Lundi 6 novembre 2023

Devoir Surveillé n°3 (1) – *Corrigé*

Consignes générales :

- Faites des SCHÉMAS ! ! ! !
- Commencer les réponses par une PHRASE qui NE commence PAS par donc, parce que, oui, non, du coup...
- Interdisez-vous d'utiliser « on .... » et « on a ».
- ENCADRER l'expression LITTÉRALE FINALE.

Exercice n°0 Qui est-ce ?

Solution: Anne L'HUILLIER (5e femme à l'avoir !) prix nobel de physique 2023, pour ses travaux sur les lasers qui émettent des impulsions de quelques attosecondes, ce qui permet de suivre les mouvements des électrons lors de réactions chimiques.

Exercice n°1 Étude des oscillations d'une molécule de HCl *(Durée ∼ 45 min)*

On étudie les vibrations propres d'une molécule de chlorure d'hydrogène $HC\ell$ qui se font à une fréquence $f_0 = 8,5.10^{13}$ Hz.

On modélise la molécule par un **atome d'hydrogène mobile** relié à un **atome de chlore fixe** dans le référentiel du laboratoire par un « ressort » de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

L'étude du mouvement est menée dans le référentiel du laboratoire, que l'on considèrera galiléen à l'échelle de l'expérience.

On suppose que le mouvement de l'atome d'hydrogène est uniquement horizontal et on note (Ox) l'axe correspondant. L'**origine O est placée au niveau de la position d'équilibre** de l'atome d'hydrogène. On note $\overrightarrow{u_x}$ le vecteur unitaire qui dirige l'axe.

On considèrera que la **molécule n'est pas soumise à la gravité**, et « **flotte dans le vide** ».

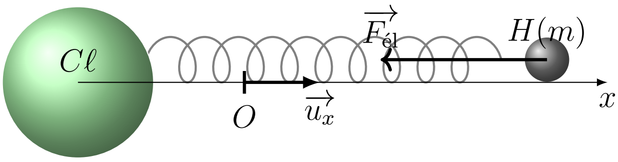
R1. Donner l'expression de la force de rappel élastique qui s'exerce sur l'atome d'hydrogène en définissant précisément chaque terme. Donner l'unité dans le système international de la constante de raideur du ressort.

Solution: La force de rappel élastique du ressort s'exprime $\boxed{\overrightarrow{F}_{el} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u}_x}$ avec $\ell(t)$ la **longueur instantanée** du ressort et ℓ_0 sa **longueur À VIDE**, k la constante de raideur du ressort et $\overrightarrow{u}_x$

le vecteur unitaire dans la direction horizontal.
La constante de raideur s'exprime dans le système international en N/m ou kg/s^2.

R2. Déterminer la distance $\ell_{éq}$ entre l'atome de chlore et l'origine O de l'axe. *La réponse devra être justifiée.*

Solution: On étudie ici le système atome d'hydrogène de masse m.
Toute l'étude se fera dans le référentiel du laboratoire (ou référentiel terrestre) supposé galiléen.
Bilan des actions mécaniques : L'atome d'hydrogène est soumis seulement à la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F}_{el} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u}_x$. On néglige tout frottement ainsi que l'influence de la gravité.



À l'équilibre $\overrightarrow{F_{él}} = \overrightarrow{0}$, soit $\boxed{\ell_{éq} = \ell_0}$, c'est la distance entre l'atome de chlore et l'origine de l'axe qui est située à la position d'équilibre.

R3. Établir, en soignant la rédaction, l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la position x de l'atome d'hydrogène.
Puis la mettre sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Exprimer ω_0 en fonction des constantes de l'exercice. Comment s'appelle-t-elle ? Quelle est son unité ?

Solution:
On applique le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\overrightarrow{F}_{el} = m\overrightarrow{a}$
Le mouvement s'effectuant seulement selon l'axe (Ox), on a $\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u}_x$.
En projection sur l'axe (Ox), le PFD donne : $-k(\ell(t) - \ell_0) = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$
La position de l'atome d'hydrogène étant repérée par rapport à la position d'équilibre, on a la relation $x(t) = \ell(t) - \ell_0$, on peut donc écrire :

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0}$$

On obtient une équation différentielle d'ordre 2 appelée équation de l'oscillateur harmonique.
On peut mettre l'équation précédente sous la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

On pose alors $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ la pulsation propre de l'oscillateur (en rad/s).

R4. Exprimer la constante de raideur k du « ressort » en fonction de la fréquence propre f_0 d'oscillation de la molécule, et de la masse d'un atome d'hydrogène.

Solution: La pulsation propre est reliée à la fréquence propre et à k et m par $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

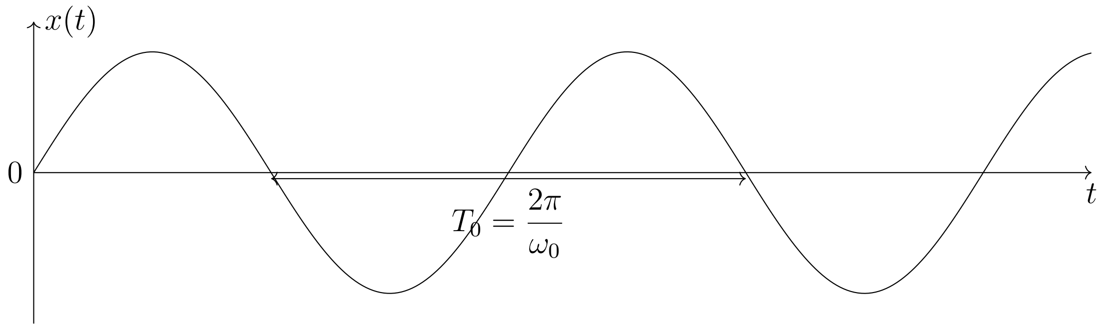
Ainsi $\boxed{k = 4\pi^2 f_0^2 m}$.

R5. Une perturbation extérieure de l'atome d'hydrogène impose à l'atome d'hydrogène initialement situé à la position d'équilibre, une vitesse $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$, avec $v_0 > 0$.
Résoudre complètement l'équation différentielle.

Solution:
La solution générale de l'équation différentielle précédente s'écrit : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$
Or $x(0) = A = 0$, donc $A = 0$.
de plus $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B\omega_0\cos(\omega_0 t)$
à $t = 0$: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 = B\omega_0$
Ainsi : $\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

R6. Représenter l'allure de $x(t)$. Repérer dessus la période propre dont on donnera l'expression en fonction de k et m.

Solution: ***Ne pas oublier les noms des axes !***



R7. Rappeler les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique.

Solution: Énergie cinétique : $\boxed{\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv^2}$

Énergie potentielle élastique : $\boxed{\mathscr{E}_{p,\acute{e}l} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cste}}$
Dans la suite on choisira la constante nulle dans l'expression de l'énergie potentielle élastique.

R8. Établir les expressions littérales de l'énerige cinétique et de l'énergie potentielle élastique. En déduire l'expression de l'énergie mécanique de l'atome d'hydrogène en fonction de m et v_0. Commenter.

Solution: L'énergie mécanique est la somme des énergies cinétiques et potentielles.

$$\begin{aligned}
\text{Énergie cinétique : } \mathscr{E}_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\
&= \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) \\
\text{Énergie potentielle de pesanteur : } \mathscr{E}_{p,el} &= \frac{1}{2}k(\ell(t)-\ell_0)^2 \\
&= \frac{1}{2}k(x(t))^2 \\
&= \frac{1}{2}k\frac{v_0^2}{\omega_0^2}\sin^2(\omega_0 t)
\end{aligned}$$

On remarque que $m = \dfrac{k}{\omega_0^2}$, on peut donc écrire l'énergie cinétique $\mathscr{E}_{p,el} = \dfrac{1}{2}mv_0^2\sin^2(\omega_0 t)$, d'où l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_m &= \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_{p,el} \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2(\omega_0 t)
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2}$

L'énergie mécanique est constante, ce qui est conforme au modèle dans lequel nous n'avons pas pris en compte les frottements.

Exercice n°2 Lectures graphiques *(Durée ∼ 10 min)*

On donne différentes évolutions temporelles possibles d'un oscillateur harmonique mécanique selon les conditions initiales.

R9. Associer, en justifiant précisément, chaque courbe avec l'expression correspondante.

Solution:

— Figure 1 : le système part de $x(0) > 0$ avec une vitesse $\dot{x}(0) > 0$ (signe de la pente de la tangente à l'origine) : c'est le cas c), où $x(0) = a > 0$ et $\dot{x}(0) = \dfrac{v_0}{\omega_0} > 0$

— Figure 2 : le système part de $x(0) > 0$ avec une vitesse $\dot{x}(0) = 0$ (tangente à l'origine horizontale) : c'est le cas a), où $x(0) = a > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$

— Figure 3 : le système part de $x(0) > 0$ avec une vitesse $\dot{x}(0) < 0$ (signe de la pente de la tangente à l'origine) : c'est le cas d), où $x(0) = a > 0$ et $\dot{x}(0) = -\dfrac{v_0}{\omega_0} < 0$

— Figure 4 : le système part de $x(0) = 0$ avec une vitesse $\dot{x}(0) < 0$ (signe de la pente de la tangente à l'origine) : c'est le cas b), où $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = -\dfrac{v_0}{\omega_0} < 0$

R10. Déterminer les valeurs de a.

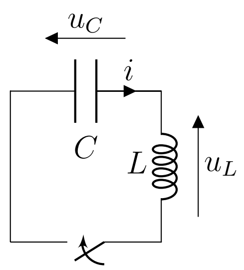
Solution: Dans les trois premiers cas $x(0) = a = 2$ cm.

R11. Déterminer la période propre, la pulsation propre et l'amplitude de la figure **??**. Comment en déduire v_0 ?

Solution:
- Période propre $T_0 = 3,0$ s
- Pulsation propre : $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{3}$ rad · s^{-1} ≈ 2 rad · s^{-1}
- Amplitude figure **??** : $X_m = 2,5$ cm, or $x_m = \dfrac{v_0}{\omega_0}$, donc $v_0 = X_m\omega_0 \approx 5$ cm · s^{-1}

Exercice n°3 Étude d'un circuit LC *(Durée ∼ 25 min)*

On étudie le circuit ci-contre constitué d'un condensateur et d'une bobine idéale.
Pour $t < 0$, le condensateur a été chargé sous la tension $U_0 > 0$.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le condensateur à la bobine.

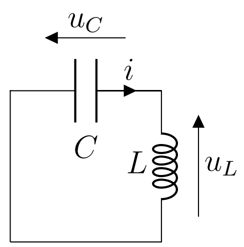


R12. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans le circuit.
Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 i(t) = 0$$

et identifier la pulsation propre du circuit.

Solution:
Loi des mailles : $u_C + u_L = 0$
Relation du condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$
Relation de la bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
Ainsi $i = -C\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$



Enfin : $i = -LC\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$, soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{i(t)}{LC} = 0}$, que l'on identifie avec $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 i(t) = 0}$ qui est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$.

R13. Que valent $u_c(0^+)$ et $i(0^+)$? La réponse devra être justifiée précisément.
Puis, justifier très proprement que $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\dfrac{U_0}{L}$.

Solution: Pour $t < 0$, le condensateur est chargé, donc $u_c(0^-) = U_0$. Or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$.
Pour $t < 0$ aucun courant ne circule, donc $i(0^-) = 0$. Or l'intensité du courant à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i(0^+) = i(0^-) = 0$.
D'après la loi des mailles à $t = 0^+$: $u_C(0^+) + u_L(0^+) = 0$, soit $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = -U_0$

Enfin $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\dfrac{U_0}{L}}$

R14. Résoudre l'équation différentielle compte tenu des conditions initiales.

Solution: La solution générale s'écrit $i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ dont les constantes d'intégration se déterminent à l'aide des conditions initiales.

$i(0^+) = 0 = A$

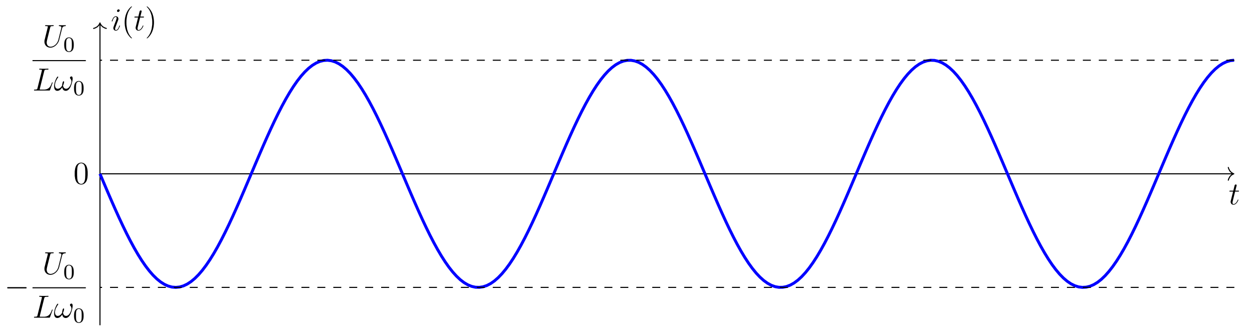
Dérivée de i par rapport au temps : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{-U_0}{L} = B\omega_0$, donc $B = \dfrac{-U_0}{L\omega_0}$.

Ainsi $\boxed{i(t) = -\dfrac{U_0}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

R15. Représenter l'allure de $i(t)$.

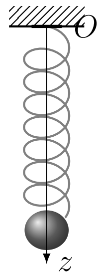
Solution:



Exercice n°4 Oscillateur mécanique amorti *(Durée ~ 40 min)*

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel M de masse m accroché à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'axe vertical descendant est noté (Oz), avec O situé au point d'attache du ressort.

On modélise les frottements visqueux, c'est-à-dire les frottements exercés par un fluide (gaz ou liquide) visqueux, par une force $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, où α est une constante positive.



R16. Établir l'expression de la longueur du ressort $\ell_{éq}$ à l'équilibre.

Solution:

— Système étudié : Masse m

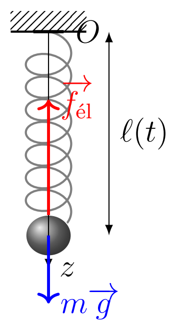
— Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen sur la durée de l'expérience

— Bilan des actions mécaniques :

  — Poids $m\overrightarrow{g} = mg\overrightarrow{e_z}$

  — Force de rappel élastique : $\overrightarrow{f_{\text{élastique}}} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_z}$

  — Force de frottement fluide : $\overrightarrow{f_{\text{frott}}} = -h\overrightarrow{v} = -\alpha\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_z}$



À l'équilibre : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et

$$\begin{aligned} \sum \overrightarrow{F} &= \overrightarrow{0} \\ -k(\ell_{éq} - \ell_0)\overrightarrow{u_z} + mg\overrightarrow{u_z} + \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{0} \\ k(\ell_{éq} - \ell_0) &= mg \end{aligned}$$

Soit $\boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}}$

R17. Établir l'équation différentielle vérifiée par z, et l'écrire sous la forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$$

Identifier les expressions de ω_0 et Q. Quelles sont les noms et unités de ω_0 et Q ?
On vérifiera la cohérence entre $z_{\text{éq}}$ identifié ici, et $\ell_{\text{éq}}$ établie précédemment.

Solution: Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la masse m dans le référentiel terrestre d'étude :
$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{\text{élastique}}} + \overrightarrow{f_{\text{frott}}}$
Le mouvement ayant uniquement lieu selon l'axe vertical (Oz) : $\overrightarrow{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_z}$, ainsi : $m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_z} = mg\overrightarrow{e_z} - k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_z} - \alpha\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_z}$.
En factorisant par $\overrightarrow{e_z}$: $\left(m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} - mg + k(\ell - \ell_0) + \alpha\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} - mg + k(\ell - \ell_0) + \alpha\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$
Or $\ell(t) = z(t)$, ainsi $m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} - mg - k\ell_0 + kz + \alpha\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\alpha}{m}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \dfrac{k}{m}z = g + \dfrac{k}{m}\ell_0$, avec $g + \dfrac{k}{m}\ell_0 = \dfrac{k}{m}\left(\ell_0 + \dfrac{mg}{k}\right) = \dfrac{k}{m}\ell_{\text{éq}}$
Enfin : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\alpha}{m}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \dfrac{k}{m}z = \dfrac{k}{m}z_{\text{éq}}}$
Cette équation différentielle est de la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$

On identifie la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$.

Et le facteur de qualité tel que $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{h}{m}$, soit $Q = \dfrac{m}{h}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, soit $\boxed{Q = \dfrac{\sqrt{mk}}{h}}$

R18. On donne les valeurs des différents paramètres : $m = 0,10$ kg ; $k = 10$ N $\cdot$ m^{-1} et $\alpha = 0,5$ kg $\cdot$ s^{-1}.
Calculer la valeur numérique Q. Quel est le régime transitoire que va suivre M ?

Solution: $Q = \dfrac{1}{0,5} = 2 > \dfrac{1}{2}$, le régime transitoire est donc pseudo-périodique.

R19. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle. On introduira deux constantes d'intégration.
On fera intervenir les deux grandeurs $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$ et $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$.
Comment s'appelle Ω ?

Solution:
1. Résolution de l'équation homogène :
   a) Polynôme caractéristique : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$
   b) Discriminant : $\Delta = 4\omega_0^2\left(\dfrac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0$, car $Q > \dfrac{1}{2}$.

c) Racines : $r = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$

d) Solution homogène : $z_H(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big)$, avec $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$ la pseudo-pulsation.

2. Solution particulière : $z_P = z_{\text{éq}}$
N'oubliez pas la solution particulière.

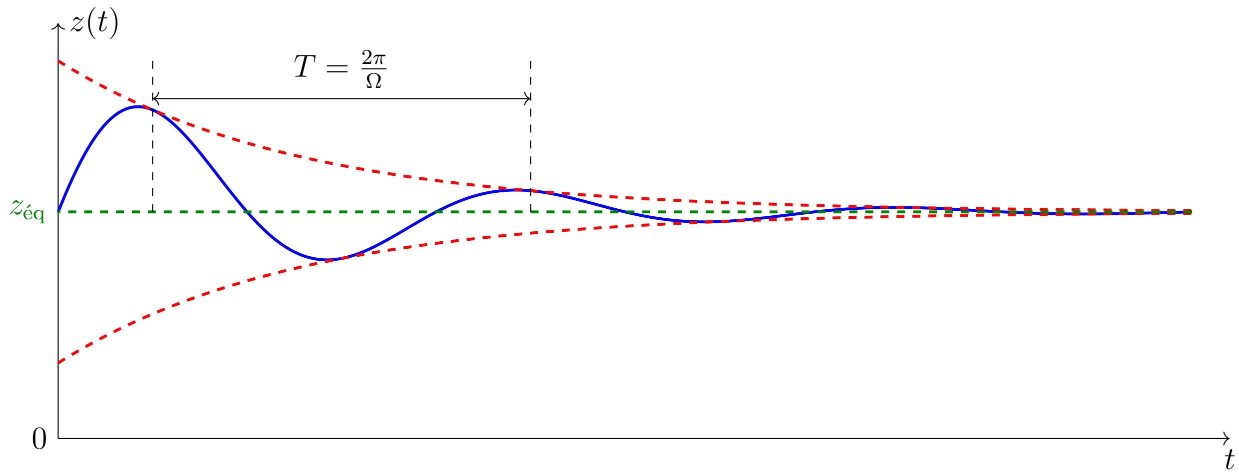
3. Solution générale : $\boxed{z(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big) + z_{\text{éq}}}$

R20. À $t = 0$, $z(0) = z_{\text{éq}}$ et $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 > 0$. Déterminer complètement l'évolution de $z(t)$.

Solution: Les constantes d'intégration se déterminent sur la solution générale = solution homogène + solution particulière.
$z(0) = A + z_{\text{éq}} = z_{\text{éq}}$, donc $A = 0$
$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\dfrac{1}{\tau}B\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right)$, donc $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 = B\Omega$
Ainsi : $\boxed{z(t) = \dfrac{v_0}{\Omega}e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\Omega t) + z_{\text{éq}}}$

R21. Représenter l'allure de $z(t)$. On fera apparaître dessus la pseudo-période.

Solution: Avec $Q = 2$, il y a ENVIRON deux oscillations visibles.



R22. Que caractérise τ ? Comment évolue-t-il si les frottements deviennent plus importants (toute chose égale par ailleurs) ?

Solution: La durée du régime transitoire est de quelques $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$

Compte-tenu des expressions de ω_0 et Q : $\tau = \dfrac{2m}{\alpha}$, cette durée diminue si les frottements deviennent plus importants.