Thème I. Ondes et signaux (Ondes)

Chapitre n°11 Superposition d'ondes

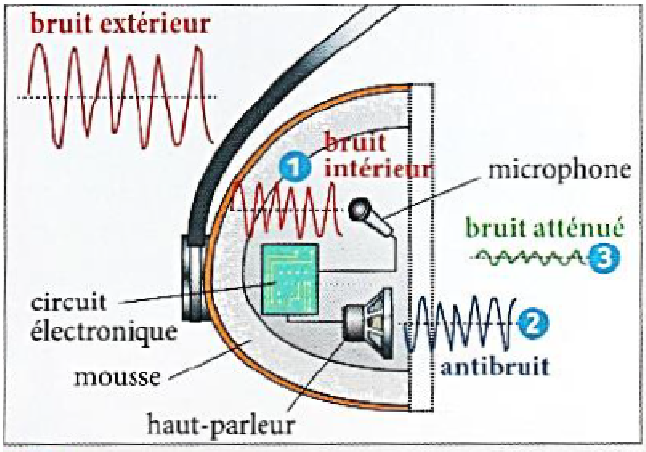
Pour réduire le bruit par le port d'un casque, la première solution consiste à utiliser les propriétés acoustiques des matériaux fibreux ou poreux, mais ces matériaux ne sont efficaces qu'à partir de 600 Hz environ.

Pour augmenter l'efficacité des casques, on ajoute depuis quelques années à ce système passif, un système actif.

Le bruit peut être considéré comme une somme de sons purs. L'air oscille sous l'effet des ondes sonores, c'est-à-dire que sa pression augmente puis diminue régulièrement. Dans le casque actif, on ajoute au bruit 1 un second signal 2 de telle sorte que la surpression de l'air due au bruit coïncide avec la dépression due au son ajouté : le signal 2 est alors en opposition de phase avec le bruit 1, et la pression globale est quasiment constante. Le bruit 3 qui parvient à l'oreille est alors atténué.

Les systèmes antibruit des casques reposent sur des composants électroniques. De minuscules microphones ont pour fonction de capteur le bruit venant de l'extérieur. Un circuit électronique se charge d'analyser les sons perçus par le microphone afin de déterminer le bruit indésirable et de générer un signal en opposition de phase.

Le temps de calcul nécessaire pour créer l'onde antibruit et sa son transfert vers la membrane du haut-parleur posent certaines limites qui font que les systèmes actuels réduisent considérablement le bruit (environ 25 à 30 dB) sans le supprimer totalement.



Intérieur d'un casque antibruit actif de chantier.

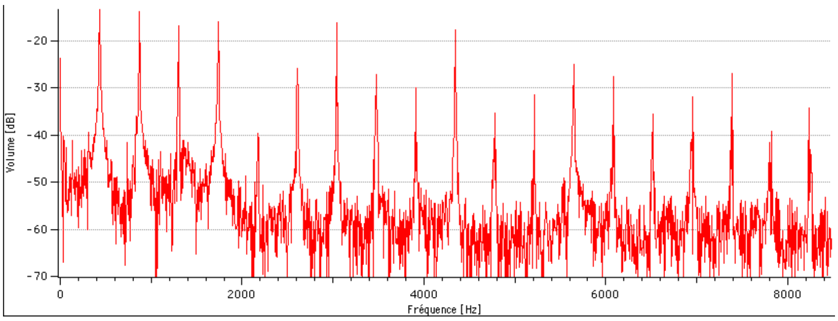


FIGURE 1 – Spectre du son émis par la corde de La d'un violon (d'après http://www.cuk.ch/articles/2468)

Pourquoi le spectre du son émis par une corde de violon présente-t-il des harmoniques de fréquences multiples de la fréquence de la note jouée ? Pourquoi peut-on distinguer deux violons jouant la même note ? deux instruments différents ?

Pré-requis

- Terminale : Thème Ondes et signaux
  - Interférences de deux ondes, conditions d'observation, interférences constructives ou destructives.
  - Interférences de deux ondes lumineuses, différence de chemin optique, conditions d'interférences constructives ou destructives.
- PCSI : Ondes et signaux
  - Chapitre n°10. Propagation d'un signal

Objectifs du chapitre

- Compléter les connaissances de terminale sur les interférences mécaniques, optiques ou acoustiques, en les formalisant.
- Étudier les ondes stationnaires qui existent sur une corde fixée à ses deux extrémités. Faire le lien avec la musique.

Plan du cours

Programme officiel

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1.6. Propagation d'un signal	
Phénomène d'interférences	
Interférences entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence.	Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives. Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage. [TP] Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour visualiser et caractériser le phénomène d'interférences de deux ondes.
Interférences entre deux ondes lumineuses de même fréquence. Exemple du dispositif des trous d'Young éclairé par une source monochromatique. Différence de chemin optique. Conditions d'interférences constructives ou destructives. Formule de Fresnel.	Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique. Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique entre les deux ondes. Exploiter la formule de Fresnel fournie pour décrire la répartition d'intensité lumineuse. [TP] Mettre en œuvre le dispositif expérimental des trous d'Young avec une acquisition numérique d'image.
Ondes stationnaires mécaniques	
Modes propres	Caractériser une onde stationnaire par l'existence de nœuds et de ventres. Exprimer les fréquences des modes propres connaissant la célérité et la longueur de la corde. Utiliser la propriété énonçant qu'une vibration quelconque d'une corde accrochée entre deux extrémités fixes se décompose en modes propres. Relier les notions sur les ondes stationnaires avec celles utilisées en musique. [TP] Décrire une onde stationnaire observée par stroboscopie sur la corde de Melde. [TP] Mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant d'analyser le spectre du signal acoustique produit par une corde vibrante.
Approche qualitative de la superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquences voisines. Battements.	[TP] Déterminer une différence de fréquences à partir d'enregistrements de battements ou d'observation sensorielle directe.

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – 🙂 – 🙁 – Définir interférences constructives et destructives.

2 – 🙂 – 🙁 – Pour deux ondes mécaniques de même fréquence qui interfèrent, établir l'expression de l'amplitude de l'onde résultante en fonction du déphasage entre les deux ondes.

3 – 🙂 – 🙁 – Exprimer les conditions sur le déphasage pour que deux ondes interfèrent constructivement ou destructivement.

4 – 🙂 – 🙁 – Définir chemin optique et différence de chemin optique.

5 – 🙂 – 🙁 – Décrire le dispositif des trous d'Young. Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique entre les deux ondes des trous d'Young.

6 – 🙂 – 🙁 – Définir onde stationnaire, nœud et ventre. Donner l'expression d'une onde stationnaire sinusoïdale.

7 – 🙂 – 🙁 – Établir l'expression des fréquences des modes propres en fonction de la célérité de l'onde et de la longueur de la corde.

I Interférences entre deux ondes mécaniques de même fréquence

Interférences des ondes provoquées par deux bateaux.
À quelles conditions observe-t-on des interférences ?

I.1 Observations

<u>**Capacité exigible**</u> : **Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour observer le phénomène d'interférences de deux ondes.**

Expérience : Cuve à onde

On étudie des ondes à la surface de l'eau dans une cuve à onde.
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/cuve_ondes/interference_ondes_circulaires.php
Les deux vibreurs sont alimentés par le même générateur, ils émettent des **ondes** circulaires de **même fréquence**, de même amplitude et sont parfaitement synchronisées, on dit que les ondes sont émises en phase. Un système optique permet de visualiser facilement les creux (ils apparaissent en noir) et les bosses (elles apparaissent en blanc).

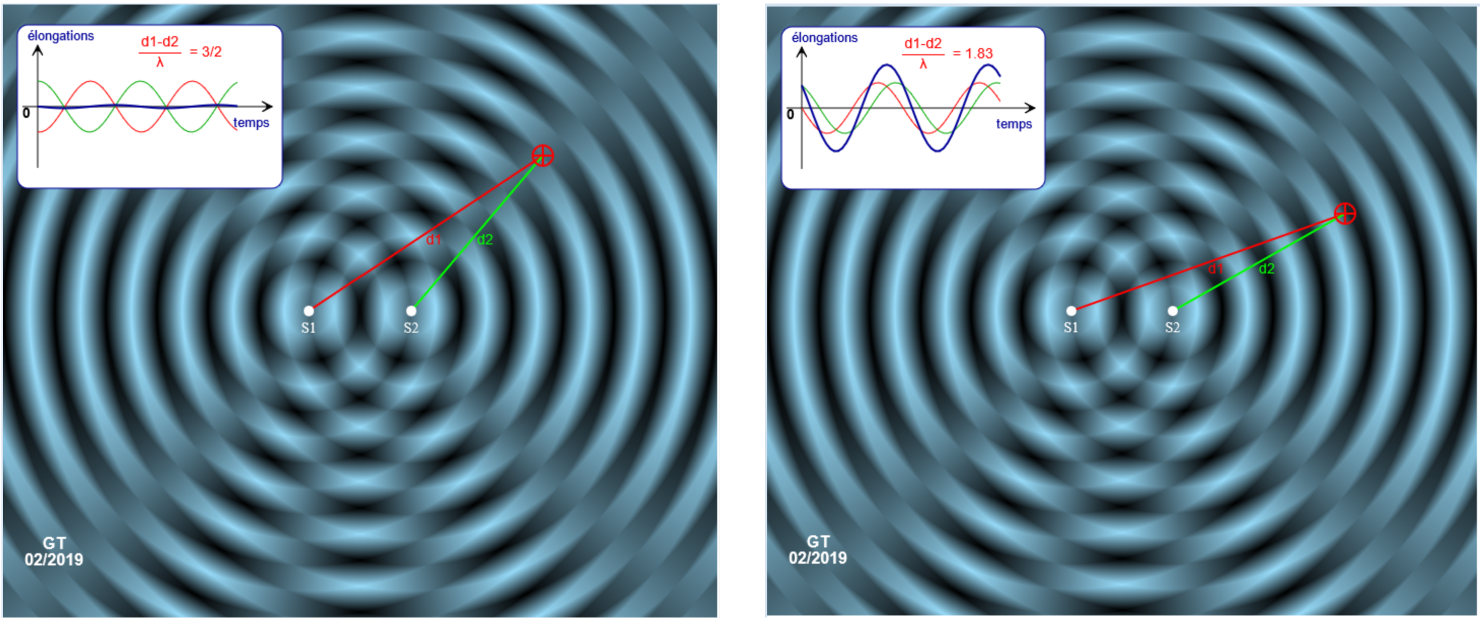


FIGURE 2 – Interférences entre deux ondes à la surface de l'eau

À la surface de l'eau on observe des zones où l'amplitude de l'onde résultante de la superposition des deux ondes est importante : ce sont les zones où le contraste est important (différence de hauteur importante entre les creux et les bosses) et à l'inverse des zones où l'amplitude de l'onde résultante est faible, voire quasi nulle : ce sont les zones où le contraste est faible (peu ou pas de différence de hauteur d'eau entre les creux et les bosses).

Lorsque deux ondes de même nature (onde à la surface de l'eau) et de même fréquence (elles sont émises par deux vibreurs alimentés par la même source) se superposent dans une zone de l'espace, l'onde résultante présente à certains endroits une amplitude importante et à d'autres l'onde résultante est d'amplitude nulle (ou presque). C'est le **phénomène d'interférences**.

Définition : Interférences

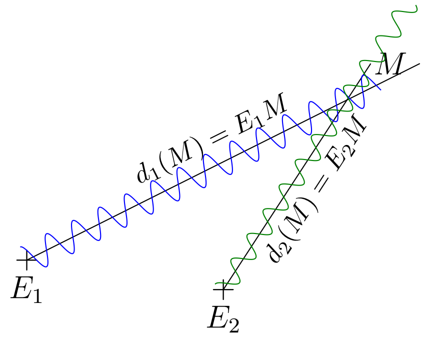
Deux ondes de même nature et synchrones (de même fréquence) qui se superposent en un point M donnent naissance au phénomène d'**interférence** en M.
L'amplitude de l'onde résultante de la superposition de plusieurs ondes est différente de la somme des amplitudes individuelles.

I.2 Effet du déphasage

I.2.a) Position du problème

Soient deux sources synchrones émettant des ondes de même pulsation ω et de vecteur d'onde $k = \dfrac{\omega}{c}$.

- La source E_1 émet une onde dont le signal transporté s'écrit en tout point M de l'espace : $s_1(M,t) = S_m \cos(\omega t - kE_1M + \varphi_0)$.
  On introduit la phase à l'origine des temps, liée au retard de propagation de E_1 vers M $\varphi_1(M) = -kE_1M + \varphi_0$
  Le signal émis par E_1 s'écrit en M, à t : $s_1(M,t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_1(M))$
- La source E_2 émet une onde dont le signal transporté s'écrit en tout point M de l'espace : $s_2(M,t) = S_m \cos(\omega t - kE_2M + \varphi_0)$.
  On introduit la phase à l'origine des temps, liée au retard de propagation de E_2 vers M $\varphi_2(M) = -kE_2M + \varphi_0$
  Le signal émis par E_2 s'écrit en M, à t : $s_2(M,t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_2(M))$



Au point M, on observe la superposition des deux ondes.
Le signal résultant est la somme des deux signaux en M et s'écrit en M, à t : $s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$.
Les deux ondes qui se superposent en M sont déphasées car le chemin parcouru par chacune des deux ondes entre la source et M est différent.
On définit le **déphasage en** M par : $\Delta\varphi_{2/1}(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ entre les deux ondes qui interfèrent en M.

I.2.b) Amplitude de l'onde résultante

<u>Capacité exigible :</u> Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage.

Établir l'expression de l'amplitude résultante

On considère les deux ondes $s_1(M,t) = S_{1m} \cos(\omega t - kE_1M + \varphi_0)$ et $s_2(M,t) = S_{2m} \cos(\omega t - kE_2M + \varphi_0)$ qui se superposent au point M.

R1. En utilisant la représentation complexe, exprimer l'onde résultante en fonction de $\underline{S_{m1}}$, $\underline{S_{m2}}$ et $e^{j\omega t}$.

Solution: On utilise la représentation complexe des deux ondes précédentes :
- $\underline{s_1}(M,t) = S_{1m}e^{j(\omega t - kE_1M + \varphi_0)} = \underline{S_{1m}}e^{j\omega t}$, avec $\underline{S_{1m}} = S_{1m}e^{j(-kE_1M+\varphi_0)} = S_{1m}e^{j\varphi_1(M)}$
- $\underline{s_2}(M,t) = S_{2m}e^{j(\omega t - kE_2M + \varphi_0)} = \underline{S_{2m}}e^{j\omega t}$, avec $\underline{S_{2m}} = S_{2m}e^{j(-kE_2M+\varphi_0)} = S_{2m}e^{j\varphi_2(M)}$

L'onde résultante est représentée par le signal complexe :

$$\underline{s}(M,t) = \underline{s_1}(M,t) + \underline{s_2}(M,t) = (\underline{S_{m1}} + \underline{S_{m2}})e^{j\omega t}$$

R2. Comment calculer l'amplitude de l'onde résultante en partant de $\underline{s}$? Effectuer le calcul.

Solution: L'amplitude de cette onde résultante est donnée par le module de $\underline{s}(M,t)$:

$$\begin{aligned}
S_m &= |\underline{s}(M,t)| \\
&= \left|(\underline{S_{m1}} + \underline{S_{m2}})e^{j\omega t}\right| = \left|\underline{S_{m1}} + \underline{S_{m2}}\right| \\
&= \sqrt{\left(\underline{S_{m1}} + \underline{S_{m2}}\right) \times \left(\underline{S_{m1}} + \underline{S_{m2}}\right)^*} \\
&= \sqrt{|\underline{S_{m1}}|^2 + |\underline{S_{m2}}|^2 + \underline{S_{m1}} \times \underline{S_{m2}}^* + \underline{S_{m1}}^* \times \underline{S_{m2}}} \\
&= \sqrt{S_{m1}^2 + S_{m2}^2 + S_{m1}e^{j\varphi_1(M)} \times S_{m2}e^{-j\varphi_2(M)} + S_{m1}e^{-j\varphi_1(M)} \times S_{m2}e^{j\varphi_2(M)}} \\
&= \sqrt{S_{m1}^2 + S_{m2}^2 + S_{m1}S_{m2}e^{j(\varphi_2(M)-\varphi_1(M))} + S_{m1}S_{m2}e^{j(\varphi_1(M)-\varphi_2(M))}} \\
&= \sqrt{S_{m1}^2 + S_{m2}^2 + 2S_{m1}S_{m2}\cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))} \\
&= \sqrt{S_{m1}^2 + S_{m2}^2 + 2S_{m1}S_{m2}\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(M)\right)}
\end{aligned}$$

L'amplitude de l'onde résultante varie selon le déphasage entre les deux ondes.

R3. De quoi dépend l'amplitude de l'onde résultante ?

R4. Exprimer l'amplitude du déphasage entre les deux ondes qui interfèrent au point M aux distances d_1 et d_2 parcourues par chacune des ondes entre l'émetteur et M. On appelle la grandeur $d_1 - d_2$ la différence de marche.

À retenir : Amplitude de l'onde résultante

L'amplitude de l'onde résultante de la superposition de deux ondes synchrones :

$$S_m = \sqrt{S_{m1}^2 + S_{m2}^2 + 2S_{m1}S_{m2}\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(M)\right)} \quad (1)$$

$$S_m = \sqrt{S_{m1}^2 + S_{m2}^2 + 2S_{m1}S_{m2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2)\right)} \quad (2)$$

I.2.c) Interférences constructives ou destructives

Capacité exigible : Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives.

Définitions : Interférences constructives et destructives

On parle d'interférences

- **constructives** en M quand l'amplitude de l'onde résultante en M est maximale ;
- **destructives** en M quand l'amplitude de l'onde résultante en M est minimale.

Établir les conditions d'interférences constructives et destructives

R1. À quelle condition sur le déphasage $\Delta_{2/1}(M)$ entre les deux ondes qui interfèrent en M, les interférences en M sont-elles constructives ? Quelle est la condition sur la différence de marche ?

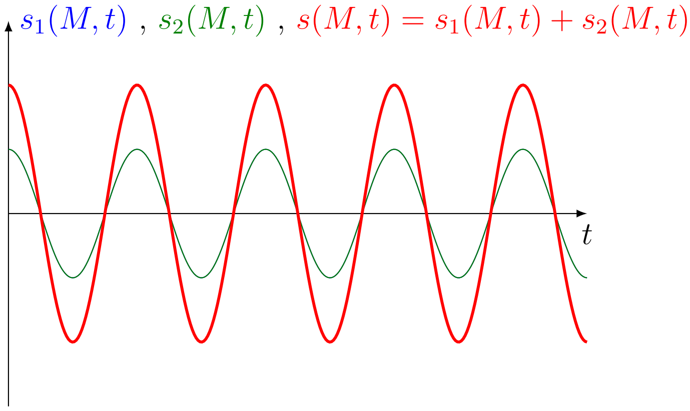
R2. Représenter les ondes temporelles $s_1(M,t)$, $s_2(M,t)$ et $s(M,t)$ lors des interférences constructives en M.

R3. Faire de même pour les interférences destructives.

Solution:

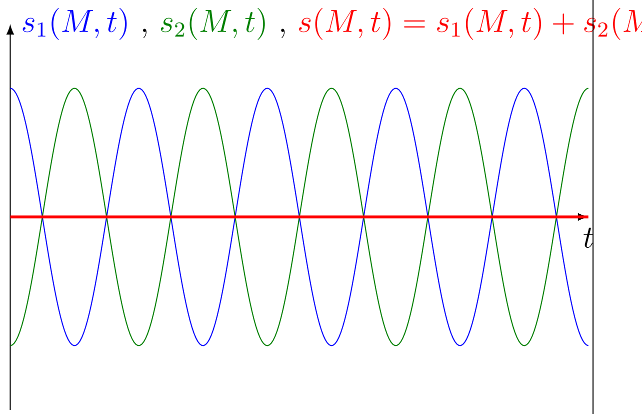
- Les interférences constructives ont lieu en M tel que S_m est maximal, ssi $\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(M)\right)$ maximal, ssi $\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(M)\right) = +1$, ssi $\Delta\varphi_{2/1}(M) \equiv 0[2\pi]$
- Les interférences destructives ont lieu en M tel que S_m est minimal, ssi $\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(M)\right)$ minimal, ssi $\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(M)\right) = -1$, ssi $\Delta\varphi_{2/1}(M) \equiv \pi[2\pi]$

■ Si les deux signaux qui se superposent en M sont en phase, soit $\Delta\varphi_{2/1}(M) = 0[2\pi]$:



L'amplitude de l'onde résultante est alors maximale en M

■ Si les deux signaux qui se superposent en M s en opposition de phase, soit $\Delta\varphi_{2/1}(M) = \pi[2\pi$



L'amplitude de l'onde résultante est alors m male en M, nulle ici car les deux ondes qui terfèrent sont de même amplitude.

À retenir : Conditions d'interférences constructives ou destructives

■ Deux ondes interfèrent constructivement en M ssi le déphasage entre les deux ondes est un multiple de 2π :

$$\Delta\varphi_{2/1}(M) = 2n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

■ Deux ondes interfèrent destructivement en M ssi le déphasage entre les deux ondes est un multiple impair de π :

$$\Delta\varphi_{2/1}(M) = (2n+1)\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

II Interférences entre deux ondes lumineuses de même fréquence

On étudie dans cette partie les interférences entre deux ondes lumineuses de même fréquence.

Sans entrer dans les détails sur les notions de cohérence qui seront vues en 2^e année (PC), deux ondes lumineuses ne peuvent interférer que si elles sont issues de la même source lumineuse, de même fréquence (longueur d'onde). Les interférences s'observeront facilement avec un LASER.

II.1 Dispositif des trous d'Young

Capacité exigible : Mettre en œuvre le dispositif expérimental des trous d'Young avec une acquisition numérique d'image.

`http://anim.institutoptique.fr/Young/`

On étudie plus particulièrement les interférences observées avec un dispositif de trous d'Young. Ce dispositif est constitué de deux trous, de faible rayon ($r = 5$ µm) percés dans un écran opaque, séparés d'une faible distance $a = 50$ µm, éclairés par une source monochromatique ponctuelle.

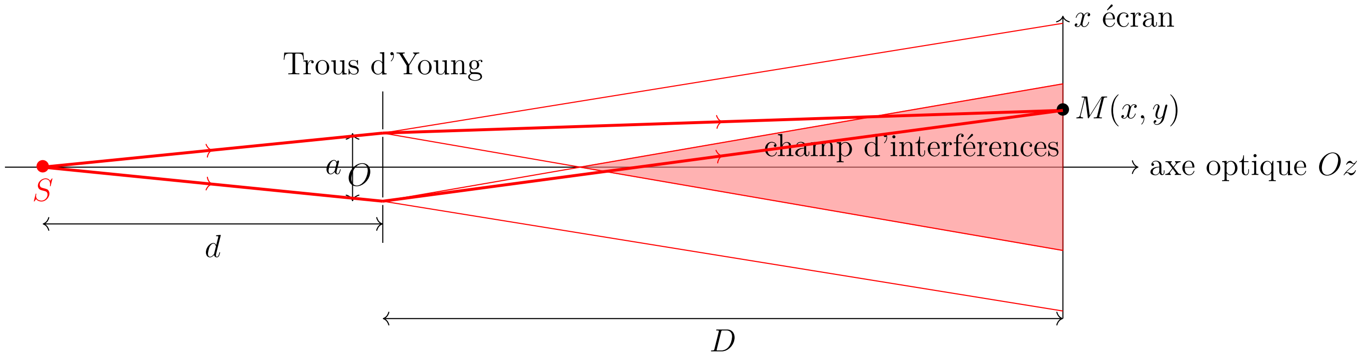
On observe alors la figure d'interférences sur un écran situé à grande distance des trous.

Le diamètre des trous et leur écartement a est de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde optiques, soit de l'ordre du µm à quelques dizaines de µm.

Les distances d entre la source et le plan des trous, et D entre le plan des trous et l'écran d'observation sont très grandes devant la distance a, le diamètre des trous, et la longueur d'onde λ.

De part la diffraction qui se produit au niveau de chaque trou d'Young, le faisceau émergent des trous est étalé angulairement, d'un demi-angle d'ouverture θ, tel que $\sin(\theta) \sim \dfrac{\lambda}{2r}$. r étant faible devant λ, les faisceaux émergents des trous sont de grande ouverture, permettant aux ondes de se recouvrir dans une partie de l'espace. Les deux faisceaux émergents se superposent dans une zone donnée de l'espace où les interférences peuvent alors se produire : c'est le **champ d'interférence**.

Un écran est placé dans ce champ d'interférence, à une distance $D = 1,0$ m du plan des trous.



Expérience : Trous d'Young

R1. Qu'observez-vous à l'écran ?

> **Solution:** On y observe les **interférences** qui se manifestent par une alternance de zones de forte intensité appelées **franges brillantes** et de zones de faible intensité appelées **franges sombres**.

R2. Que se passe-t-il si on modifie :

(a) la distance entre les deux trous d'Young ?

> **Solution:** En diminuant la distance entre les deux trous d'Young, on observe que la distance entre les franges lumineuses augmente.

(b) la distance D ?

> **Solution:** En augmentant la distance D entre les deux trous d'Young et l'écran, on observe que la distance entre les franges lumineuses augmente.

(c) la longueur d'onde de la radiation lumineuse ?

> **Solution:** En augmentant la longueur d'onde de la radiation lumineuse, on observe que la distance entre les franges lumineuses augmente.

II.2 Déphasage et différence de chemin optique

<u>Capacité exigible</u> : **Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique.**

En optique, la propagation des ondes lumineuses dans un milieu d'indice n se fait à la vitesse $v = c/n$.

Définition : Chemin optique

Dans un **milieu homogène et isotrope** d'indice optique n, les lois de l'optique géométrique indiquent que la lumière se propage en ligne droite.

On appelle **chemin optique** entre deux points S et M de ce milieu la quantité, noté (SM) :

$$\boxed{(SM) = n \times SM}$$

où SM est la longueur du segment $[SM]$.

Définition : Différence de chemin optique

La différence de marche est la différence de chemins optiques empruntés par chacune des deux ondes qui interfèrent :

$$\boxed{\delta(M) = (SM)_{\text{chemin 2}} - (SM)_{\text{chemin 1}}}$$

À retenir : Déphasage et différence de chemin optique

En notant λ_0 la longueur d'onde de la radiation monochromatique dans le vide, la relation entre le déphasage entre les deux ondes en M et la différence de chemin optique $\delta(M)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(M) &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\Big((SM)_{\text{chemin 2}} - (SM)_{\text{chemin 1}}\Big)\end{aligned}$$

Attention

La longueur d'onde est une grandeur qui dépend du milieu dans lequel l'onde se propage. C'est la longueur d'onde dans le vide qui intervient dans la relation entre le déphasage et la différence de chemin optique (ce dernier prenant en compte le milieu), et non celle dans le milieu de propagation.

II.3 Différence de chemin optique

Capacité exigible : **Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique entre les deux ondes.**

Expression de la différence de chemin optique

On note T_1 et T_2 les deux trous d'Young, et n l'indice optique du milieu de propagation.

R1. Faire un schéma avec la sources, les deux trous, l'écran, et deux rayons interférant en un point M quelconque de l'écran l'un passant par le premier trou, l'autre par le deuxième.

R2. Exprimer la différence de chemin optique entre S et M selon le chemin emprunté en fonction de n, et des deux distances T_1M et T_2M.

Solution:

$$\begin{aligned}\delta(M) &= (SM)_{\text{chemin 2}} - (SM)_{\text{chemin 1}} \\ &= (ST_2) + (T_2M) - (ST_1) - (T_1M) \\ &= (T_2M) - (T_1M)\end{aligned}$$

soit $\boxed{\delta(M) = n\Big(T_2M - T_1M\Big)}$

R3. Exprimer les deux distances T_1M et T_2M en fonction de x, a et D.

Solution: Je note H_1, H_2 les projetés orthogonaux des trous T_1 et T_2 sur le plan de l'écran afin de faire apparaître des triangles rectangles.
En utilisant le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
T_2M^2 &= T_2H_2^2 + H_2M^2 \\
T_2M^2 &= D^2 + (H_2O' + O'M)^2 \\
T_2M^2 &= D^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 \\
T_2M &= \sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} \\
T_1M^2 &= T_1H_1^2 + H_1M^2 \\
T_1M^2 &= D^2 + (O'M - H_1O')^2 \\
T_1M^2 &= D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \\
T_1M &= \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

R4. Écrire les deux distances T_1M et T_2M sous la forme $D\sqrt{1+Y}$. Que peut-on dire de Y dans les deux cas ?

Solution: En factorisant par D^2 sous la racine on écrit facilement :

$$\begin{aligned}
T_2M &= \sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} \\
T_2M &= D\sqrt{1 + \frac{1}{D^2}\left(\frac{a}{2} + x\right)^2} \\
T_1M &= \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \\
T_1M &= D\sqrt{1 + \frac{1}{D^2}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

Le terme sous la racine est de la forme $\sqrt{1 + \Big(\text{quelque chose très petit devant 1}\Big)}$, car x et a sont très petits devant D, donc $\frac{1}{D^2}\left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2$ est très petit devant 1.

On va utiliser le développement limité au premier ordre (cf cours de maths) suivant, pour $Y \ll 1$:

$$\boxed{\sqrt{1+Y} \approx 1 + \frac{Y}{2}}$$

R5. Utiliser le développement limité précédent pour approximer T_1M et T_2M.

Solution:

$$
\begin{aligned}
T_2M &= D\sqrt{1+\frac{1}{D^2}\left(\frac{a}{2}+x\right)^2}\\
T_2M &\approx D\left(1+\frac{1}{2D^2}\left(\frac{a}{2}+x\right)^2\right)\\
T_1M &= D\sqrt{1+\frac{1}{D^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}\\
T_1M &\approx D\left(1+\frac{1}{2D^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

R6. En déduire l'expression approchée de la différence de chemin optique $\delta(M)$.

Solution:

$$
\begin{aligned}
\delta(M) &= n(T_2M - T_1M)\\
&\approx n\left[D\left(1+\frac{1}{2D^2}\left(\frac{a}{2}+x\right)^2\right) - D\left(1+\frac{1}{2D^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right)\right]\\
&\approx \frac{n}{2D}\left[\left(\frac{a}{2}+x\right)^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right]\\
&\approx \frac{n}{2D}\left[\frac{a^2}{4}+x^2+ax-\left(\frac{a^2}{4}+x^2-ax\right)\right]\\
&\approx \frac{n}{2D}\left[2ax\right]
\end{aligned}
$$

D'où $\boxed{\delta(M) = n\dfrac{ax}{D}}$

II.4 Description de la figure d'interférence

<u>Capacité exigible</u> : **Exploiter la formule de Fresnel fournie pour décrire la répartition d'intensité lumineuse.**

À la différence des ondes mécaniques, les ondes lumineuses ont des fréquences très importantes $\simeq 10^{14}$ Hz. Les détecteurs les plus rapides ont des temps de réponses $\simeq 10^{-12}$ s et sont donc beaucoup trop lents pour suivre les oscillations temporelles de l'onde lumineuse. Il s'ensuit que les détecteurs d'ondes lumineuses ne sont sensibles qu'à l'intensité moyenne I de l'onde, elle-même proportionnelle à la moyenne du carré du champ électromagnétique portant le signal. C'est donc à cette quantité qu'il faut s'intéresser pour décrire une expérience d'interférences lumineuses.

Les détecteurs lumineux délivrent un signal proportionnel à l'intensité de l'onde correspondant à la puissance par unité de surface et qui s'exprime en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

L'intensité $I(M)$ en un point M de l'onde lumineuse résultant de la superposition de deux ondes d'intensités I_1 et I_2 est donnée par la **formule de Fresnel** [admise et fournie] :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\Delta\varphi(M)\right)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right)$$

Pour deux ondes de même intensité I_0 (ce qui est souvent le cas) :

$$I(M) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right)\right)$$

Description de la figure d'interférences

R1. Dans le cas des trous d'Young, exprimer l'intensité lumineuse en un point de l'écran en utilisant la formule de Fresnel fournie ci-dessus.

R2. Cet éclairement est périodique. Exprimer sa période spatiale, appelée **interfrange**, notée i.

R3. Décrire la figure d'interférences.

Solution: D'après la formule de Fresnel : $\boxed{I(M) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{nax}{D}\right)\right)}$

L'intensité en un point M de l'écran dépend de la position x de M sur l'écran.

L'intensité I est constante en des points M de même x : la figure d'interférence est donc constituée de franges rectilignes horizontales (si les trous sont verticaux).

L'intensité évolue sinusoïdalement selon l'axe Ox de l'écran, ce qui explique l'alternance de franges brillantes et sombres.

On identifie la période spatiale i en notant que $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{nax}{D}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{i}x\right)$, avec $\boxed{i = \frac{\lambda_0 D}{na}}$

R4. Commenter la dépendance de cette interfrange avec les différents paramètres de l'expérience, en lien avec les observations du § II.1.

Solution: Cette interfrange est d'autant plus élevée que la distance D séparant l'écran des trous d'Young ou la longueur d'onde sont élevées, et que la distance entre les deux trous est faible.

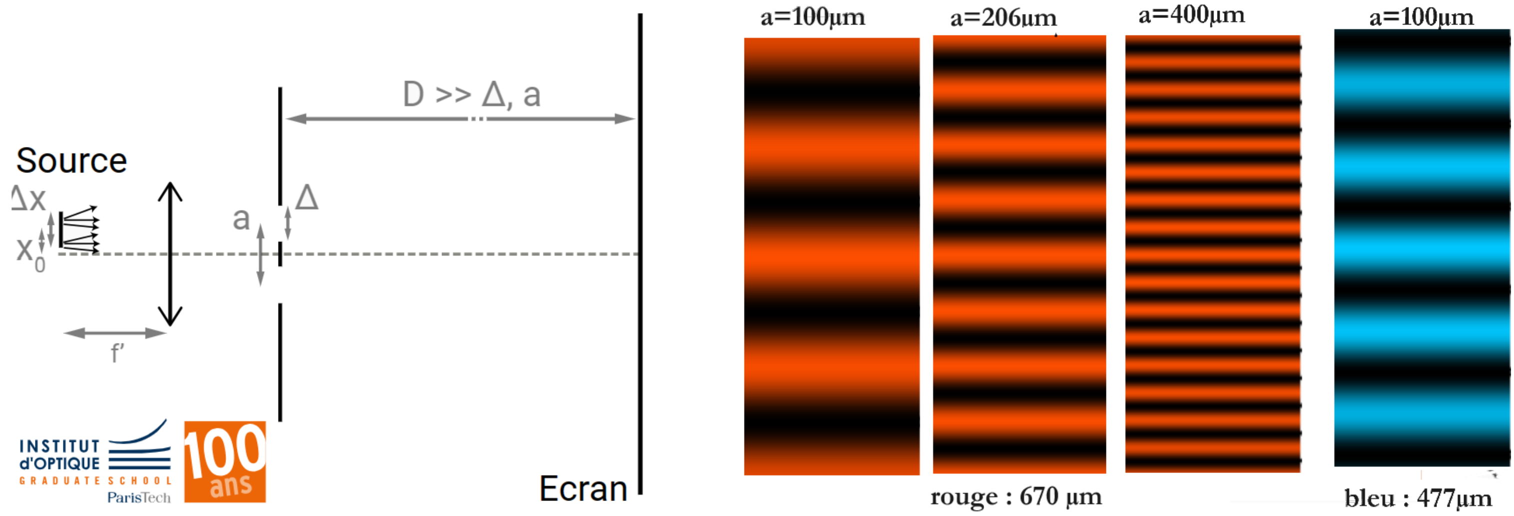
Ces constatations sont conformes avec les observations faites.

R5. À quelle condition les interférences sont-elles constructives en M ? Quelle est l'allure des franges lumineuses (=maximum d'intensité) ?

Solution: Les interférences sont constructives en M, ssi $I(M)$ est maximale, soit $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{nax}{D}\right) = +1$

soit $\frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{nax}{D} = 2p\pi$, avec $p \in \mathbb{Z}^*$

Les interférences sont constructives en M d'abscisses $\boxed{x_p = p \times \frac{D\lambda_0}{na}}$, avec $p \in \mathbb{Z}^*$



III Ondes stationnaires mécaniques

Les cordes de violon et de guitare sont fixées à leurs deux extrémités. Lorsque le musicien excite la corde, en la frottant avec un archet pour le violon, en la grattant pour la guitare, un son est émis. Ci-dessous, sont représentés les spectres d'un la émis par une guitare et un violon. On constate la présence d'un grand nombre d'harmoniques, tous multiples de la fréquence du fondamental.

Pourquoi le son émis est ainsi constitué ?

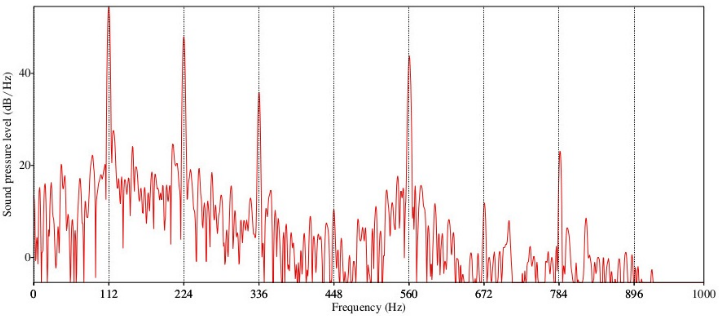


FIGURE 3 – Spectre du son émis par la corde de La d'une guitare (d'après http://images.math.cnrs.fr/Spectre.html)

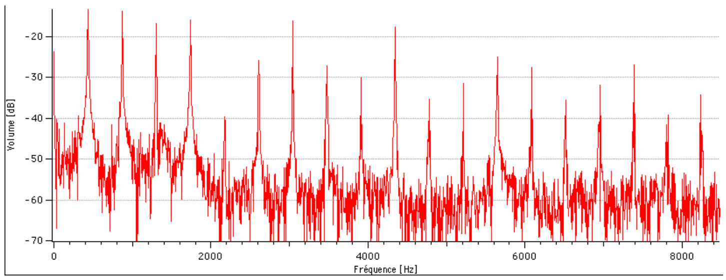


FIGURE 4 – Spectre du son émis par la corde de La d'un violon (d'après http://www.cuk.ch/articles/2468)

III.1 Onde le long d'une corde fixée à ses deux extrémités

Capacité exigible : Caractériser une onde stationnaire par l'existence de nœuds et de ventres.

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/ondes_stationnaires/stationnai
php

Considérons une corde fixée à ses deux extrémités (en $x = 0$ et $x = L$), le long de laquelle deux ondes progressives sinusoïdales de même amplitude se propagent en sens inverse :

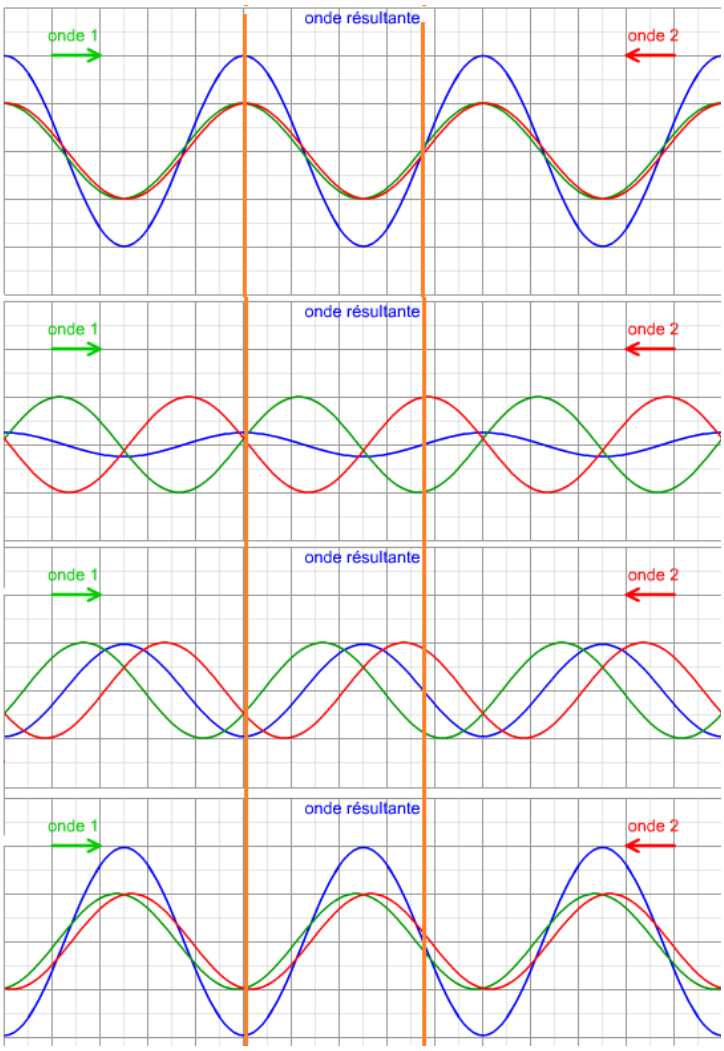
- une onde n°1 (=onde incidente) se propageant selon $(+\overrightarrow{u_x})$,
- une onde n°2 (=onde réfléchie) qui se propage selon $(-\overrightarrow{u_x})$, provenant de la réflexion de l'onde incidente en $x = L$.

R1. Comment est définie une onde progressive ?

> **Solution:** Une onde progressive est une onde qui se propage, la perturbation se retrouve à l'identique un peu plus loin un peu plus tard.
> Tous les points de l'espace sont atteints par la même perturbation.

R2. Quelle différence a-t-on entre une onde progressive et l'onde ci-dessous ? Pourquoi l'appelle-t-on « onde stationnaire » ?

> **Solution:** Tous les points de la corde ne sont pas atteints par la même perturbation : des points ne vibrent jamais tandis que d'autres présentent un déplacement qui est toujours supérieurs aux autres. On ne retrouve pas la perturbation à l'identique un peu plus loin un peu plus tard : l'onde ne se propage pas.
> On peut l'appeler onde stationnaire car elle ne se propage pas, des points de la corde restent immobiles.



♥ À retenir : Nœuds et ventres d'une onde stationnaire

Lorsque deux ondes sinusoïdales de même fréquence, de même amplitude se propagent en sens inverse, leur superposition donne naissance à une **onde stationnaire sinusoïdale**, que l'on peut caractériser par l'existence :

- de **nœuds de vibration** qui sont des points, notés N, de l'espace qui ne vibrent jamais, c'est-à-dire tels que, à tout instant, $s(x_N, t) = 0$.
- de **ventres de vibration** qui sont des points, notés V, de l'espace où la perturbation (vibration) y est à chaque instant maximale par rapport aux autres points de la corde.

L'**existence de nœuds et de ventres de vibration est une propriété caractéristique des ondes stationnaires.**

<u>Comment écrire le signal associé à une onde stationnaire ?</u>

- L'onde incidente progressive sinusoïdale se propage selon $(+\overrightarrow{u_x})$. Le signal associé s'écrit :

$$s_1(x,t) = S_m \cos\left(\boxed{\omega t - kx} + \varphi_1\right)$$

- Le milieu étant limité, il existe une onde réfléchie se propageant selon $(-\overrightarrow{u_x})$. Le signal associé s'écrit :

$$s_2(x,t) = S_m \cos\left(\boxed{\omega t + kx} + \varphi_2\right)$$

— Le signal de l'onde résultante, s'écrit $s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = S_m\cos(\omega t - kx + \varphi_1) + S_m\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$
En utilisant la formule de trigonométrie $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$,
et en posant $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ et $\psi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$, on obtient :

$$s(x,t) = 2S_m\cos\left(\boxed{\omega t} + \varphi\right)\cos\left(\boxed{kx} + \psi\right)$$

Dans l'écriture ci-dessus, on constate que la dépendance temporelle (en t) et la dépendance spatiale (en x) n'apparaissent pas au sein de la même fonction cos/sin : on parle de **séparation des variables** x **et** t. Ceci est une **caractéristique des signaux associés aux ondes stationnaires**, qui les différencie des ondes progressives qui s'écrivent sous la forme $f(x \pm ct)$.
Notamment il existe des positions x pour lesquelles la fonction qui dépend de x uniquement est nulle, alors en ces positions là, l'onde est toujours nulle. Tous les points de l'espace ne sont pas atteints par la même onde puisque certains ne vibrent jamais et d'autres si.

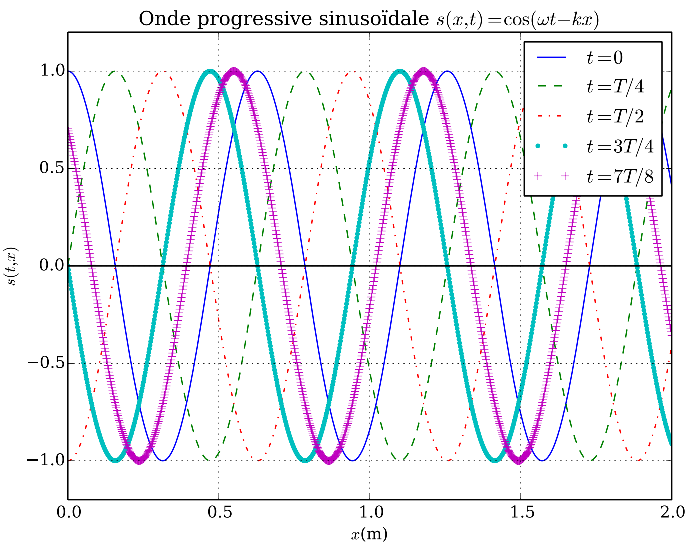
À retenir : Écritue mathématique d'une onde stationnaire

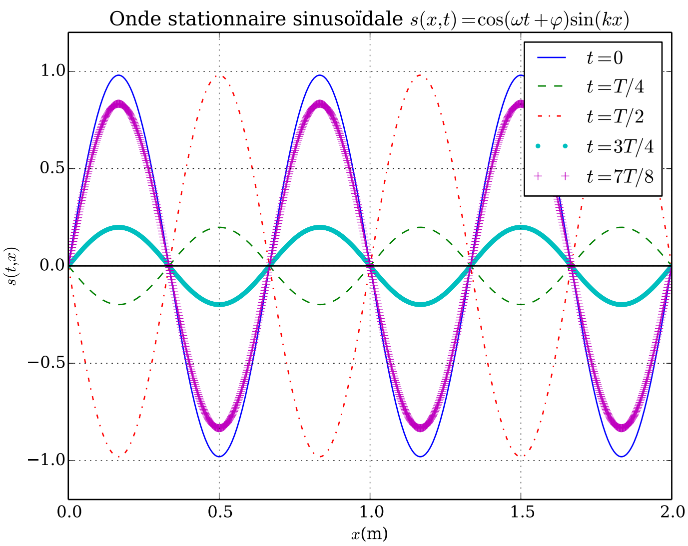
- Les signaux associés aux **ondes stationnaires** s'écrivent sous la forme d'un produit d'une fonction de la position et d'une fonction du temps :

$$s(x,t) = f(x) \times g(t)$$

- Les signaux associés aux **ondes stationnaires sinusoïdales** s'écrivent sous la forme

$$s(x,t) = S_0\cos\left(\omega t + \varphi\right)\cos\left(kx + \psi\right)$$





III.2 Modes propres

<u>Capacité exigible</u> : **Exprimer les fréquences des modes propres connaissant la célérité et la longueur de la corde.**

La corde étudiée est fixée à ses deux extrémités, en $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites $\forall\, t \begin{cases} s(x=0,t) &= 0 \\ s(x=L,t) &= 0 \end{cases}$, traduisant le fait qu'il n'y a aucun déplacement vertical aux deux extrémités.

Fréquences des modes propres

Le signal existant sur la corde s'écrit $s(x,t) = S_0 \cos\left(\omega t + \varphi\right) \cos\left(kx + \psi\right)$

R1. Montrer que la condition aux limites en $x = 0$ impose $\psi = \pm\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

> **Solution:**
> $\forall t,\ s(0,t) = S_0 \cos\left(\omega t + \varphi\right) \cos\left(\psi\right) = 0$
> $S_0 \neq 0$, sinon il n'y aurait pas d'onde.
> $\cos\left(\omega t + \varphi\right)$ ne peut pas être nul à chaque instant.
> La seule solution est $\cos\left(\psi\right) = 0$, soit $\psi = \pm\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
> Avec $\cos\left(kx \pm \dfrac{\psi}{2}\right) = \mp\sin(kx)$, le signal s'écrit $s(x,t) = S_0\cos(\omega t + \varphi)\left(\mp\sin(kx)\right)$

R2. Montrer que la condition aux limites en $x = L$ impose une quantification du vecteur d'onde k (c'est-à-dire que seules certaines valeurs discrètes sont possibles).

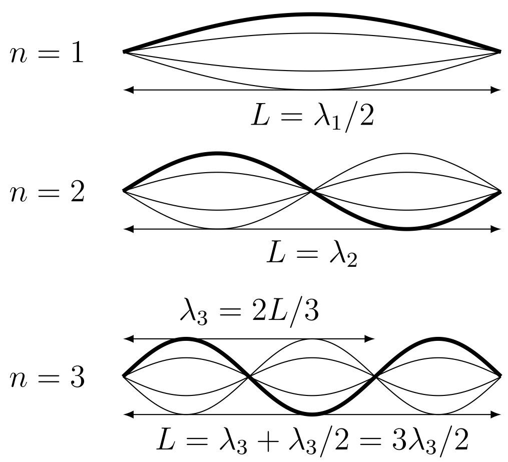
> **Solution:**
> $\forall t,\ s(L,t) = S_0\cos(\omega t + \varphi)\left(\mp\sin(kL)\right) = 0$
> Pour les mêmes raisons que précédemment, la seule possibilité est $\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ (L et k sont deux réels strictement positifs).
> Le vecteur d'onde est donc quantifié et ne peut prendre que les valeurs suivantes : $\boxed{k_n = \dfrac{n\pi}{L}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

R3. En déduire que la longueur d'onde, la pulsation et la fréquence sont également quantifiées en précisant les valeurs permises.

> **Solution:**
> Le vecteur d'onde est relié à la longueur d'onde par : $k_n = \dfrac{2\pi}{\lambda_n} = \dfrac{n\pi}{L}$, soit $\boxed{\lambda_n = \dfrac{2L}{n}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
> On en déduit les fréquences $\boxed{f_n = \dfrac{c}{\lambda_n} = \dfrac{nc}{2L}}$ et les pulsations $\boxed{\omega_n = 2\pi f_n = \dfrac{n\pi c}{L}}$

R4. Représenter (en fonction de x) les trois premiers modes propres, localiser les nœuds et les ventres.

> **Solution:**



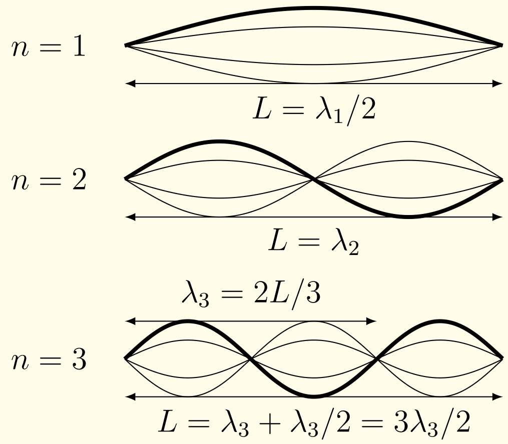
À retenir : Longueurs d'onde et fréquences des modes propres

Pour une corde fixée à ses deux extrémités, les conditions aux limites imposent une quantification des longueurs d'onde et des fréquences, avec $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \Leftrightarrow L = n\frac{\lambda_n}{2} \qquad\qquad f_n = n\frac{c}{2L} = \frac{c}{\lambda_n}$$

Méthode : Comment retrouver facilement les fréquences des modes propres ?

1. Représenter les 3 premiers modes propres de la corde fixée à ses deux extrémités (ci-contre).
2. Repérer le lien entre la longueur d'onde et la longueur de la corde pour ces trois premiers modes, puis généraliser au mode n, afin d'avoir λ_n.
3. Utiliser la relation $f_n = \dfrac{c}{\lambda_n}$ pour en déduire les fréquences des modes propres.



III.3 Lien avec les instruments de musique à cordes

<u>Capacité exigible</u> : **Utiliser la propriété énonçant qu'une vibration quelconque d'une corde accrochée entre deux extrémités fixes se décompose en modes propres.**

Lorsqu'un musicien sollicite une corde, en la frappant, en la grattant ou en la frottant, il ne sélectionne pas un mode propre donné. La vibration engendrée n'est pas un mode propre mais une superposition des différents modes propres possibles.

À connaître : Vibration quelconque d'une corde fixée à ses deux extrémités

Une vibration quelconque d'une corde fixée entre deux extrémités fixes se décompose en modes propres, c'est-à-dire que le signal associé à cette vibration quelconque s'écrit sous la forme d'une somme de tous les modes propres :

$$s(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(2\pi\frac{nc}{2L}t + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

<u>Capacité exigible</u> : **Relier les notions sur les ondes stationnaires avec celles utilisées en musique.**

Sur le spectre (cf FIGURES 3 et 4) de l'onde émise par un instrument de musique, on peut définir deux caractéristiques musicales : la hauteur et le timbre.

Définitions : Hauteur et timbre d'un son

La **hauteur du son** est déterminée par sa fréquence, elle correspond à la **fréquence du mode fondamental**. Cette fréquence du fondamental correspond à la **note jouée**. Plus cette fréquence est faible plus la note est grave et plus cette fréquence est élevée plus la note est aigüe.

Cependant deux instruments différents peuvent jouer la même note et le ressenti sera différent. Le **timbre du son** est la propriété liée à cette différence, elle est liée aux nombres et à l'intensité des harmoniques présents.

Le spectre d'un son émis par un instrument de musique est cependant beaucoup plus complexe que celui du son émis par une corde simple fixée à ses deux extrémités, à cause de la présence de la caisse de résonance, de la nature de l'excitation de la corde ou de la colonne d'air ...

III.4 Expérience de la corde de Melde

Capacité exigible : **Décrire une onde stationnaire observée par stroboscopie sur la corde de Melde.**
Les modes propres d'une corde fixée à ses deux extrémités peuvent être mis en évidence en utilisant le phénomène de résonance : on excite une corde à l'une de ses deux extrémités avec un vibreur dont on peut régler la fréquence.

Expérience : Corde de Melde

Revoir le TP n°.... portant sur la corde de Melde.
Voir : https://www.youtube.com/watch?v=taR0_XRkL0g
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/ondes_stationnaires/melde.php

On étudie un dispositif appelé « Corde de Melde » constitué d'une corde de longueur L telle que :

— une des extrémités ($x = L$) est reliée à une masse au travers d'une poulie ;

— l'autre extrémité ($x = 0$) est excitée par un vibreur alimenté par un GBF. Le vibreur impose un mouvement vertical sinusoïdal d'amplitude de l'ordre de quelques mm et de fréquence f réglable via le GBF.

R1. Qu'observez-vous lorsqu'on excite la corde avec une fréquence quelconque ?

Solution: On observe de très légers mouvements de la corde.

R2. Que se passe-t-il pour certaines fréquences particulières ? Relever les valeurs de ces fréquences ainsi que l'allure de la corde.

Solution: Pour certaines fréquences particulières, le déplacement vertical de la corde est nettement plus important et on voit des ventres et des nœuds. Les fréquences particulières sont toutes multiples de la première pour laquelle on observe un ventre. Pour la fréquence double on observe deux ventres, ...

Ces fréquences particulières sont appelées **fréquences de résonance**, elles correspondent aux fréquences des modes propres de la corde étudiée fixée à ses deux extrémités, c'est-à-dire que lorsque la fréquence du vibreur est égale à la fréquence d'un des modes propres, il y a résonance (l'amplitude de vibration de la corde devient importante).

Utilisation d'un stroboscope (= source lumineuse émettant périodiquement des flashs de lumière blanche).
Appelons T_{strobo} la période du stroboscope c'est-à-dire la durée séparant deux flashs. Lorsque l'on observe la corde sous les flashs du stroboscope, on voit les points de la corde aux instants : $t_i = t_0 + iT_{\text{strobo}}$.

— Si T_{strobo} est égale à la période du mode propre observé alors chaque point de la corde semble immobile : la corde paraît fixe.

— Si T_{strobo} est égale à un multiple de la période du mode propre observé alors chaque point de la corde semble immobile : la corde paraît fixe. Cependant nous ne verrons pas chaque aller-retour de la corde.

— Si T_{strobo} est égale à un sous-multiple de la période du mode propre observé alors nous verrons la corde à plusieurs endroits (par ex. « en haut » et « en bas » si $T_{\text{strobo}} = T/2$).

— Si T_{strobo} est légèrement différente à T_n alors chaque point de la corde aura un peu bougé entre deux éclairs : on visualise alors un mouvement ralenti.

IV Battements

Capacité exigible : **Déterminer une différence fréquences à partir d'enregistrements de battements ou d'observation sensorielle directe.**

Expérience : Battements

Un diapason émet un La3 pur à 440 Hz (aucun harmonique), ce qui permet d'accorder les instruments avec. On fait vibrer simultanément deux diapasons, l'un à 440 Hz et l'autre légèrement désaccordé par l'ajout d'une masselotte sur l'une des deux branches.

R1. Qu'entendez-vous ?

Solution: On entend une lente variation de l'amplitude de l'onde sonore, de période de l'ordre de la seconde.

R2. Que se passe-t-il si on augmente le désaccord (on augmente l'écart entre les deux fréquences) ?

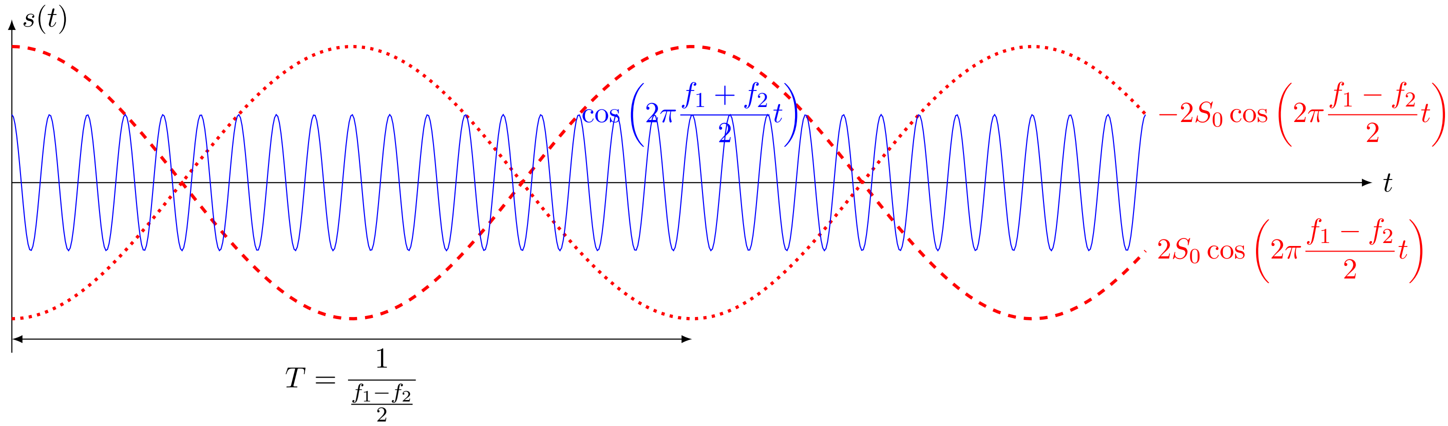
Solution: Quand l'écart entre les deux fréquences augmente, la fréquence de la variation de l'amplitude augmente, la période diminue.

Traduisons cela à l'aide de l'écriture des deux signaux de fréquences très proches et de même amplitude (ce qui revient à supposer que les deux diapasons ont été frappés avec la même force) : $s_1(t) = S_0 \cos(2\pi f_1 t)$ et $s_2(t) = S_0 \cos(2\pi f_2 t)$

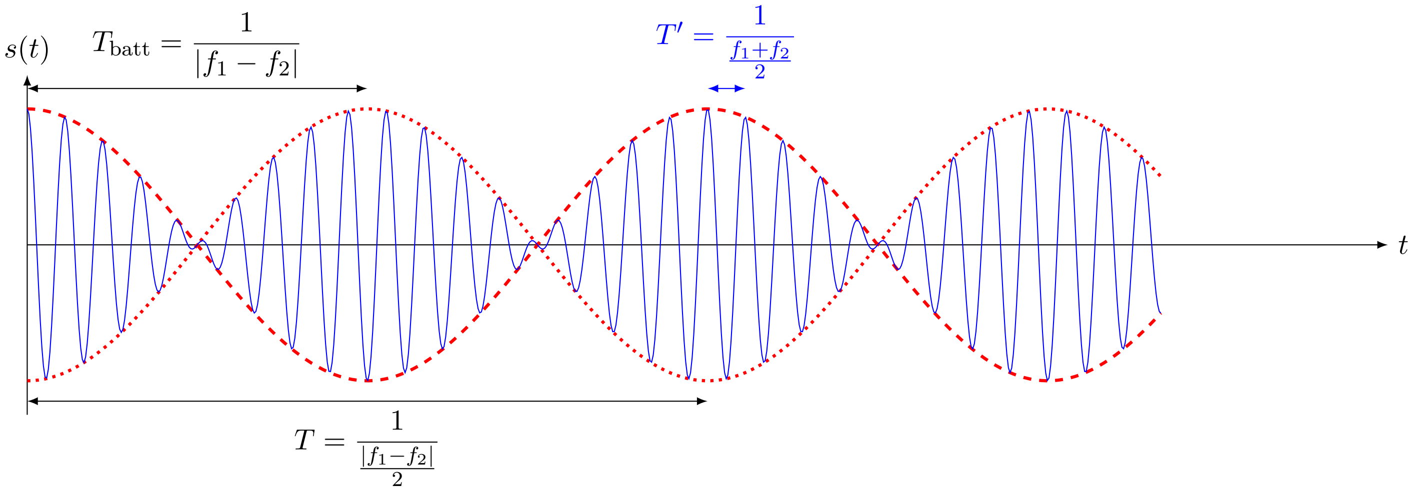
Le signal transporté par l'onde résultante s'écrit : $s(t) = S_0\Big(\cos(f_1 t) + \cos(f_2 t)\Big)$, soit

$$s(t) = \underbrace{2S_0 \times \underbrace{\cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right)}_{\text{Signal de fréquence faible}}}_{\text{Amplitude lentement variable du signal de fréquence élevée}} \times \underbrace{\cos\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right)}_{\text{Signal de fréquence élevée}}$$

On peut décrire le signal résultant comme étant un signal $\cos\left(2\pi \dfrac{f_1 + f_2}{2} t\right)$ de fréquence $\dfrac{f_1 + f_2}{2}$ « élevée » dont l'amplitude varie lentement entre $2S_0 \cos\left(2\pi \dfrac{f_1 - f_2}{2} t\right)$ et $-2S_0 \cos\left(2\pi \dfrac{f_1 - f_2}{2} t\right)$.



En réalisant la multiplication de ces deux signaux :

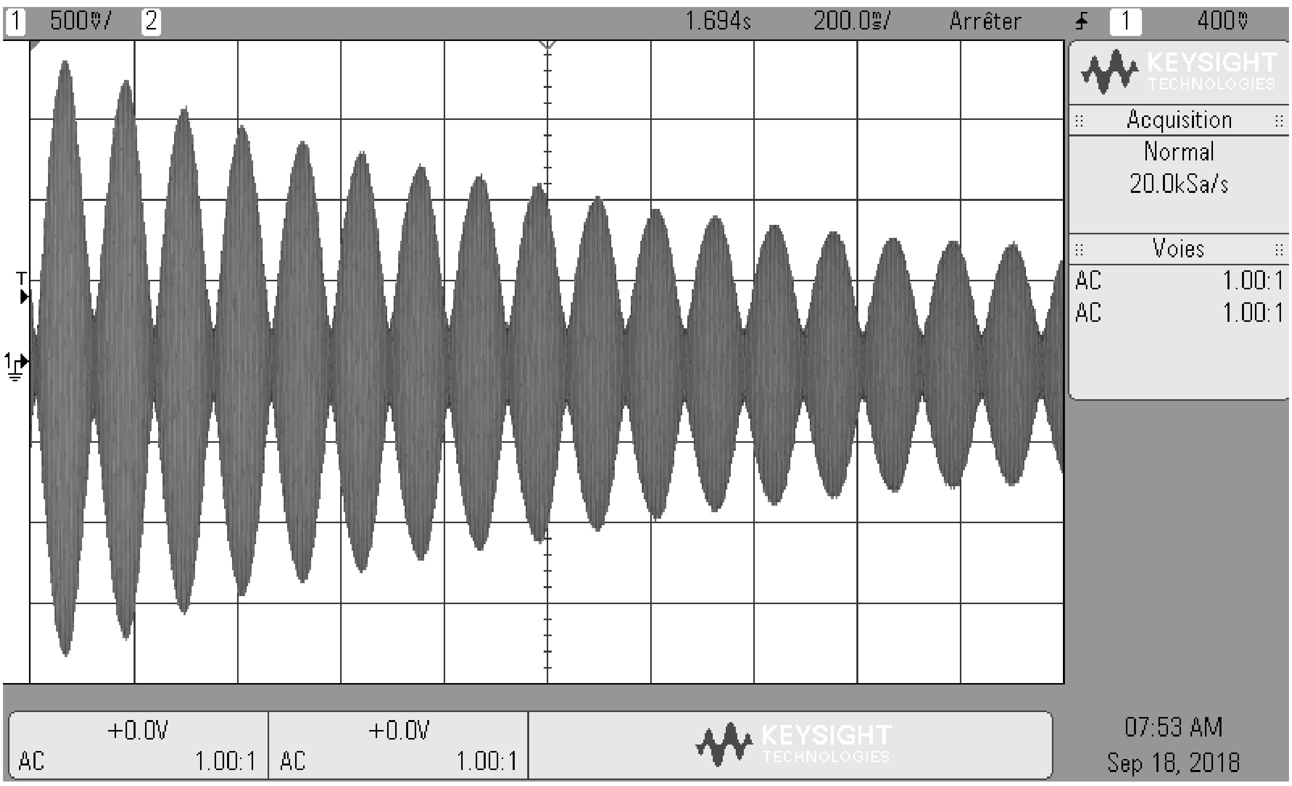


À retenir : Battements

Le **phénomène de battements** est observé lorsqu'on superpose deux ondes sinusoïdales de fréquences proches f_1 et f_2 telles que

$$\left|f_2 - f_1\right| \ll f_1 \quad \text{et} \quad \left|f_2 - f_1\right| \ll f_2$$

Il est caractérisé par une modulation périodique de l'onde constituée de la superposition des deux signaux de fréquences proches à une fréquence $f_{\text{batt}} = \left|f_2 - f_1\right|$ appelée **fréquence des battements** et de période $T_{\text{batt}} = \dfrac{1}{\left|f_2 - f_1\right|}$ appelée période des battements.



R1. Déterminer, sur l'oscillogramme ci-dessus, la période puis la fréquence des battements.

Solution:
On compte 7 périodes sur 4 divisions, soit $7T_{\text{batt}} = 800$ ms, donc $T_{\text{batt}} = 114$ ms, soit $f_{\text{batt}} = 8,75$ Hz.

R2. Sachant que l'un des deux diapasons n'était pas désaccordé, déterminer les fréquences possibles pour l'autre diapason.

Solution: L'un des diapasons est accordé sur 440 Hz, l'autre vibre donc à 449 Hz ou à 431 Hz.