Thème I. Ondes et signaux

TD n°6 Oscillateurs libres amortis

Méthode : Comment travailler des exercices ?

Avant la séance de TD :

- ★ Sur une feuille de brouillon, avec un crayon à la main et le chapitre ouvert sous les yeux.
- ★ Essayer des « trucs » même si cela n'aboutit pas.
- ★ Faire des schémas complets et suffisamment grands.
- ★ Ne rien écrire sur l'énoncé de TD afin de pouvoir refaire les exercices après la correction en classe.
- ★ Réfléchir environ 10 à 15 min sur chaque exercice demandé. Si vous bloquez complètement sur une question/un exercice, passez à la suite au bout de 10 min, et me poser des questions soit directement soit par mail nvalade.pcsi@gmail.com .

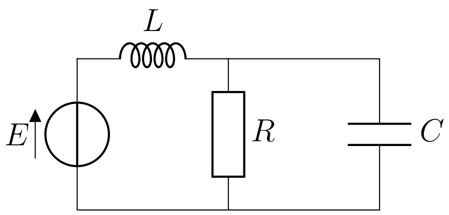
Après la séance de TD :

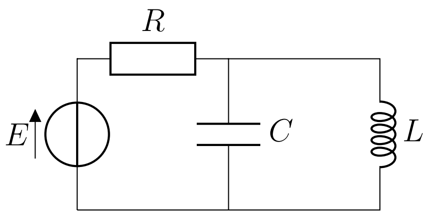
- ★ Refaire les exercices corrigés ensemble, sans regarder le corrigé dans un premier temps.
- ★ Une fois l'exercice terminé ou si vous êtes totalement bloqué, reprendre avec le corrigé.

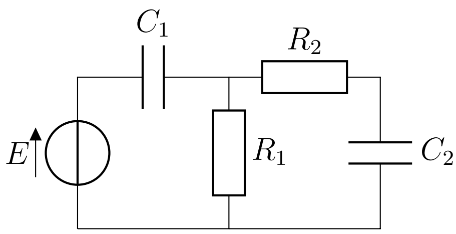
I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Recherche de régime permanent

Déterminer la tension aux bornes de chaque condensateur ou le courant circulant dans chaque bobine lorsque le régime permanent est atteint.



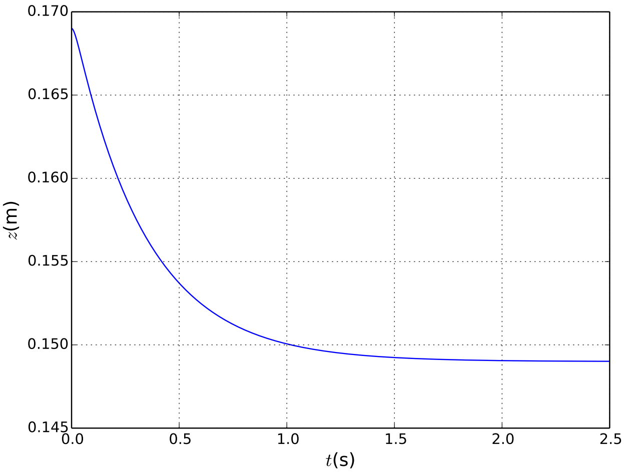


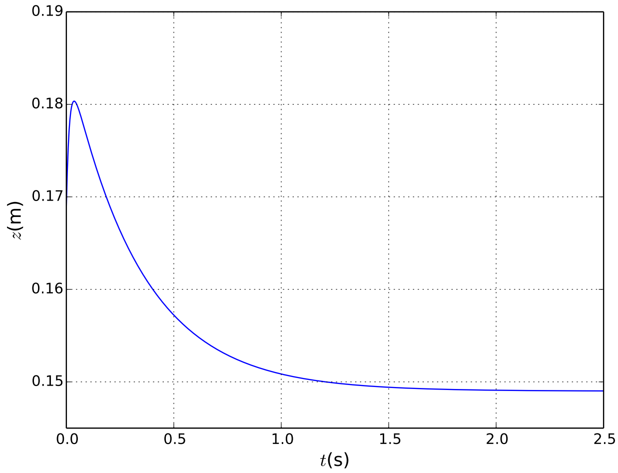


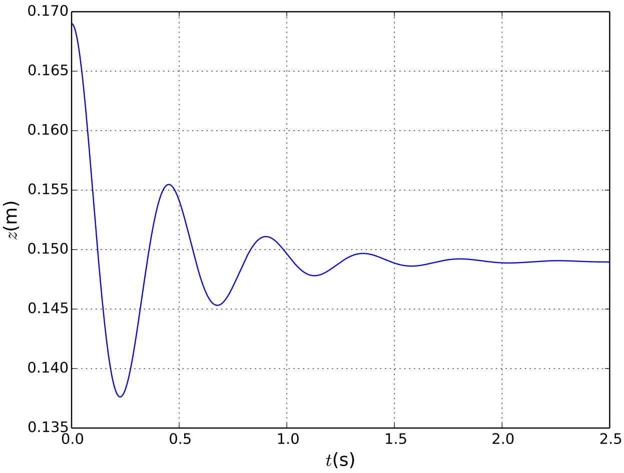
Exercice n°2 Lectures de graphes

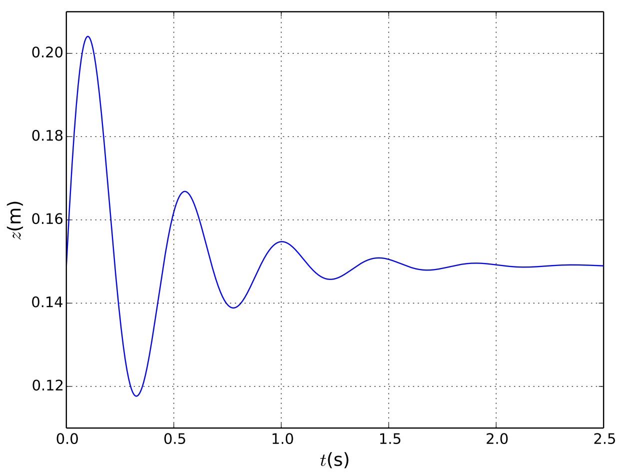
Associer à chaque graphe, le jeu de conditions initiales et le jeu de paramètre correspondant, ci-dessous.

- Les conditions initiales suivantes :
  - $z(0) = z_{\text{éq}} + 2,0\ \text{cm}\,;\ \dot{z}(0) = 0\ \text{m/s}$
  - $z(0) = z_{\text{éq}}\,;\ \dot{z}(0) = 1\ \text{m/s}$
  - $z(0) = z_{\text{éq}} + 2,0\ \text{cm}\,;\ \dot{z}(0) = 1\ \text{m/s}$
- Les couples de paramètres suivants :
  - $k = 20\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}\,;\ m = 0,1\ \text{kg}\,;\ \alpha = 0,5\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$
  - $k = 20\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}\,;\ m = 0,1\ \text{kg}\,;\ \alpha = 7\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$









Exercice n°3 Détermination d'un coefficient de viscosité

Capacités exigibles :

✓ *Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.*

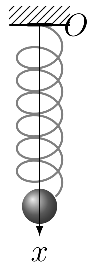
✓ *Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.*

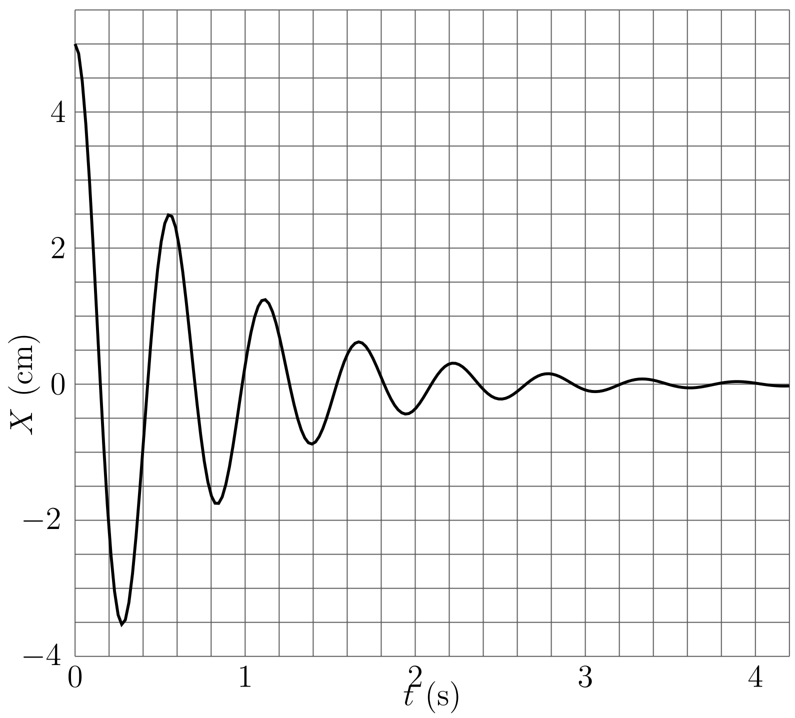
✓ *Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.*

Une sphère de masse volumique ρ et de rayon $r = 1,0$ cm est suspendue à un ressort vertical de constante de raideur $k = 5,0$ N $\cdot$ m^{-1} et le longueur à vide $\ell_0 = 10$ cm et plongée dans un liquide de masse volumique $\rho_e < \rho$ et de coefficient de viscosité η. La sphère étant plongée dans un liquide, elle est soumise à la poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_e V \overrightarrow{g}$ avec V le volume de la bille.

On supposera également que lorsque la sphère est animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$, la force de frottement fluide peut se mettre sous la forme : $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta r \overrightarrow{v}$.

Un capteur de position fournit l'évolution de l'abscisse $X(t)$ de la masse par rapport à sa position d'équilibre au cours du temps.





Q1. Déterminer la longueur ℓ_e du ressort lorsque la bille est à l'équilibre.

Q2. Établir l'équation différentielle vérifiée par x.

Q3. On pose $X = x - x_e$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par X.

Q4. Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction des données du problème.

Q5. D'après l'enregistrement, quelle est le régime d'oscillation de la masse ? En déduire une condition sur le facteur de qualité. Avec cette hypothèse, résoudre l'équation différentielle. Donner l'expression de la pseudo-période T des oscillations la sphère.

Q6. Déterminer les conditions initiales du mouvement. En déduire l'expression de $X(t)$.

Q7. On définit le décrément logarithmique, noté δ, par $\delta = \ln\left(\dfrac{X(t)}{X(t+T)}\right)$, où T est la pseudo-période.

Montrer que δ s'exprime selon $\delta = \dfrac{\omega_0 T}{2Q}$.

En déduire l'expression de δ en fonction de Q uniquement.

Q8. À partir de l'enregistrement, déterminer le décrément logarithmique et en déduire la valeur du facteur de qualité Q, puis la pulsation propre des oscillations ω_0.

Q9. Sachant que la boule est de rayon $r = 1,0$ cm, en déduire la valeur de la masse volumique ρ du matériau dont elle est faite, ainsi que la coefficient de viscosité η du liquide dans laquelle elle est plongée.

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Pont de Wien

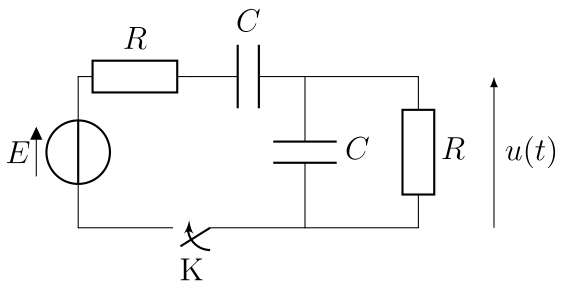
Capacités exigibles :

✓ *Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.*

✓ *Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.*

✓ *Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine.*

On considère le circuit représenté ci-contre, appelé pont de Wien.
Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert et les deux condensateurs, de même capacité C, sont déchargés.
On ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Les deux résistances sont identiques.



Q1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u et montrer qu'elle s'écrit sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 3\omega_0\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

Q2. Déterminer les conditions initiales $u(t = 0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+)$.

Q3. En déduire l'expression de $u(t)$. Représenter graphiquement son allure.

Exercice n°5 Encore un RLC !

Capacités exigibles :

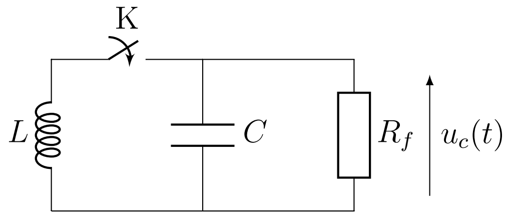
✓ *Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.*

✓ *Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.*

✓ *Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.*

✓ *Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine.*

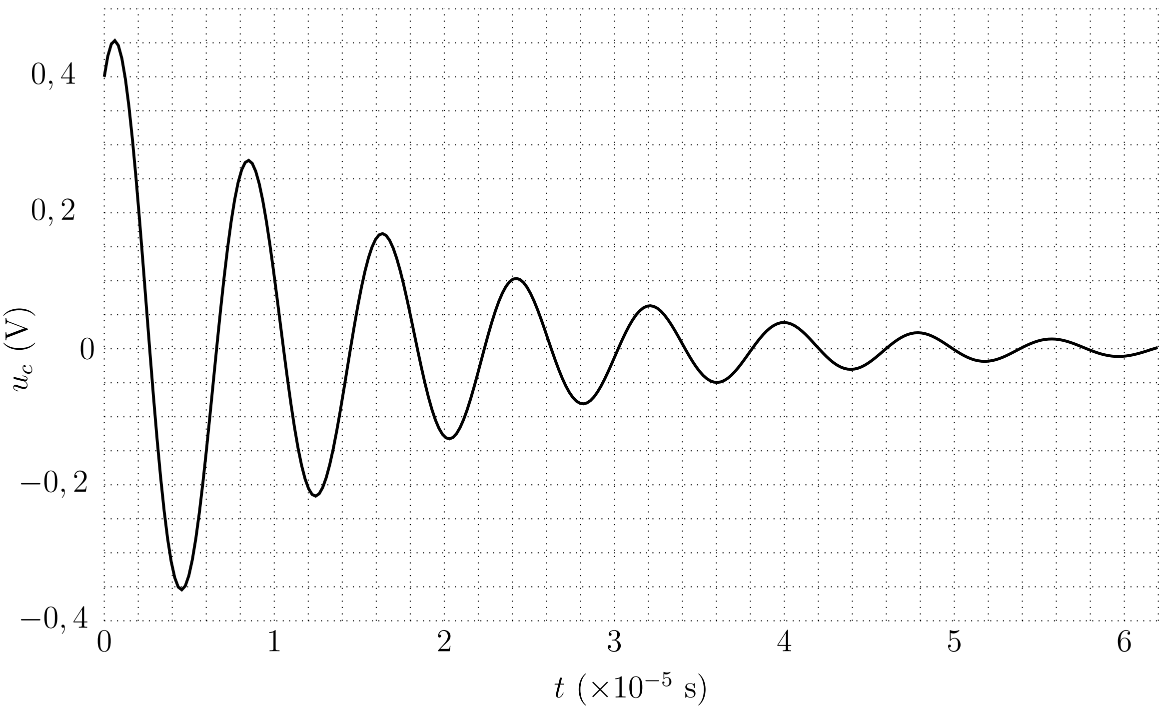
On considère un circuit constitué d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur réel de capacité C et de résistance de fuite R_f.
Pour $t < 0$, la tension aux bornes du condensateur vaut U_0.
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.
Données : $C = 5,0$ nF



Q1. Établir l'équation différentielle dont u_c est solution et déterminer les expressions de la pulsation propre et du facteur de qualité en fonction de R_f, L et C.

Q2. Déterminer les expressions de $u_c(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+)$ en fonction de q_0, R_f, C.

On a enregistré l'évolution de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps.



Q3. Déterminer le régime de l'oscillateur.

Q4. Établir complètement la solution $u_c(t)$ de l'équation différentielle précédente.

Q5. Établir l'expression du décrément logarithmique, noté δ, défini par $\delta = \ln\left(\dfrac{u_c(t)}{u_c(t+T)}\right)$, où T est la pseudo-période, en fonction de ω_0, T et Q, puis en fonction de Q uniquement.

Q6. Déterminer graphiquement la valeur du décrément logarithmique δ.

Q7. Déduire de toutes ces mesures les valeurs des composants R_f, L ainsi que la tension initiale U_0.

III Extraits du cahier d'entraînement de physique-chimie

Entraînement 1.16 — Équation canonique.

De nombreux circuits du second-ordre sont en fait des oscillateurs dont l'équation canonique est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x(t) = f(t),$$

où ω_0 est appelée *pulsation propre* et Q *facteur de qualité*.

Donner la dimension de :

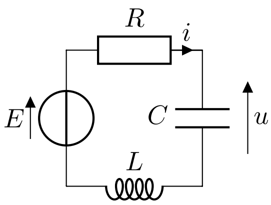
a) ω_0 .... $\boxed{}$ b) Q .... $\boxed{}$

On considère l'équation $RC\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i(t) = 0$. Exprimer :

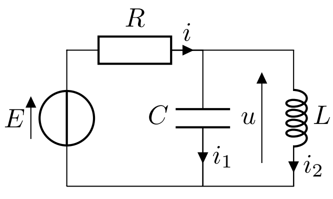
c) ω_0 .... $\boxed{}$ d) Q .... $\boxed{}$

Entraînement 1.17 — Mise en équation.

On considère les deux circuits suivants, pour lesquels les fém des générateurs de tension E sont constantes.



montage 1



montage 2

À l'aide de la loi des mailles et des nœuds, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u :

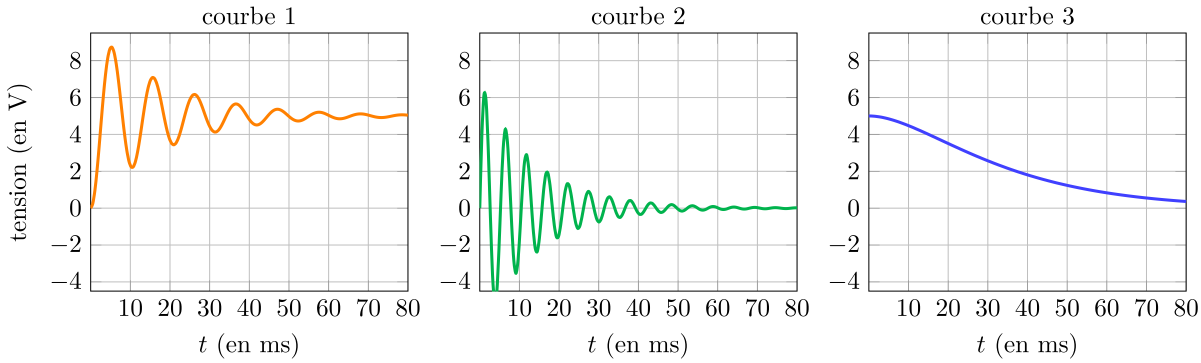
a) Dans le montage 1 .... $\boxed{}$

b) Dans le montage 2 .... $\boxed{}$

Entraînement 1.19 — Réponses d'un circuit du second-ordre.

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$ au cours du temps. Toutes ces grandeurs évoluent suivant une équation différentielle du type

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x(t) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$



a) Quelle courbe est associée au plus grand facteur de qualité Q ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

b) On a

$$u_1(t) = a\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - b\mathrm{e}^{-t/\tau_2}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

c) On a

$$u_2(t) = E\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

d) On a

$$u_3(t) = E\Big[1 - (\cos(\Omega' t) + a\sin(\Omega' t))\mathrm{e}^{-t/\tau'}\Big].$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

e) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-pulsation Ω qui intervient dans $u_2(t)$

. . . .