur ouvert
$\omega \longrightarrow \infty$		Interrupteur ouvert	Fil
Déphasage	$\varphi_{u/i} = 0$ 	$\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = +\dfrac{\pi}{2}$ 	$\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = -\dfrac{\pi}{2}$ 

Lois des circuits

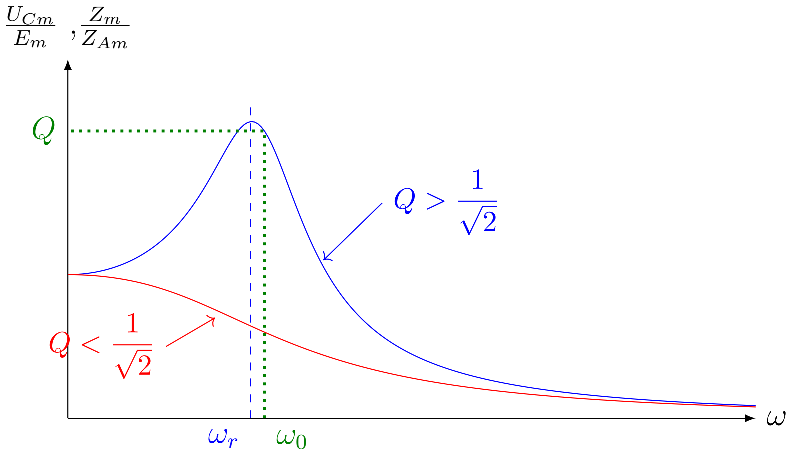
- **Les loi des nœuds et loi des mailles** (ou lois de Kirchhoff) s'écrivent en RSF comme en régime permanent, tant que l'on se trouve dans le cadre de l'ARQS. On utilise **la notation complexe**.
  - Dans une maille, préalablement orientée, la somme algébrique des tensions complexes est nulle :
    $$\sum_k \varepsilon_k \underline{u_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{U_{m,k}} = 0$$
    avec $\varepsilon_k = +1$ si la flèche de u_k est dans le sens de la maille orientée, et $\varepsilon_k = -1$ si la flèche de u_k est en sens opposé au sens de la maille orientée.
  - En un nœud, la somme algébrique des intensités complexes est nulle :
    $$\sum_k \varepsilon_k \underline{i_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{I_{m,k}} = 0$$
    avec $\varepsilon_k = +1$ si le courant i_k arrive dans le nœud et $\varepsilon_k = -1$ si le courant i_k part du nœud.
- **Associations**

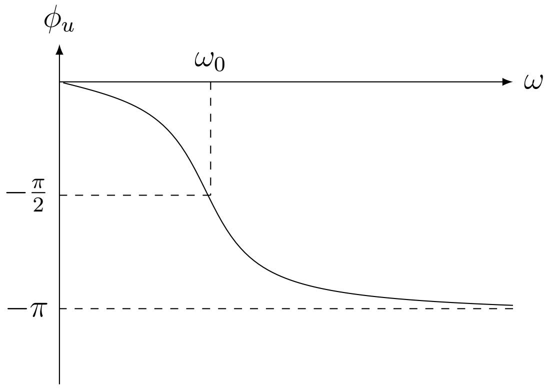
	Série	Dérivation
Schéma		
Expression de $\underline{Z}_{\text{éq}}$	$\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$	$\dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} \Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{éq}} = \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$
Pont diviseur	de tension : $\underline{u}_1 = \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{u}$	de courant : $\underline{i}_1 = \dfrac{\frac{1}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}}\underline{i}$

Résonance en tension U_{Cm} aux bornes du condensateur du RLC série ou d'élongation Z_m

- L'amplitude de la tension aux bornes $u_c(t)$ du condensateur ou de l'élongation du ressort ($Z(t) = \ell(t) - \ell_{éq}$) passe par un maximum à la pulsation $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}} < \omega_0$ si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

  Il n'existe pas de résonance si $Q < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$





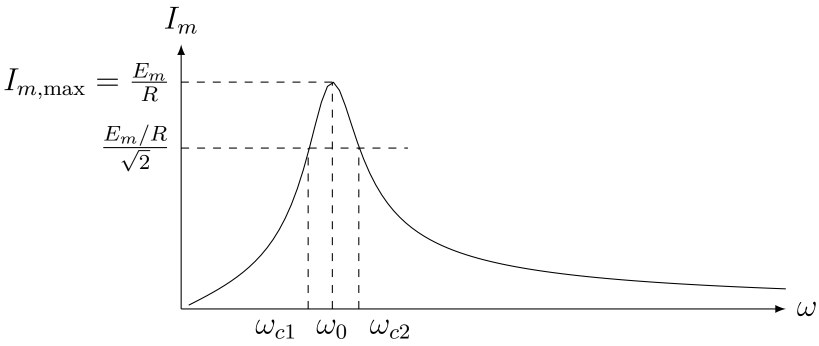
  Quand $Q \gg 1$, alors $\omega_r \approx \omega_0$.

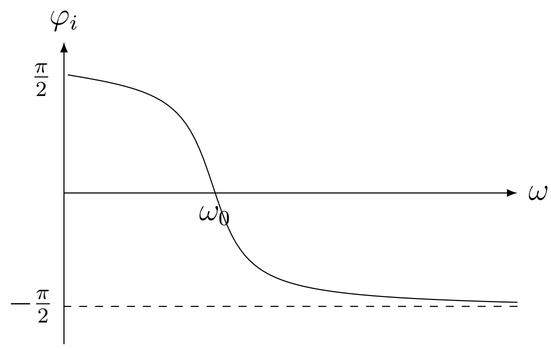
- Lecture graphique pour $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
  - ω_0 ? $\varphi(\omega_0) = -\dfrac{\pi}{2}$: on lit ω_0 sur la courbe de déphasage.
  - Q ? 2 méthodes possibles.
    - À la résonance : $U_{cm}(\omega)$ ou $Z_m(\omega)$ maximales en $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$: on lit ω_r sur la courbe d'amplitude.
      Connaissant ω_0 et ω_r on en déduit la valeur de Q.
    - En ω_0 : $U_{Cm}(\omega_0) = QU_{Cm}(\omega = 0)$ ou $Z_m(\omega_0) = QZ_m(\omega = 0)$, on en déduit Q.

Résonance en intensité du RLC série

- L'intensité du courant ou la vitesse passe par un maximum à la pulsation ω_0 quelque soit le facteur de qualité. À la résonance, i (ou v) est en phase avec le générateur (avec x_A).
  La bande passante $\Delta\omega$ définie comme l'intervalle de pulsations pour lesquelles l'amplitude de l'intensité est supérieure à sa valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$ vaut : $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$.

  $\forall\omega \in [\omega_{c2} - \omega_{c1}]$, $I_m(\omega) > \dfrac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$





- Lecture graphique
  - $\varphi(\omega_0) = 0$ et I_m maximale en ω_0 : on détermine ω_0 sur la courbe de déphasage ou sur la courbe d'amplitude.
  - Sur la courbe d'amplitude on mesure $\Delta\omega$, la largeur de la bande passante dans laquelle $I_m(\omega) \geq \dfrac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$.

    Les deux pulsations de coupure ω_c sont telles que : $I_m(\omega_c) = \dfrac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$

  Avec $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$ on en déduit la valeur de Q.

Ce qu'il faut savoir

❏ Connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.

❏ Connaître la notation complexe d'un signal sinusoïdal.

Ce qu'il faut savoir faire

❏ Établir l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.

❏ Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.

❏ Utiliser la méthode des complexes pour étudier le régime forcé.

❏ Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité.

❏ Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

❏ Expliquer la complémentarité des informations présentes sur les graphes d'amplitude et de phase, en particulier dans le cas de la résonance d'élongation de facteur de qualité modéré.

❏ (TP) Déphasage. Reconnaître une avance ou un retard. Passer d'un décalage temporel à un déphasage et inversement.

Chapitre n°8 Filtrage linéaire

Signaux périodiques

- **Valeur moyenne** d'un signal $T-$périodique : $<y>=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t$
- **Valeur efficace** d'un signal $T-$périodique : $Y_{\text{eff}}=\sqrt{<y^2>}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2\mathrm{d}t}$
- **Signal sinusoïdal** $y(t)=Y_m\cos(\omega t+\varphi)$: $<y>=0$ et $Y_{\text{eff}}=\frac{Y_m}{\sqrt{2}}$

⚠ Ce résultat n'est valable que pour un signal sinusoïdal.

- **Développement en série de Fourier**
Soit un signal $y(t)$ périodique de période T. Ce signal peut s'écrire comme la somme de fonctions sinusoïdales de pulsations multiples de la pulsation de $y(t)$.

On peut alors écrire la série de Fourier : $y(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(\omega_n t+\varphi_n)\right)$

Avec : $\left\{\begin{array}{ll} A_0 & \text{composante continue, c'est la valeur moyenne du signal} \\ \omega=\frac{2\pi}{T} & \text{pulsation de } y(t) \text{ : le fondamental} \\ \omega_n=n\frac{2\pi}{T}=n\omega & \text{pulsation de l'harmonique d'ordre } n \\ A_n & \text{l'amplitude de l'harmonique d'ordre } n \\ \varphi_n & \text{la phase à l'origine de l'harmonique d'ordre } n \end{array}\right.$

- **Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques** : $Y_{\text{eff}}^2=A_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n,\text{eff}}^2$, avec $A_{n,\text{eff}}=\frac{A_n}{\sqrt{2}}$.
- **Aspect expérimental** : Mesures à l'aide d'un multimètre (voltmètre ou ampèremètre).

Mode	Grandeur mesurée	Pour $u(t)=U_0+U_m\cos(\omega t+\varphi)$
Mode DC	Valeur moyenne (composante continue)	$U_{\text{DC}}=U_0$
Mode AC	Valeur efficace de la partie variable du signal	$U_{\text{AC}}=\frac{U_m}{\sqrt{2}}$
Mode AC+DC	Valeur efficace du signal complet	$U_{\text{AC+DC}}=\sqrt{U_0^2+\frac{U_m^2}{2}}$

Fonction de transfert harmonique

Pour un signal d'entrée **sinusoïdal** $e(t)=E_m\cos(\omega t+\varphi_e)$, le signal de sortie s'écrit $s(t)=S_m\cos(\omega t+\varphi_s)$.
Les signaux complexes associés s'écrivent $\underline{e}=E_m e^{j(\omega t+\varphi_e)}=\underline{E_m}e^{j\omega t}$, avec $e(t)=\Re\left(\underline{e}\right)=\Re\left(\underline{E_m}e^{j\omega t}\right)$
et $\underline{s}=S_m e^{j(\omega t+\varphi_s)}=\underline{S_m}e^{j\omega t}$, avec $s(t)=\Re\left(\underline{s}\right)=\Re\left(\underline{S_m}e^{j\omega t}\right)$

- On définit la fonction de transfert harmonique : $\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=\frac{\underline{S_m}}{\underline{E_m}}=\frac{S_m}{E_m}e^{j(\varphi_s-\varphi_e)}$
- Gain : $G(\omega)=|\underline{H}|=\frac{S_m}{E_m}$
- Gain en décibels : $G_{\text{dB}}(\omega)=20\log(|\underline{H}|)$
- Phase : $\phi(\omega)=\arg(\underline{H})=\arg(\underline{S_m})-\arg(\underline{E_m})=\varphi_s-\varphi_e$: déphasage de s par rapport à e.

Action d'un filtre sur un signal quelconque

Principe du filtrage : Modifier le spectre de Fourier d'un signal d'entrée de manière à amplifier ou atténuer certaines fréquences ou gammes de fréquences.

Soit un signal quelconque somme de différents signaux sinusoïdaux : $e(t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\cos(\omega_n t+\varphi_{e,n})$ en entrée d'un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.

Le signal en sortie s'écrit : $s(t)=\sum_{n=1}^{\infty}S_n\cos(\omega_n t+\varphi_{s,n})$, avec $S_n=|\underline{H}(j\omega_n)|\times E_n$ et $\varphi_{s,n}=\varphi_{e,n}+\arg(\underline{H}(j\omega_n))$

Effets particuliers d'un filtre

- **<u>Dérivateur :</u>** filtre passe-haut du premier ordre dont la fréquence de coupure est très supérieure à la fréquence du signal d'entrée (dans la zone où $\underline{H} \approx j\omega$)
- **<u>Intégrateur :</u>** filtre passe-bas du premier ordre dont la fréquence de coupure est très inférieure à la fréquence du signal d'entrée (dans la zone où $\underline{H} \approx \dfrac{1}{j\omega}$)
- **<u>Moyenneur :</u>** filtre passe-bas de fréquence de coupure très basse par rapport à la fréquence du signal d'entrée. Il ne laisse passer que le terme de fréquence nulle, c'est-à-dire la valeur moyenne.

<u>Diagramme de Bode</u>

C'est la représentation graphique de la fonction de transfert. Il se compose de deux courbes :

- la courbe de gain représentant $G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$ en fonction de ω en échelle logarithmique ou de $\log(\omega)$ ou $\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$
- la courbe de phase représentant $\varphi = \arg(\underline{H})$ en fonction de ω en échelle logarithmique ou de $\log(\omega)$ ou $\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$

(ω_0 étant une pulsation de référence à déterminer pour chaque filtre).

- **<u>Diagramme de Bode asymptotique</u>** : pour des pulsations ω très éloignées de la pulsation ω_0, on obtient des équations affines (asymptotes) en conservant le terme prépondérant pour chaque polynôme en $j\omega$.
- **<u>Pulsation de coupure</u>** : ω_c telle que $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,\max} - 3\text{ dB} \Leftrightarrow G(\omega_c) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$
- **<u>Bande passante</u>** : $\forall\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, $G_{dB}(\omega) \geq G_{dB,\max} - 3\text{ dB} \Leftrightarrow G(\omega) \geq \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$

<u>Mise en cascade de filtres</u>

Lors de la mise en cascade de filtres, le fonctionnement des filtres est assuré si **les filtres sont de faible impédance de sortie et de forte impédance d'entrée**.
Lorsque cette condition est vérifiée, les fonctions de transfert restent inchangées et la fonction de transfert du circuit global est égale au produit des fonctions de transferts de chaque filtre.

Ce qu'il faut savoir

- ❏ Savoir qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme de fonctions sinusoïdales.
- ❏ Définir la valeur moyenne et la valeur efficace.
- ❏ Savoir que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
- ❏ Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre, afin de l'utiliser comme moyenneur, intégrateur, ou dérivateur.
- ❏ Comprendre l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.

Ce qu'il faut savoir faire

- ❏ Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
- ❏ Établir la fonction de transfert d'un filtre linéaire d'ordre 1.
- ❏ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 et ses représentations graphiques, pour conduire l'étude de la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.

  ♣ <u>*Pour un signal sinusoïdal $e(t) = E_m\cos(\omega t + \varphi_e) \longrightarrow s(t) = S_m\cos(\omega t + \varphi_s)$*</u>

  — *Avec la fonction de transfert :*

  — *S_m ? Utiliser le module de la fonction de transfert (évalué à la pulsation de e) : $S_m = |\underline{H}(\omega)| \times E_m$*

  — *φ_s ? Utiliser l'argument de la fonction de transfert (évalué à la pulsation de e) : $\varphi_s = \varphi_e + \arg(\underline{H}(j\omega))$*

  — *Avec le diagramme de Bode :*

— *S_m ? Avec le diagramme de Bode en gain : $G_{dB} = 20\log(G) = 20\log\dfrac{S_m}{E_m}$, G_{dB} est lu graphiquement à la pulsation ω de $e(t)$, et après un petit calcul vous en déduisez $S_m = 10^{G_{dB}(\omega)/20} \times E_m$.*

— *φ_s ? Avec le diagramme de Bode en phase : vous lisez $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$ à la pulsation ω de $e(t)$, et vous en déduisez $\varphi_s = \varphi_e + \phi(\omega)$.*

♣ *Pour un signal $e(t) = E_1\cos(\omega_1 t + \varphi_{e1}) + E_2\cos(\omega_2 t + \varphi_{e2}) \longrightarrow s(t) = S_1\cos(\omega_1 t + \varphi_{s1}) + S_2\cos(\omega_2 t + \varphi_{s2}$*

Il faut mener l'étude pour chaque signal sinusoïdal séparément.
Suivre la même méthode que précédemment, d'abord pour $e_1(t)$ (vous en déduisez $s_1(t)$) à la pulsation ω_1 puis pour $e_2(t)$ (vous en déduisez $s_2(t)$) à la pulsation ω_2, il ne vous reste plus qu'à sommer les deux résultats.

♣ *Pour un signal périodique, dont le développement en série de Fourier vous est donné, procéder de la même façon que dans le cas de la somme de deux signaux.*
En général, seule une réponse qualitative vous sera demandée en vous appuyant sur les diagrammes de Bode fournis pour déterminer la composante majoritairement transmise par le filtre : pour cela, tracer l'allure du spectre du signal d'entrée sur le diagramme de Bode et regarder quelles composantes sont dans la bande passante et quelles composantes sont dans les bandes coupées.

❏ Utiliser les échelles logarithmiques.
Vous devez savoir lire des fréquences en échelle log, et positionner une fréquence sur une échelle log.

❏ Tracer le diagramme asymptotique d'un filtre du premier ordre.

❏ Interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après l'expression de la fonction de transfert.
En 2 étapes :

— *lecture des asymptotes sur les diagrammes de Bode (valeur, pente)*

— *recherche du terme prépondérant de la fonction de transfert à basse fréquence et à haute fréquence, pour en déduire les expressions du gain en décibel et de la phase à basse et haute fréquences.*

❏ Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre, afin de l'utiliser comme moyenneur, intégrateur, ou dérivateur.
Retenir quel filtre est à utiliser dans ces trois cas, puis pour l'intégrateur et le dérivateur, partir de la fonction de transfert en ne conservant que le terme dominant, puis repasser en notation réelle pour conclure.

❏ Comprendre l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.

❏ [Approche documentaire] Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique.

❏ [TP] Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.

❏ [TP] Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.

Chapitre n°9 Amplificateurs linéaires intégrés

- L'**ALI** a **deux entrées** : l'**entrée inverseuse** ($-$), de potentiel V^- et l'**entrée non inverseuse** ($+$), de potentiel V^+, et **une sortie**, dont on note le potentiel V_s.
  On définit la **tension différentielle en entrée** par : $\boxed{\varepsilon = V^+ - V^-}$

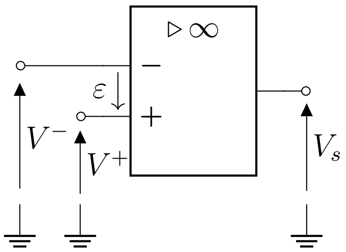


Schéma européen

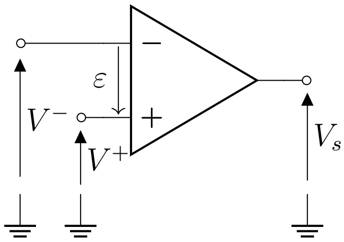


Schéma américain

Modèle de l'ALI idéal

- Les courants de polarisation i^+ et i^- sont nuls.
- Le courant de sortie i_s est indépendant de la tension de sortie V_s : l'impédance de sortie de l'ALI est nulle.
- La réponse de l'ALI est instantanée.

Régime linéaire

- De façon générale, une rétroaction sur la borne $\ominus$ a un effet stabilisant, ainsi **tous les ALI fonctionnant en régime linéaire ont une rétroaction négative**.
- Un **ALI idéal fonctionnant en régime linéaire**, la tension différentielle en entrée est nulle :

$$\varepsilon = 0 \Leftrightarrow V^+ = V^-$$

Établir la relation entrée-sortie

- Représenter le circuit et définir une tension aux bornes de chaque dipôle et une intensité à travers chaque dipôle.
- Utiliser le fait que les courants d'entrée i^+ et i^- sont nuls pour un ALI idéal.
- Écrire que pour un ALI idéal en régime linéaire : $V^- = V^+$
- Il faut ensuite exprimer V^+ et V^- en fonction de V_s et V_e. Pour cela :
  - Voir si l'on peut simplement remplacer V^+ et V^- par V_e, ou par V_s, ou par 0 V.
  - OU Écrire un diviseur de tension sur les entrées $\oplus$ ou $\ominus$ (possible car les courants de polarisations sont nuls).
  - OU Écrire la loi des nœuds et les relations courant/tension des différents dipôles.
- Utiliser ces relations dans $V^- = V^+$.
- Manipuler les relations pour obtenir l'expression de V_s en fonction de V_e ou $\dfrac{V_s}{V_e}$.

Établir l'impédance d'entrée d'un montage

- Exprimer la relation entre la tension V_e en entrée du montage, et le courant d'intensité i_e entrant dans le montage.
- Si besoin, utiliser $V^- = V^+$ pour un ALI idéal en régime linéaire.
- Conclure en utilisant la définition de l'impédance d'entrée : $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{V_e}}{\underline{i_e}}$.