Thème I. Ondes et signaux (Optique géométrique)

TD n°1 Fondements de l'optique géométrique — *Corrigé*

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Vrai/Faux

	Vrai	Faux
R1. Le spectre du Soleil est continu.	✓	❑
R2. Lorsque la lumière se propage vers un milieu plus réfringent, le rayon réfracté se rapproche de la normale.	✓	❑
R3. Un objet se trouve au fond d'une piscine. Tous les rayons qu'il diffuse sont visibles d'un observateur situé au bord de la piscine.	❑	✓
R4. La lumière se propage plus vite dans l'eau ($n_{\text{eau}} = 1,3$) que dans l'air ($n_{\text{air}} = 1,0$).	❑	✓
R5. Une lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 5$ mm est visible par l'œil humain.	❑	✓
R6. La lumière solaire peut être considérée comme monochromatique.	❑	✓
R7. La lumière d'un LASER peut être considérée comme monochromatique.	✓	❑
R8. On peut observer un phénomène de réflexion totale lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu peu réfringent à un milieu plus réfringent.	❑	✓
R9. Lors du phénomène de réflexion, la direction du rayon réfléchi dépend de la longueur d'onde de la lumière.	❑	✓
R10. Lors du phénomène de réfraction, la direction du rayon réfracté dépend de la longueur d'onde de la lumière.	✓	❑

Exercice n°2 Verre flint

On considère un faisceau de lumière issue d'un LASER He-Ne (de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 632,8$ nm) se déplaçant dans l'air et frappant la surface d'un verre flint d'indice $n_{\text{flint}} = 1,7$.

R1. Quelle est la vitesse de la lumière dans le flint ?

Solution:

R2. Quelle est la longueur d'onde de la lumière du LASER dans le flint ?

Solution:

R3. Quel est l'angle de réfraction pour un angle d'incidence de 30° ?

Solution:

R4. Quel est l'angle d'incidence si l'angle de réfraction est de 30° ?

Solution:

Exercice n°3 Au fond du lac

Un lac peut être modélisé par une interface air-eau confondue avec le plan Oxy. L'axe (Oz) est normal à la surface du lac ; l'air d'indice 1,00 correspond à $z > 0$ alors que l'eau d'indice $n = 1,33$ occupe l'espace $z < 0$.

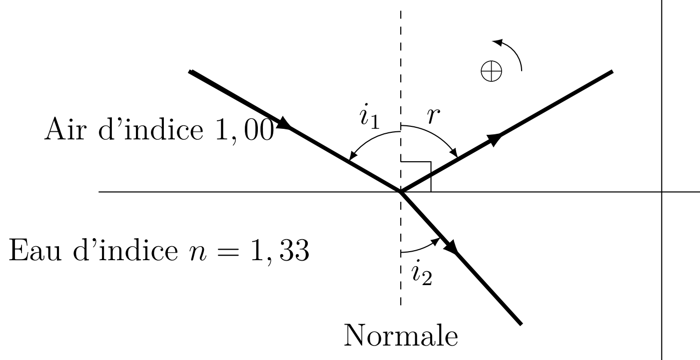
R1. Le Soleil fait un angle de 60° avec la verticale. Déterminer les caractéristiques du rayon réfléchi et transmis issus d'un rayon incident provenant du Soleil.

Solution:
D'après les lois de Snell-Descartes :

— les rayons réfléchi et transmis appartiennent au plan d'incidence défini par la normale et le rayon incident.

— Angle de réflexion : $\boxed{r = -i_1} = -60°$

— Angle de réfraction $\sin(i_1) = n\sin(i_2)$, soit $\boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right)} = 41°$



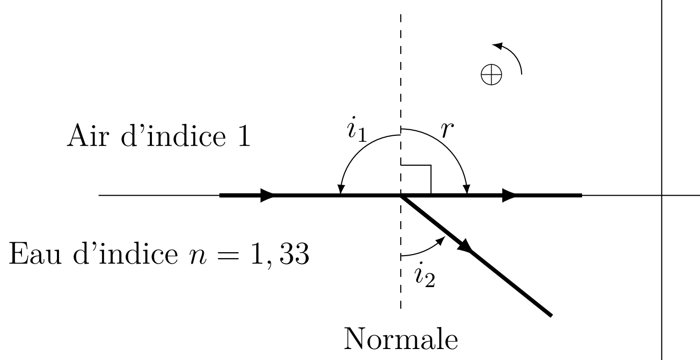
R2. Pour le Soleil couchant, déterminer les caractéristiques du rayon réfléchi et transmis.

Solution:
D'après les lois de Snell-Descartes :

— les rayons réfléchi et transmis appartiennent au plan d'incidence défini par la normale et le rayon incident.

— Angle de réflexion : $\boxed{r = -i_1} = -90°$

— Angle de réfraction $\sin(i_1) = n\sin(i_2)$, soit $\boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right)} = 49°$



Exercice n°4 Lampe au fond de la piscine

On positionne une lampe au fond d'une piscine de profondeur $h = 2$ m. Ses deux autres dimensions sont supposées suffisamment grandes. On prendra $n = 1,33$ pour l'indice optique de l'eau et $n_0 = 1$ pour l'air.

R1. Cette source émet dans toutes les directions de l'espace, représenter différents rayons qui parviennent sur le dioptre eau/air. Que peut-il s'y produire ?

Solution:

R2. Décrire quantitativement la zone de la surface à travers laquelle, les rayons lumineux issus de la lampe peuvent passer.

Solution:

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°5 Angle de Brewster

Un rayon lumineux arrive à l'interface plane séparant l'air d'un milieu d'indice n. Il se scinde en un rayon réfléchi et un rayon réfracté.

R1. Déterminer l'angle d'incidence i_B appelé angle de Brewster pour lequel rayon réfléchi et rayon réfracté sont perpendiculaires.

Solution:

R2. Faire l'application numérique dans le cas de l'eau d'indice $n = 1,33$.

Solution:

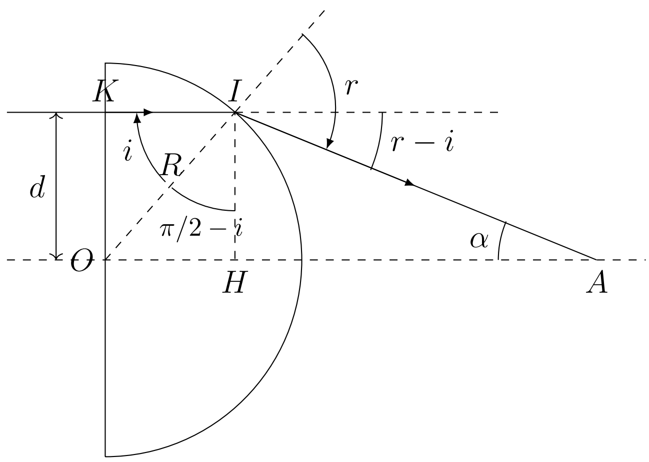
Exercice n°6 Trajet d'un rayon dans une demi-boule

On s'intéresse au trajet de rayons lumineux se propageant dans une demi-boule de centre O et de rayon R, d'indice optique n plongée dans l'air.
Le rayon arrive normalement à la face plane de la demi-boule, il est alors distant de d par rapport à l'axe optique. On note I le point d'incidence sur la partie sphérique, i l'angle d'incidence en I et r l'angle de réfraction en I. Le rayon émergent, lorsqu'il existe, coupe l'axe optique en A.

R1. Pourquoi peut-il se produire le phénomène de réflexion totale en I ? Établir l'inégalité que doit vérifier l'angle d'incidence i pour qu'il y ait réflexion totale en I.

Solution:

Il peut se produire un phénomène de réflexion totale en I car le **rayon passe du plexiglas à l'air qui est moins réfringent**.
Il se produit un phénomène de réflexion totale si l'angle d'incidence en I est supérieur à l'angle d'incidence limite pour lequel l'angle de réfraction est égal à $\frac{\pi}{2}$:
soit $n\sin(i_{\text{lim}}) = n_{\text{air}}\sin(\pi/2)$.
Il y a donc réflexion totale si $\boxed{i > i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}$



Remarques 1. *Réflexion totale*

— *N'écrivez pas : $n_2 < n_1$ pour justifier la réponse. Qu'est-ce que n_1 ? n_2 ? Répondez en français, en faisant des phrases.*

— *De plus, la condition sur l'angle d'incidence ne fait pas partie des hypothèses, puisqu'on vous demande justement de l'établir, donc n'écrivez pas « il y a réflexion totale si $n_2 < n_1$ et $i > i_{lim}$ », puisque vous n'en savez rien !*

— *ATTENTION : il y a réflexion totale pour des angles d'incidence SUPERIEURS à l'angle d'incidence limite tel que l'angle de réfraction vaut $\pi/2$. N'écrivez pas, « il y a réflexion totale quand $i_2 = \pi/2$: c'est faux ! »*

R2. À l'aide d'un peu de trigonométrie, établir l'expression de l'angle d'incidence i en fonction de d et R.

Solution: Dans le triangle OKI rectangle en K : $\sin(i) = \frac{d}{R}$,
soit $\boxed{d = R\sin(i)}$

R3. En déduire l'expression de la distance d_{lim} à l'axe optique pour qu'il y ait réflexion totale en I. Se produit-elle lorsque $d > d_{\text{lim}}$? ou lorsque $d < d_{\text{lim}}$?

Solution:

Il y a réflexion totale a condition que $\sin(i) > \dfrac{1}{n}$, ce que l'on peut écrire avec la question précédente : $\dfrac{d}{R} > \dfrac{1}{n}$, soit $\boxed{d > \dfrac{R}{n} = d_{\text{lim}}}$

Il se produit une réflexion totale lorsque $d > d_{\text{lim}} = \dfrac{R}{n}$.

On considère dans la suite que $d < d_{\text{lim}}$. *La suite est un peu plus calculatoire et nécessite de manipuler (un peu) la trigonométrie. Aidez-vous d'un grand schéma que vous compléterez clairement.*

R4. Montrer que la distance OA s'exprime en fonction de R, i et r par : $OA = R\left(\cos(i) + \dfrac{\sin(i)}{\tan(r-i)}\right)$.

Solution: Commençons par compléter le schéma ci-dessus avec le rayon réfracté, l'angle de réfraction r et le point A.
La distance en O et A s'écrit : $OA = OH + HA$, avec

- dans le triangle OHI rectangle en H : $\cos(i) = \dfrac{OH}{R}$, doit $OH = R\cos(i)$
- dans le triangle HIA rectangle en H : $\tan(\alpha) = \dfrac{HI}{HA}$, soit $HA = \dfrac{HI}{\tan(\alpha)}$, avec $\alpha = i - r$ (angle alterne-interne)
  De plus, $HI = d = R\sin(i)$
  Ainsi $HA = R\dfrac{\sin(i)}{\tan(r-i)}$

Ainsi $\boxed{OA = R\left(\cos(i) + \dfrac{\sin(i)}{\tan(r-i)}\right)}$
La position du point A dépend du rayon incident. Notamment, si on considère un faisceau de rayons parallèles à l'axe optique, ils croiseront l'axe optique en des positions différentes. Le demi-cylindre n'est pas stigmatique dans ces conditions.

R5. En déduire la position limite F' du point A lorsque d est très petit. On donnera l'expression en fonction de R et n.

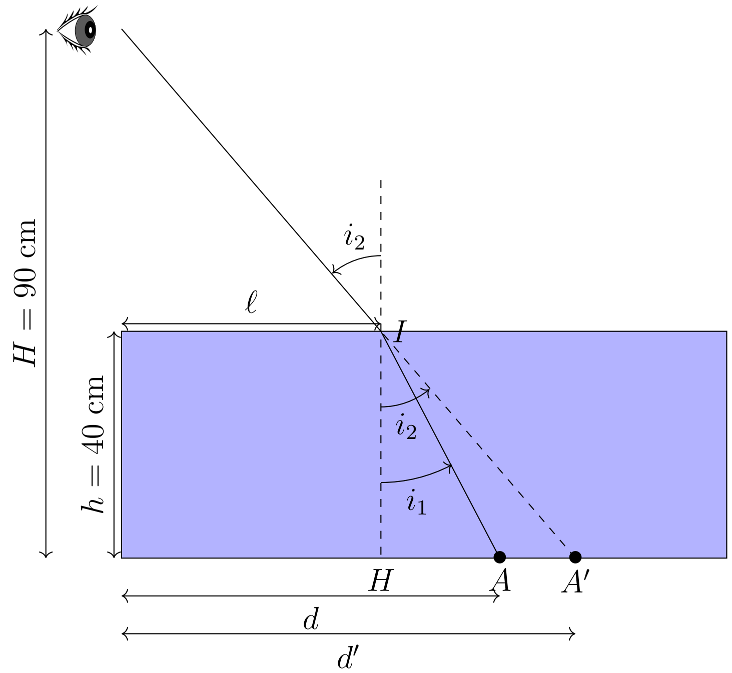
Solution: Lorsque $d \ll R$, on a $\sin(i) = \dfrac{d}{R} \ll 1$ et on peut alors utiliser le fait que $\sin(i) \approx i$ et $\cos(i) \approx 1$.
De plus, $n\sin(i) = \sin(r)$, donc si $i \ll 1$ rad, alors $r \ll 1$ rad, soit $r \approx ni$
Ainsi $OF' = \lim\limits_{\frac{d}{R}\to 0} OA \approx R\left(1 + \dfrac{i}{r-i}\right) \approx R\left(1 + \dfrac{i}{ni-i}\right)$
Soit $\boxed{OF' \approx R \times \dfrac{n}{n-1}}$

III Résolution de problèmes

Exercice n°7 Attraper un objet dans l'eau

Louise, 6 ans, de taille 110 cm regarde un objet au fond de sa petite piscine alors qu'elle est située au bord. La piscine de hauteur 50 cm contient une épaisseur de 40 cm d'eau ($n_{\text{eau}} = 1,33$). L'objet semble se situer, pour Louise, à une distance de $1,5$ m du bord.
À quelle distance se situe véritablement l'objet ?
On rappelle que le cerveau interprète la position des objets comme si la lumière qui en provient c'était dirigée en ligne droite depuis l'objet, même si le vrai rayon subit effectivement une réfraction ou une réflexion.

Solution:



On cherche d, connaissant d', H et h.

Il y a : i_1, i_2, ℓ et d qui sont inconnues. Il faut donc 4 équations indépendantes.

— Loi de Snell-Descartes : $n_{\text{eau}} \sin(i_1) = \sin(i_2)$ (1) (indice de l'air pris égal à 1).

— Dans le triangle HAI : $\tan(i_1) = \dfrac{HA}{h}$, soit $\tan(i_1) = \dfrac{d-\ell}{h}$ (2)

— Dans le triangle $HA'I$: $\tan(i_2) = \dfrac{HA'}{h}$, soit $\tan(i_2) = \dfrac{d'-\ell}{h}$ (3)

— De plus : $\tan(i_2) = \dfrac{\ell}{H-h}$ ou $\tan(i_2) = \dfrac{d'}{H}$ (4)

On égalise (3) et (4) pour déterminer ℓ : $\dfrac{d'}{H} = \dfrac{d'-\ell}{h}$, soit $\ell = d'\left(1 - \dfrac{h}{H}\right)$ (5)

On injecte (5) dans (2) : $d = h\tan(i_1) + \ell$, soit $d = h\tan(i_1) + d'\left(1 - \dfrac{h}{H}\right)$

Avec (1) et (4) : $i_1 = \arcsin\left(\dfrac{\sin(i_2)}{n_{\text{eau}}}\right) = \arcsin\left(\dfrac{\sin\left(\arctan\left(\dfrac{d'}{H}\right)\right)}{n_{\text{eau}}}\right)$

Ainsi : $\boxed{d = h \times \tan\left(\arcsin\left(\dfrac{\sin\left(\arctan\left(\dfrac{d'}{H}\right)\right)}{n_{\text{eau}}}\right)\right) + d'\left(1 - \dfrac{h}{H}\right)}$

A.N. $h = 1,17$ m $< 1,5$ m

On pouvait également faire les AN au fur et à mesure (à éviter, mais comme ici les calculs sont compliqués)

(4) => $i_2 = \arctan \dfrac{d'}{H} = 59°$

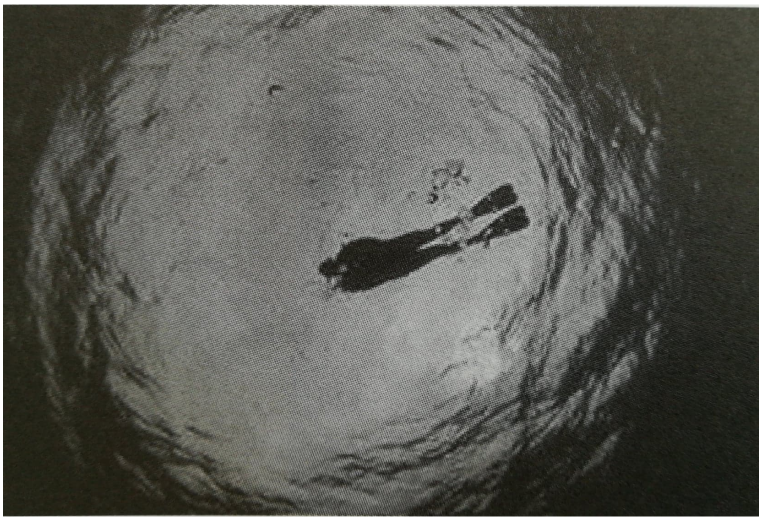
(1) => $i_1 = \arcsin \dfrac{\sin(i_2)}{n_{\text{eau}}} = 40,1°$

(3) => $\ell = d' - h\tan(i_2) = 0,833$ m

(2) => $d = h\tan(i_1) + \ell = 1,17$ m

Exercice n°8 Gouffre lumineux

Estimer la profondeur à laquelle se situe l'observateur.



Solution: Éléments de corrigé, il faut des schémas, et de la rédaction en plus !

Idées :

- supposer que le plongeur est proche de la surface de l'eau.
- déterminer le rayon du disque lumineux avec la taille du plongeur : $R \approx 6$ m
- En déduire la profondeur

Les rayons lumineux provenant de l'extérieur et parvenant à l'œil de l'observateur sont contenus dans un cône de sommet l'œil de l'observateur et d'angle au sommet donné par la loi de Snell-Descartes : $n_{\text{air}} \sin(\pi/2) = n_{\text{eau}} \sin(i_{\text{cône}})$

Soit $i_{\text{cône}} = \arcsin \dfrac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}}$

Trigo : $\tan(i_{\text{cône}}) = \dfrac{R}{h}$

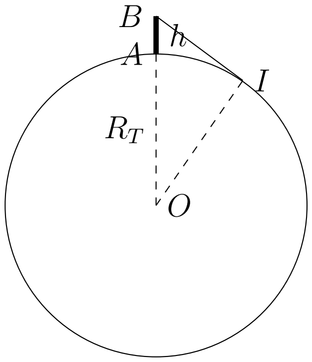
Profondeur de l'observateur : $h = \dfrac{R}{\tan \arcsin \dfrac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}}} = 5,2$ m

Exercice n°9 L'horizon

Par une belle fin de journée de septembre, au bord de la plage à Cassis, la photo ci-dessous a été prise.

À quelle distance se trouve l'horizon ?

Solution:



Dans le triangle rectangle OBI en I :
D'après le théorème de Pythagore $OB^2 = BI^2 + OI^2$, avec $OB = R_T + h$; $OI = R_T$ et $BI = d$, la distance à l'horizon que l'on cherche.
Ainsi $d = \sqrt{(R_T + h)^2 - R_T^2}$, ainsi $d = \sqrt{2R_T h + h^2}$.
En prenant $R_T = 6370$ km et $h = 1,8$ m (taille de l'homme), on peut légitimement négliger la taille de l'homme devant le rayon de la Terre, et donc écrire que
$2R_T h + h^2 \approx 2R_T h$
L'horizon se trouve donc à une distance $\boxed{d = \sqrt{2R_T h} = 4,8 \text{ km}}$