Thème I. Ondes et signaux (Optique géométrique)

TD n°1 Fondements de l'optique géométrique — *Corrigé*

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Vrai/Faux ♪ ♪

R1. Le spectre du Soleil est continu. √ **Vrai** ◯ Faux

R2. Lorsque la lumière se propage vers un milieu plus réfringent, le rayon réfracté se rapproche de la normale. √ **Vrai** ◯ Faux

R3. Un objet se trouve au fond d'une piscine. Tous les rayons qu'il diffuse sont visibles d'un observateur situé au bord de la piscine. ◯ Vrai √ **Faux**

R4. La lumière se propage plus vite dans l'eau ($n_{\text{eau}} = 1,3$) que dans l'air ($n_{\text{air}} = 1,0$). ◯ Vrai √ **Faux**

R5. Une lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 5$ mm est visible par l'œil humain. ◯ Vrai √ **Faux**

R6. La lumière solaire peut être considérée comme monochromatique. ◯ Vrai √ **Faux**

R7. La lumière d'un LASER peut être considérée comme monochromatique. √ **Vrai** ◯ Faux

R8. On peut observer un phénomène de réflexion totale lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu peu réfringent à un milieu plus réfringent. ◯ Vrai √ **Faux**

R9. Lors du phénomène de réflexion, la direction du rayon réfléchi dépend de la longueur d'onde de la lumière. ◯ Vrai √ **Faux**

R10. Lors du phénomène de réfraction, la direction du rayon réfracté dépend de la longueur d'onde de la lumière. √ **Vrai** ◯ Faux

Exercice n°2 Verre flint ♪

On considère un faisceau de lumière issue d'un LASER He-Ne (de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 632,8$ nm) se déplaçant dans l'air et frappant la surface d'un verre flint d'indice $n_{\text{flint}} = 1,7$.

R1. Quelle est la vitesse de la lumière dans le flint ?

Solution: Dans le flint : $v = \dfrac{c}{n_{\text{flint}}} = 1,76.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

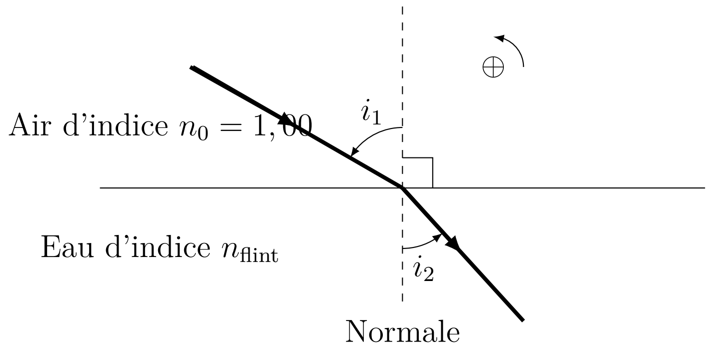
R2. Quelle est la longueur d'onde de la lumière du LASER dans le flint ?

Solution: $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{n_{\text{flint}}} = 372 \text{ nm}$

R3. Quel est l'angle de réfraction pour un angle d'incidence de 30° ?

Solution:

D'après les lois de Snell-Descartes :
$n_0 \sin(i_1) = n_{\text{flint}} \sin(i_2)$, donc
$$\boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_{\text{flint}}}\sin(i_2)\right)}$$
A.N. $i_2 = 17,1° < i_1$



R4. Quel est l'angle d'incidence si l'angle de réfraction est de 30° ?

Solution:
De même : $\boxed{i_1 = \arcsin(n_{\text{flint}} \sin(i_2))} = 58,2° > i_2$

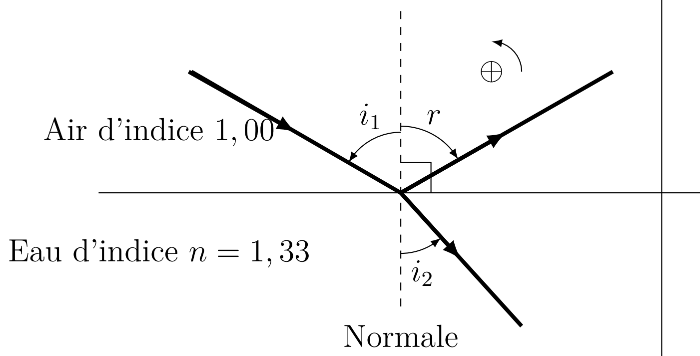
Exercice n°3 Au fond du lac

Un lac peut être modélisé par une interface air-eau confondue avec le plan Oxy. L'axe (Oz) est normal à la surface du lac ; l'air d'indice 1,00 correspond à $z > 0$ alors que l'eau d'indice $n = 1,33$ occupe l'espace $z < 0$.

R1. Le Soleil fait un angle de 60° avec la verticale. Déterminer les caractéristiques du rayon réfléchi et transmis issus d'un rayon incident provenant du Soleil.

Solution:
D'après les lois de Snell-Descartes :

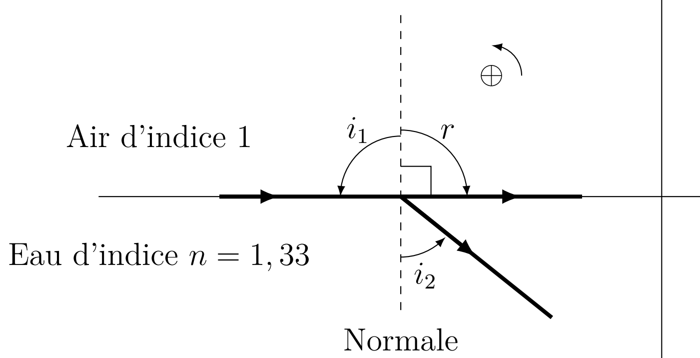
- les rayons réfléchi et transmis appartiennent au plan d'incidence défini par la normale et le rayon incident.
- Angle de réflexion : $\boxed{r = -i_1} = -60°$
- Angle de réfraction $\sin(i_1) = n \sin(i_2)$, soit $\boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right)} = 41°$



R2. Pour le Soleil couchant, déterminer les caractéristiques du rayon réfléchi et transmis.

Solution:
D'après les lois de Snell-Descartes :

- les rayons réfléchi et transmis appartiennent au plan d'incidence défini par la normale et le rayon incident.
- Angle de réflexion : $\boxed{r = -i_1} = -90°$
- Angle de réfraction $\sin(i_1) = n \sin(i_2)$, soit $\boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right)} = 49°$

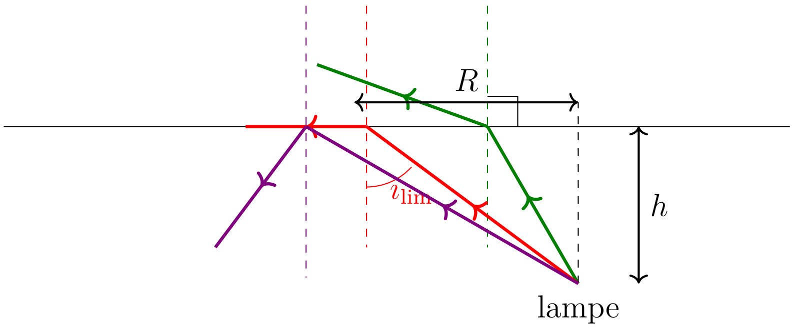


Exercice n°4 Lampe au fond de la piscine

On positionne une lampe au fond d'une piscine de profondeur $h = 2$ m. Ses deux autres dimensions sont supposées suffisamment grandes. On prendra $n = 1,33$ pour l'indice optique de l'eau et $n_0 = 1$ pour l'air.

R1. Cette source émet dans toutes les directions de l'espace, représenter différents rayons qui parviennent sur le dioptre eau/air. Que peut-il s'y produire ?

Solution:



R2. Déterminer l'angle limite au-delà duquel le rayon incident sur le dioptre eau-air est totalement réfléchi.

Solution: Il y a réflexion totale pour un angle d'incidence $i > i_{\text{lim}}$ où i_{lim} est l'angle d'incidence tel que l'angle de réfraction vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

D'après la loi de Snell-Descartes : $n\sin(i_{\text{lim}}) = \sin(\pi/2)$, donc $\boxed{i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 48,8°}$

R3. Déterminer le rayon R de la la zone à travers laquelle les rayons lumineux issus de la lampe sont réfractés.

Solution:
$\tan(i_{\text{lim}}) = \dfrac{h}{R}$, soit $\boxed{R = h\tan(i_{\text{lim}})} = 2,28$ m

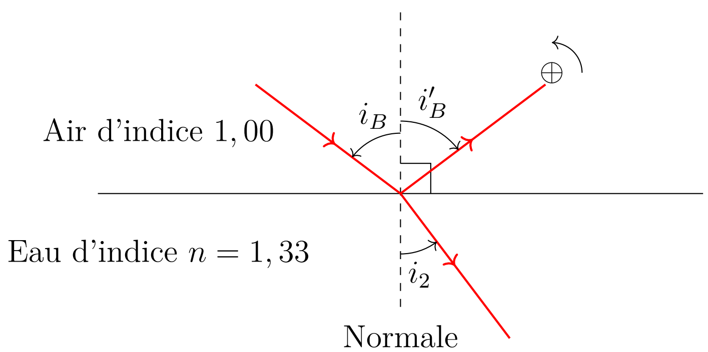
II Exercices d'approfondissement

Exercice n°5 Angle de Brewster ♪ ♪

Un rayon lumineux arrive à l'interface plane séparant l'air d'un milieu d'indice n. Il se scinde en un rayon réfléchi et un rayon réfracté.

R1. Déterminer l'angle d'incidence i_B appelé angle de Brewster pour lequel rayon réfléchi et rayon réfracté sont perpendiculaires.

Solution:



On écrit les trois relations nécessaires pour résoudre le problème à trois inconnues :

— Loi de la réflexion : $i'_B = -i_B$

— Loi de la réfraction : $\sin(i_B) = n\sin(i_2)$ (indice de l'air = 1)

— Somme des angles : $i_2 + \dfrac{\pi}{2} + (-i'_B) = \pi$, soit $i_2 = \dfrac{\pi}{2} + i'_B$

Ainsi $i_2 = \dfrac{\pi}{2} - i_B$, que l'on peut injecter dans la loi de la réfraction : $\sin(i_B) = n\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - i_B\right)$, soit $\sin(i_B) = n\cos(i_B)$

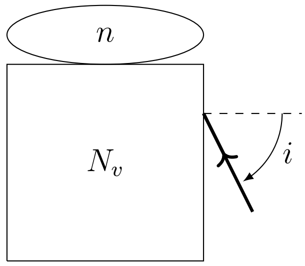
Enfin : $\boxed{\tan(i_B) = n \Leftrightarrow i_B = \arctan(n)}$

R2. Faire l'application numérique dans le cas de l'eau d'indice $n = 1,33$.

Solution:
A.N. $\underline{i_B = 53°}$

Exercice n°6 Réfractomètre ♪ ♪ ♪

Les viticulteurs ont besoin de connaître de façon précise, le taux de sucre présent dans le raisin qu'ils vendangent.
L'indice de réfraction du jus de fruit dépend du taux de sucre qu'il contient.
Le montage suivant illustre le principe du réfractomètre utilisé.
Une goutte de jus de raisin d'indice n inconnu est déposée sur un bloc de verre transparent d'indice $N_v = 1,607$.
L'ensemble est éclairé par un faisceau de lumière parallèle qui tombe sur la face d'entrée du cube sous une incidence ajustable i entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

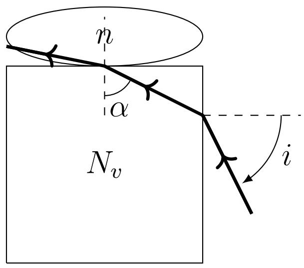


R1. À quelle condition sur les indices peut-on observer un phénomène réflexion totale sur le dioptre verre/goutte ?

Solution: Pour qu'il se produise une réflexion totale, il faut que $\boxed{N_v > n}$.

R2. Dessiner le trajet du rayon lumineux dans le cas où le rayon est réfracté dans le liquide. Dans ce cas, la goutte de vin apparaît particulièrement lumineuse.

Solution: Faites un grand schéma sur lequel vous définissez les angles nécessaires.
À l'entrée du verre, $N_v > 1$, donc le rayon réfracté existe toujours et se rapproche de la normale.
Le rayon réfracté dans la goutte s'éloigne de la normale.
Quand la goutte apparaît lumineuse, c'est qu'elle est traversée par des rayons lumineux, et donc il y a réfraction dans la goutte de vin et non réflexion totale.



On constate que la goutte de vin n'est lumineuse que lorsque $i > i_{\text{lim}}$.

R3. Établir l'angle limite de réflexion totale au niveau de l'interface goutte/verre.

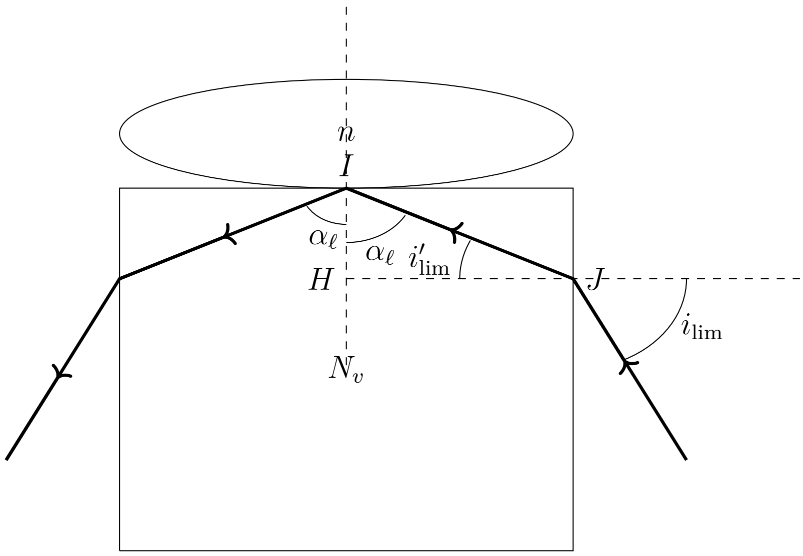
Solution: Attention au choix des notations : i et i_{lim} sont déjà définis dans l'énoncé. i est l'angle d'incidence à l'entrée du bloc de verre, i_{lim} est la valeur limite de $i$au-dessus de laquelle il y aura réfraction et non réflexion totale. Ces angles NE SONT PAS définis sur le dioptre verre/goutte, il faut donner d'autre nom.

À la limite de la réflexion totale au niveau du dioptre goutte/verre, d'après la loi de Snell-Descartes : $N_v \sin(\alpha_\ell) = n \sin(\pi/2)$

Soit $\boxed{\sin(\alpha_\ell) = \frac{n}{N_v}}$, donc $\boxed{\alpha_\ell = \arcsin\left(\frac{n}{N_v}\right)}$

R4. Exprimer i_{lim} en fonction de N_v et n.
On pourra utiliser le fait que, pour $x \in [-1, 1]$: $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ et/ou $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Solution: Rq : on ne vous demandait pas d'établir l'inégalité (elle vous était fournie), mais uniquement l'angle limite. Le raisonnement est donc fait ici en se plaçant au cas limite : le rayon incident arrive avec l'angle i_{lim} qui donne l'angle α_ℓ à la limite de la réflexion totale sur le dioptre verre/goutte.



— dans le triangle HIJ rectangle en H, $i'_{\text{lim}} + \alpha_\ell + \frac{\pi}{2} = \pi$, soit $i'_{\text{lim}} = \frac{\pi}{2} - \alpha_\ell$

— D'après la loi de Snell-Descartes en J : $N_v \sin(i'_{\text{lim}}) = \sin(i_{\text{lim}})$

En combinant ces trois relations on peut déterminer une relation entre i_{lim}, N_v et n à la limite de la réflexion/réfraction.

$$\begin{aligned}
N_v \sin(i'_{\text{lim}}) &= \sin(i_{\text{lim}}) \\
N_v \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_\ell\right) &= \sin(i_{\text{lim}}) \\
N_v \cos(\alpha_\ell) &= \sin(i_{\text{lim}}) \\
N_v \cos\left(\arcsin\left(\frac{n}{N_v}\right)\right) &= \sin(i_{\text{lim}}) \\
N_v \sqrt{1 - \frac{n^2}{N_v^2}} &= \sin(i_{\text{lim}}) \\
\sqrt{N_v^2 - n^2} &= \sin(i_{\text{lim}})
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{i_{\text{lim}} = \arcsin(\sqrt{N_v^2 - n^2})}$

R5. Calculer l'indice de réfraction du vin pour $i_{lim} = 47,81°$.

Solution: repartons de :

$$\begin{aligned}\sqrt{N_v^2 - n^2} &= \sin(i_{\text{lim}})\\ N_v^2 - n^2 &= \sin^2(i_{\text{lim}})\\ n^2 &= N_v^2 - \sin^2(i_{\text{lim}})\end{aligned}$$

D'où $\boxed{n = \sqrt{N_v^2 - \sin^2(i_{\text{lim}})}}$

A.N. : $\underline{n = 1,426}$ ***Sans unité !***

III Résolution de problèmes

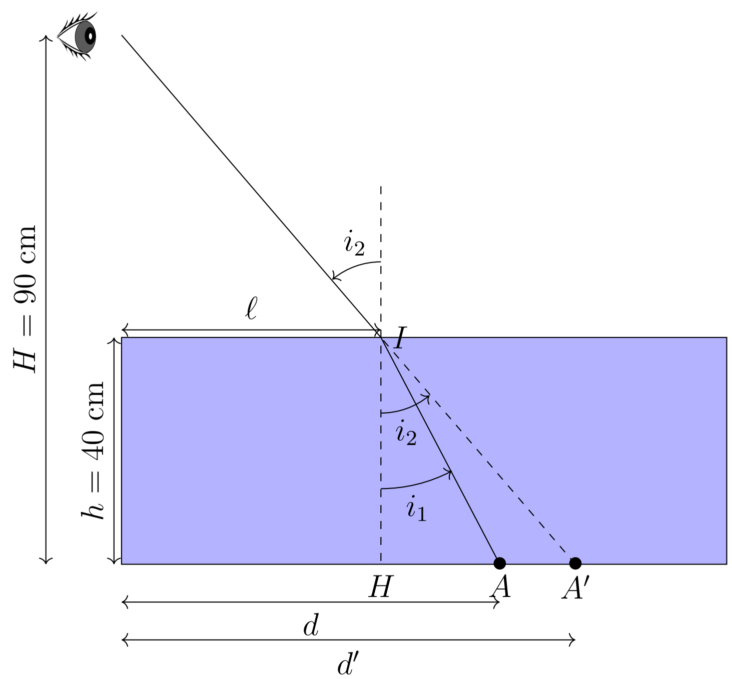
Exercice n°7 Attraper un objet dans l'eau ♪ ♪ ♪

Louise, 8 ans, de taille 110 cm regarde un objet au fond de sa petite piscine alors qu'elle est située au bord. La piscine de hauteur 50 cm contient une épaisseur de 40 cm d'eau ($n_{\text{eau}} = 1,33$). L'objet semble se situer, pour Louise, à une distance de $1,5$ m du bord.

À quelle distance se situe véritablement l'objet ?

On rappelle que le cerveau interprète la position des objets comme si la lumière qui en provient c'était dirigée en ligne droite depuis l'objet, même si le vrai rayon subit effectivement une réfraction ou une réflexion.

Solution:



On cherche d, connaissant d', H et h.

Il y a : i_1, i_2, ℓ et d qui sont inconnues. Il faut donc 4 équations indépendantes.

- Loi de Snell-Descartes : $n_{\text{eau}} \sin(i_1) = \sin(i_2)$ (1) (indice de l'air pris égal à 1).
- Dans le triangle HAI : $\tan(i_1) = \dfrac{HA}{h}$, soit $\tan(i_1) = \dfrac{d-\ell}{h}$ (2)
- Dans le triangle $HA'I$: $\tan(i_2) = \dfrac{HA'}{h}$, soit $\tan(i_2) = \dfrac{d'-\ell}{h}$ (3)
- De plus : $\tan(i_2) = \dfrac{\ell}{H-h}$ ou $\tan(i_2) = \dfrac{d'}{H}$ (4)

On égalise (3) et (4) pour déterminer ℓ : $\dfrac{d'}{H} = \dfrac{d'-\ell}{h}$, soit $\ell = d'\left(1 - \dfrac{h}{H}\right)$ (5)

On injecte (5) dans (2) : $d = h\tan(i_1) + \ell$, soit $d = h\tan(i_1) + d'\left(1 - \frac{h}{H}\right)$

Avec (1) et (4) : $i_1 = \arcsin\left(\frac{\sin(i_2)}{n_{\text{eau}}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{d'}{H}\right)\right)}{n_{\text{eau}}}\right)$

Ainsi : $\boxed{d = h \times \tan\left(\arcsin\left(\frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{d'}{H}\right)\right)}{n_{\text{eau}}}\right)\right) + d'\left(1 - \frac{h}{H}\right)}$

A.N. $h = 1,17$ m $< 1,5$ m

On pouvait également faire les AN au fur et à mesure (à éviter, mais comme ici les calculs sont compliqués)

(4) => $i_2 = \arctan\frac{d'}{H} = 59°$

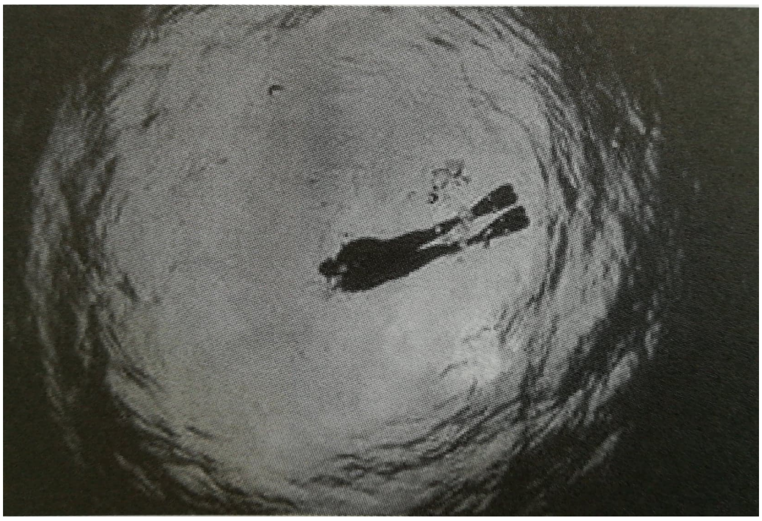
(1) => $i_1 = \arcsin\frac{\sin(i_2)}{n_{\text{eau}}} = 40,1°$

(3) => $\ell = d' - h\tan(i_2) = 0,833$ m

(2) => $d = h\tan(i_1) + \ell = 1,17$ m

Exercice n°8 Gouffre lumineux ♪ ♪ ♪

Estimer la profondeur à laquelle se situe l'observateur.



Solution: Éléments de corrigé, il faut des schémas, et de la rédaction en plus !

Idées :

- supposer que le plongeur est proche de la surface de l'eau.
- déterminer le rayon du disque lumineux avec la taille du plongeur : $R \approx 6$ m
- En déduire la profondeur

Les rayons lumineux provenant de l'extérieur et parvenant à l'œil de l'observateur sont contenus dans un cône de sommet l'œil de l'observateur et d'angle au sommet donné par la loi de Snell-Descartes : $n_{\text{air}}\sin(\pi/2) = n_{\text{eau}}\sin(i_{\text{cône}})$

Soit $i_{\text{cône}} = \arcsin\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}}$

Trigo : $\tan(i_{\text{cône}}) = \frac{R}{h}$

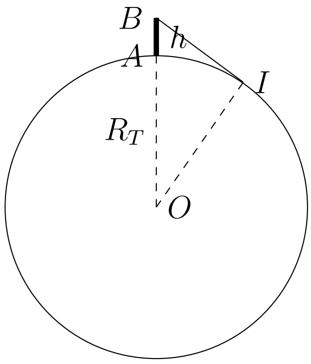
Profondeur de l'observateur : $h = \dfrac{R}{\tan \arcsin \dfrac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}}} = 5,2\text{ m}$

Exercice n°9 L'horizon ♪ ♪

Par une belle fin de journée de septembre, au bord de la plage à Cassis, la photo ci-dessous a été prise.

À quelle distance se trouve l'horizon ?

Solution:



Dans le triangle rectangle OBI en I :
D'après le théorème de Pythagore $OB^2 = BI^2 + OI^2$, avec $OB = R_T + h$; $OI = R_T$ et $BI = d$, la distance à l'horizon que l'on cherche.
Ainsi $d = \sqrt{(R_T + h)^2 - R_T^2}$, ainsi $d = \sqrt{2R_T h + h^2}$.
En prenant $R_T = 6370$ km et $h = 1,8$ m (taille de l'homme), on peut légitimement négliger la taille de l'homme devant le rayon de la Terre, et donc écrire que
$2R_T h + h^2 \approx 2R_T h$
L'horizon se trouve donc à une distance $\boxed{d = \sqrt{2R_T h} = 4,8\text{ km}}$