? À rendre le LUNDI 13 mai 2024

Devoir Maison n°18

Travail à rendre :

- Tous les exercices doivent être traités.
- Les exercices 1 et 2 représentent un très bon entraînement pour le concours blanc du 7 mai.
- Un fichier python est associé à ce DM : `https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-vernet/docs?rep=228`.
  Le fichiers peut être ouvert avec :
  - `Spyder`
  - python en ligne : `https://www.mycompiler.io/fr/new/python`
- Indiquer votre prénom/nom à l'emplacement prévu, recopier et exécuter les codes demandés, et recopier les valeurs demandées dans votre copie.
- Le fichier python devra être déposé avant LUNDI 13 mai à 7h45 ici :
  `https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-vernet/transferts?phys`

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
- Masse molaire du CO_2 : $M = 44,0\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$;
- Coefficient isentropique du CO_2 : $\gamma = 1,30$
- Masse volumique de la glace : $\rho_g = 917\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
- Capacité massique de l'eau liquide : $c_\ell = 4,18\ \mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$
- Capacité massique de l'eau solide : $c_s = 2,09\ \mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$
- Enthalpie massique de fusion de l'eau à $T_0 = 0\ °\mathrm{C}$ et sous 1 bar : $\Delta_{\mathrm{fus}}h(T_0) = 335\ \mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$
- Entropies molaires du gaz parfait :
  — $S_m(T,P) = C_{P,m} \ln\left(\dfrac{T}{T_{\mathrm{ref}}}\right) - R\ln\left(\dfrac{P}{P_{\mathrm{ref}}}\right) + S_{m,\mathrm{ref}}$
  — $S_m(T,V) = C_{V,m} \ln\left(\dfrac{T}{T_{\mathrm{ref}}}\right) + R\ln\left(\dfrac{V}{V_{\mathrm{ref}}}\right) + S_{m,\mathrm{ref}}$
  — $S_m(P,V) = C_{V,m} \ln\left(\dfrac{P}{P_{\mathrm{ref}}}\right) + C_{P,m}\ln\left(\dfrac{V}{V_{\mathrm{ref}}}\right) + S_{m,\mathrm{ref}}$
- Entropie massique d'une phase condensée : $s(T) = c\ln\left(\dfrac{T}{T_{\mathrm{ref}}}\right) + s_{\mathrm{ref}}$

Exercice n°1 Un cycle

On considère le cycle monotherme $ABCA$ décrit par une masse m de CO_2 gazeux, assimilé à un gaz parfait de masse molaire M et de coefficient γ supposé constant.

— Transformation $A \to B$: le gaz, initialement à la température $T_A = T_1$, subit une compression adiabatique réversible qui le porte à la température $T_B = T_2$.

— Transformation $B \to C$: le gaz, évoluant à volume constant, revient à la température initiale au contact d'un thermostat de température T_1.

— Transformation $C \to A$: le gaz est ramené à l'état initial A par une détente isotherme réversible.

Q1. Représenter l'allure de ce cycle dans un diagramme de Clapeyron.

Q2. Exprimer puis calculer les valeurs numériques des paramètres P, T, V dans chacun des états A, B et C à partir des données suivantes : $m = 1,00$ g ; $V_A = 8,20.10^{-4}$ m^3 ; $P_A = 1,00$ bar ; $a = \dfrac{P_B}{P_A} = 10,0$.

Q3. Établir les expressions des travaux et des transferts thermiques reçus par le gaz au cours de chacune des transformations $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$, en fonction de m, M, R, γ, T_1, T_2 et a. Faire les applications numériques.

Q4. Calculer les variations d'entropie du gaz au cours des transformations $B \to C$ et $C \to A$.
Comparer ces deux variations d'entropie et expliquer le résultat obtenu.

Q5. Calculer l'entropie échangée par le gaz au cours de la transformation $B \to C$.
En déduire l'entropie créée au cours de cette transformation. Commenter.

Exercice n°2 Détente d'un gaz parfait

Un cylindre non calorifugé, fermé par un piston, contient une mole de gaz parfait dans l'état initial ($T_1 = 273$ K, $P_1 = 3,0$ bar). Ce système est plongé dans un bain eau-glace constituant un thermostat à 0 °C. On agit sur le piston mobile pour détendre, très lentement le gaz jusqu'à la pression $P_2 = 1,0$ bar.

Q1. Qualifier la transformation subie par le gaz parfait.

Q2. Exprimer la variation de l'énergie interne du gaz parfait, le travail des forces de pression et le transfert thermique reçus par le gaz parfait.

Q3. En déduire le transfert thermique reçu par le bain eau-glace.

Q4. Déterminer la masse m de glace apparaissant dans le thermostat.

Q5. Calculer la variation d'entropie du gaz, l'entropie échangée par le gaz ainsi que la création d'entropie. Commenter.

Q6. Effectuer le bilan d'entropie du bain eau-glace.

Exercice n°3 Chute d'un volant de badminton : résolution numérique

On étudie la chute verticale d'un volant de badminton (de masse $m = 5,0$ g) après un smash.
On choisir l'axe (Oz) vertical descendant. On note $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_z}$ le vecteur vitesse du volant.
La prise en compte des frottements fluides à l'air se fait au travers de la force $\overrightarrow{f} = -\dfrac{1}{2}\rho C_x S v \overrightarrow{v}$.

Partie I Mise en équation

Q1. Établir l'équation différentielle vérifiée par v, et montrer qu'elle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \beta v^2$$

Identifier l'expression de β.

Partie II Résolution numérique : la méthode d'Euler

Méthode : Méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet la résolution numérique approchée sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ d'une équation différentielle écrite sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = f(X)$$

connaissant la condition initiale $X(t_0) = X_0$.
L'idée fondamentale est d'approximer la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ par son taux d'accroissement sur l'intervalle $[t, t+h]$:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \approx \frac{X(t+h) - X(t)}{h}$$

Autrement dit, cela revient à effectuer un développement limité au premier ordre de $X(t+h)$:

$$X(t+h) \approx X(t) + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \times h$$

Soit, d'après l'équation différentielle

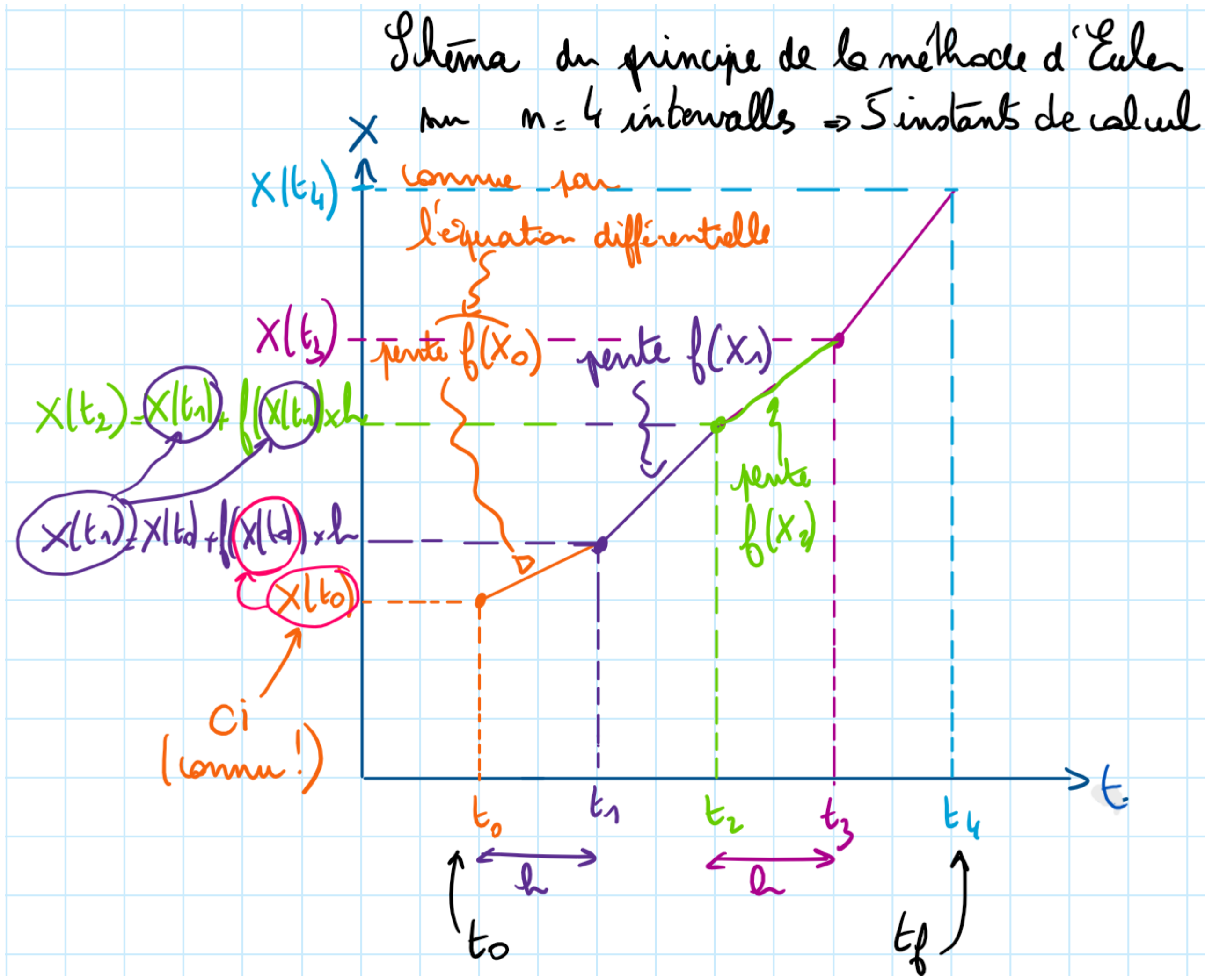
$$X(t+h) \approx X(t) + f(X) \times h$$

L'intervalle de résolution $[t_0, t_f]$ est découpé en n intervalles de largeur h.
On cherche à déterminer les valeurs de X à chaque instant t_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$, connaissant la valeur à l'instant précédent.
On exprime X à l'instant $t_{i+1} = t_i + h$ à l'aide de sa valeur à l'instant t_i :

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + f(X(t_i)) \times h$$

$$X_{i+1} = X_i + f(X_i) \times h$$

Connaissant la condition initiale $X(t_0)$, on peut alors déterminer $X(t_1) = X(t_0) + f(X(t_0)) \times h$, puis $X(t_2)$, … Ainsi de proche en proche, on détermine les $n+1$ valeurs de X.



Q2. À partir de l'équation différentielle établie à Q1, identifier l'expression de la fonction $f : v \mapsto f(v)$, en fonction de v, g et β.

Q3. En effectuant le développement de Taylor au premier ordre de $v(t+h)$ (avec h très petit), exprimer, $v(t+h)$ en fonction de $v(t)$, g, β et h.

Le temps est discrétisé : on découpe l'intervalle $[t_0, t_f]$ de résolution en n intervalles de largeur h.

Q4. Combien y a-t-il d'instants de calculs pour n intervalles ?
Exprimer l'instant t_i de résolution en fonction de t_0, i et h, en précisant l'intervalle auquel appartient i.

Q5. En python, on stocke les instants de calcul dans une liste `t`. Écrire, sur votre copie, la (les) ligne(s) permettant de créer la liste `t` de la bonne longueur (cf question Q4), contenant les instants t_i entre t_0 et t_f avec un pas de h.

Q6. Exprimer $v(t_{i+1})$ en fonction de $v(t_i)$, g, β et h.

En python, on stocke les valeurs successives de v calculées aux différents instants dans une liste `V`, dans laquelle `V[i]` représente la valeur de $v(t_i)$.

Q7. Écrire, sur votre copie, la ligne de code python qui permet de déterminer la valeur de `V[i+1]` en fonction de `V[i]`, `beta`, `h` et `g`.

Q8. Compléter le fichier python `DM18_chute_frottement_quadratique`.

Q9. Quelle valeur de t_f avez-vous choisie ? pourquoi ?

Q10. Reproduire les courbes obtenues pour $n = 5$, $n = 10$ et $n = 1000$. Faire apparaître dessus la vitesse initiale, la vitesse limite, et la durée caractéristique du régime transitoire. Commenter.

Q11. Déterminer la vitesse limite atteinte. Quelle est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire ?