Thème I. Ondes et signaux (Électricité)

TD n°4 Circuits linéaires du premier ordre

Méthode : Comment travailler des exercices ?

Avant la séance de TD :

- ★ Sur une feuille de brouillon, avec un crayon à la main et le chapitre ouvert sous les yeux.
- ★ Essayer des « trucs » même si cela n'aboutit pas.
- ★ Faire des schémas complets et suffisamment grands.
- ★ Ne rien écrire sur l'énoncé de TD afin de pouvoir refaire les exercices après la correction en classe.
- ★ Réfléchir environ 10 à 15 min sur chaque exercice demandé. Si vous bloquez complètement sur une question/un exercice, passez à la suite au bout de 10 min, et me poser des questions soit directement soit par mail nvalade.pcsi@gmail.com .

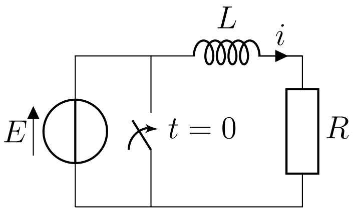
Après la séance de TD :

- ★ Refaire les exercices corrigés ensemble, sans regarder le corrigé dans un premier temps.
- ★ Une fois l'exercice terminé ou si vous êtes totalement bloqué, reprendre avec le corrigé.

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4
Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur.	✎	✎	✎	✎
Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine, pour déterminer notamment les conditions initiales.	✎	✎	✎	✎
Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.	✎	✎	✎	✎
Déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon.	✎	✎	✎	✎
Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon.		✎		
Réaliser un bilan énergétique.	✎			

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Décharge d'une bobine



On considère le circuit ci-contre, où E est la fem constante du générateur idéal de tension.
Pour $t < 0$ l'interrupteur est ouvert depuis un temps très long.
À $t = 0$ on ferme l'interrupteur.

Q1. Déterminer la valeur de la tension aux bornes de la bobine, et de l'intensité, lorsque $t < 0$.

Q2. Faire de même lorsque $t > 0$ au bout d'un temps très long (donc une fois le régime permanent atteint).

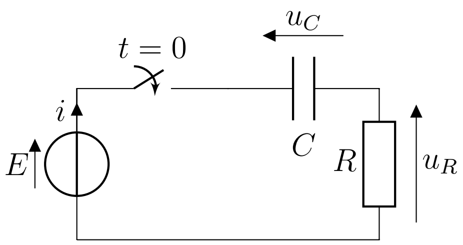
Q3. Établir l'équation différentielle portant sur l'intensité traversant la bobine, pour $t > 0$.

Q4. Résoudre cette équation. Tracer l'allure de la réponse.

Q5. Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire ? On prendra $L = 0,1$ H et $R = 1$ kΩ.

Q6. Faire un bilan de puissance pour $t > 0$. Interpréter alors chacun des termes comme puissance reçue ou cédée.

Exercice n°2 Charge du condensateur



On considère le circuit ci-contre, où E est la fem constante du générateur idéal de tension.
Pour $t < 0$ l'interrupteur est ouvert depuis un temps très long, et le condensateur est déchargé.
À $t = 0$ on ferme l'interrupteur.

Q1. Déterminer la valeur de la tension aux bornes du condensateur et de la résistance, lorsque $t < 0$.

Q2. Déterminer la valeur de la tension aux bornes du condensateur et de la résistance juste après la fermeture de l'interrupteur (à $t = 0^+$).

Q3. Faire de même lorsque $t > 0$ au bout d'un temps très long (donc une fois le régime permanent atteint).

On visualise à l'écran de l'oscilloscope l'une des tensions du circuit.

Q4. Identifier, en justifiant, la tension représentée.

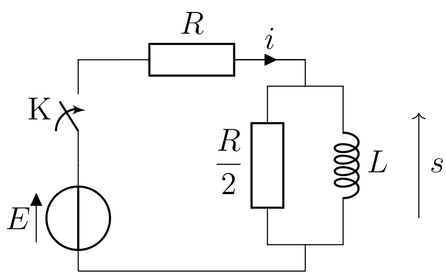
Q5. Établir l'équation différentielle portant sur la tension aux bornes de la résistance.

Q6. Résoudre complètement cette équation différentielle.

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°3 Étude d'un circuit RL

On étudie le circuit ci-contre.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K, qui était ouvert depuis très longtemps.



Q1. L'intensité du courant i traversant la résistance R est-elle continue en $t = 0$? Sinon, donner les valeurs en $t = 0^-$ et $t = 0^+$.

Q2. Même question pour la tension s. Que vaut $s(t)$ lorsque t tend vers l'infini ?

Q3. Établir l'équation différentielle vérifiée par s, en déduire l'expression de s et tracer son allure[*] .

Q4. Exprimer en fonction de L et R, le temps t_0 au bout duquel la tension s a été divisée par 10.

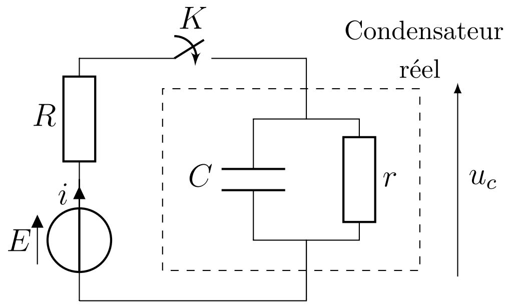
Q5. On mesure $t_0 = 3,0$ µs pour $R = 1000\ \Omega$. En déduire la valeur de L. On donne $1/\ln(10) \approx 0,43$.

∗. Méthode :

1. Écrire les 5 équations : loi des mailles, des nœuds et les 3 relations courant/tension.
2. Exprimer les différentes grandeurs électriques en fonction de s.
3. En déduire l'équation différentielle en fonction de $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0$.
4. La résoudre en utilisant les conditions initiales fournies.

Exercice n°4 Charge d'un condensateur réel

Un condensateur réel est modélisé par l'association parallèle d'un condensateur idéal de capacité C et d'une résistance r dite « de fuite ».
Le condensateur réel est chargé par un générateur idéal de fem E, à travers une résistance R.
Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert et le condensateur déchargé.
À $t = 0$, on ferme K.



Q1. Que vaut la tension $u_c(t = 0^+)$ juste après la fermeture de l'interrupteur ?

Q2. Déterminer la valeur finale $u_c(\infty)$ atteinte par u_c à la fin du régime transitoire en utilisant le comportement des composants en régime permanent.

Q3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ et l'écrire sous forme canonique et identifier τ †.

Q4. Résoudre complètement l'équation différentielle précédente, en prenant en compte les conditions initiales.

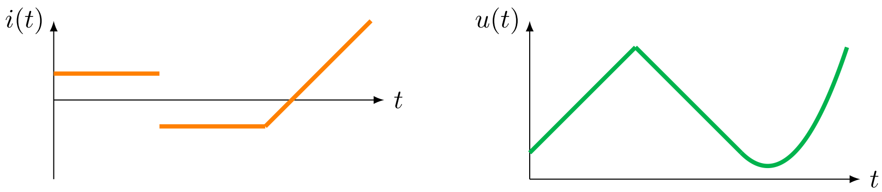
Q5. Tracer le graphe de $u_c(t)$. Quelle est la tension finale aux bornes du condensateur ?

Q6. On appelle temps de réponse t_r à 5% le temps que met la tension pour atteindre la valeur finale à 5% près : c'est le temps t_r tel que $|u_C(t_r) - u_{C,\text{finale}}| = 0,05|u_{C,\text{finale}}|$. Déterminer ce temps de réponse à 5% .

III Extraits du cahier d'entraînement de physique-chimie

Entraînement 4.1 — Bobine ou pas ?

On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



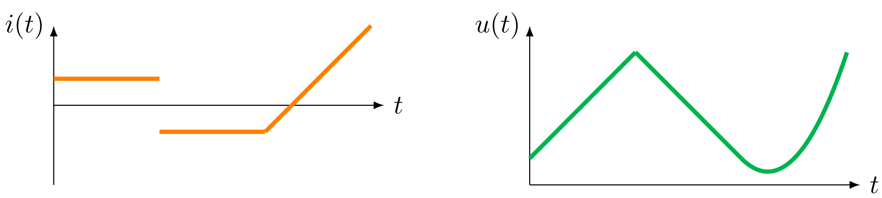
Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme une bobine ?

(a) oui (b) non

. . . .

Entraînement 4.5 — Condensateur ou pas ?

On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme un condensateur ?

(a) oui (b) non

. . . .

†. Méthode :

1. Appliquer la loi des nœuds.
2. Exprimer les intensités à travers r et C en fonction de u_c.
3. Exprimer i en fonction de u_c.
4. En déduire que l'équation différentielle s'écrit : $\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)u_c(t) = \frac{E}{RC}$

Conditions initiales et régime stationnaire

On utilisera dans cette partie les notations suivantes pour une grandeur donnée x :

- $x(0^-) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t<0}} x(t)$
- $x(0^+) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} x(t)$
- $x(+\infty) = \lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$.

Entraînement 4.7 — Condensateurs et bobines en régime stationnaire.

En régime stationnaire, toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps.

a) Dans ce cas, un condensateur se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé (b) une source de tension (c) un interrupteur ouvert

....

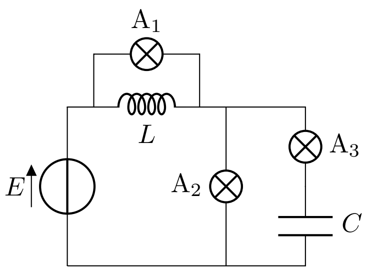
b) Quant à la bobine, elle se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé (b) une source de courant (c) un interrupteur ouvert

....

Entraînement 4.8 — Éclairage en régime permanent.

On considère le circuit constitué de lampes (symbolisées par —⊗—) que l'on peut assimiler à des résistances qui brillent quand elles sont parcourues par un courant électrique.



Le régime permanent étant établi, la ou les ampoules qui brillent sont :

(a) l'ampoule A_1 (b) l'ampoule A_2 (c) l'ampoule A_3

....

Entraînement 4.9 — Relations de continuité.

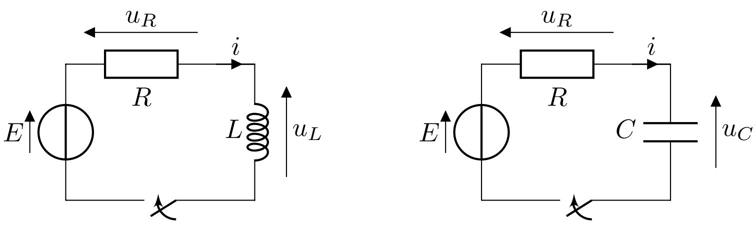
Dans ce QCM, plusieurs réponses sont possibles pour chaque question.

a) Aux bornes de quel(s) dipôle(s) la tension est-elle toujours continue ?

(a) une résistance (c) un condensateur
(b) une bobine (d) un interrupteur fermé

....

On considère les deux circuits (1) et (2) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.
On suppose de plus que le condensateur est initialement déchargé.



(1) (2)

b) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (1) ?

ⓐ i ⓑ u_L ⓒ u_R

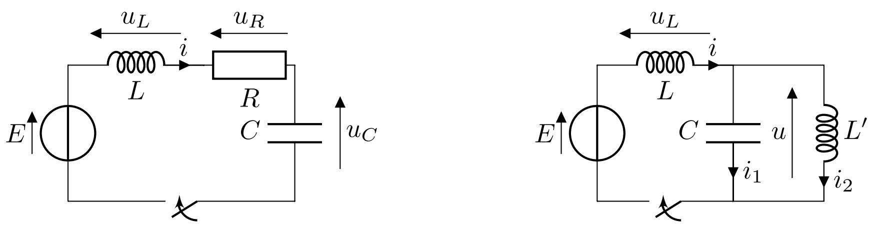
....

c) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (2) ?

ⓐ i ⓑ u_C ⓒ u_R

....

On considère à présent les deux circuits (3) et (4) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. On suppose de plus que les condensateurs sont initialement déchargés.



(3) (4)

d) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (3) ?

ⓐ i ⓑ u_L ⓒ u_R ⓓ u_C

....

e) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (4) ?

ⓐ i ⓑ i_1 ⓒ u ⓓ u_L

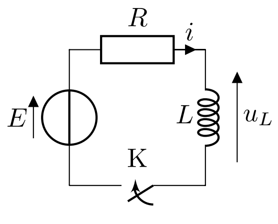
....

Entraînement 4.10 — Conditions initiales pour circuits du premier ordre.

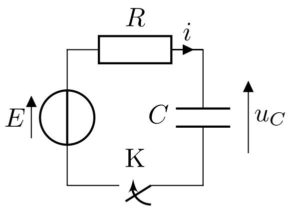
On considère trois circuits constitués de générateurs de tension de fém constante E, de conducteurs de résistance R ainsi que de condensateurs de capacité C et d'une bobine d'inductance L.

L'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$.

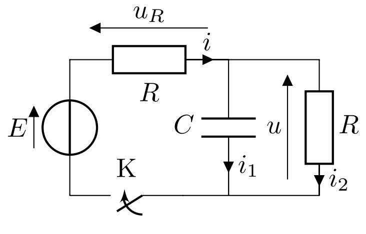
Tous les condensateurs sont initialement déchargés.



(1)



(2)



(3)

On considère dans un premier temps le circuit (1).

a) Exprimer $i(0^+)$ ....

b) Exprimer $u_L(0^+)$ ....

On considère à présent le circuit (2).

c) Exprimer $i(0^+)$ ....

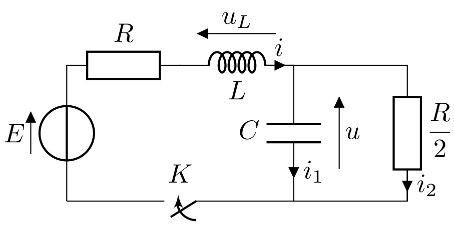
On considère finalement le circuit (3).

d) Exprimer $u_R(0^+)$ ....

e) En déduire $i_1(0^+)$ ....

Entraînement 4.11 — Circuit à deux mailles.

Le circuit suivant, constitué de deux mailles indépendantes, est alimenté par un générateur de tension de fém E constante.



Pour ce circuit, on considère de plus que :

- l'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$;
- le condensateur est initialement déchargé.

Exprimer :

a) $u(0^+)$ ....

b) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$ ....

c) $i(+\infty)$ ....

d) $u(+\infty)$ ....

Circuits du premier ordre

On dit qu'un circuit est *du premier ordre* quand il est régi par une équation différentielle qui se met sous la forme canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t) \qquad (*)$$

où τ est la constante de temps représentative de la durée du régime transitoire.

Quand l'équation différentielle est écrite comme dans $(*)$, on dit qu'elle est *sous forme canonique*.

Entraînement 4.12 — Constantes de temps.

On donne des exemples d'équations différentielles régissant des grandeurs électriques d'un circuit.

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la constante de temps τ.

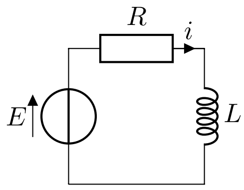
a) $L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = E - Ri(t)$ ....

b) $RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = E - 2u_C(t)$ ....

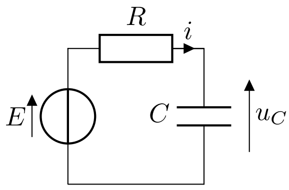
Entraînement 4.13 — Des mises en équations.

On cherche à obtenir l'équation différentielle qui régit le comportement d'une grandeur électrique dans chacun des circuits suivants.

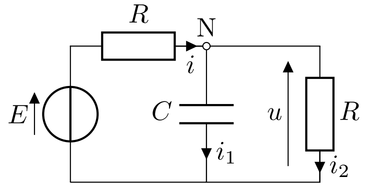
Cette équation devra être donnée sous forme canonique.



(1)



(2)



(3)

On considère le circuit (1).

a) À partir de la loi des mailles, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$

....

On considère maintenant le circuit (2). Déterminer :

b) l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ ....

c) l'équation différentielle pour le courant $i(t)$ ....

On considère enfin le circuit (3) qui comporte deux mailles. En appliquant la loi des nœuds au point N, déterminer :

d) la relation entre le courant $i(t)$, la tension $u(t)$ et $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ ..

e) En déduire l'équation différentielle pour la tension $u(t)$ ...

Entraînement 4.14 — Allez, on s'entraîne !

N'oubliez pas d'exprimer une solution particulière avant d'appliquer les conditions initiales !

a) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u_C(t) = \dfrac{E}{\tau}$ avec $u_C(0) = 0$ ....

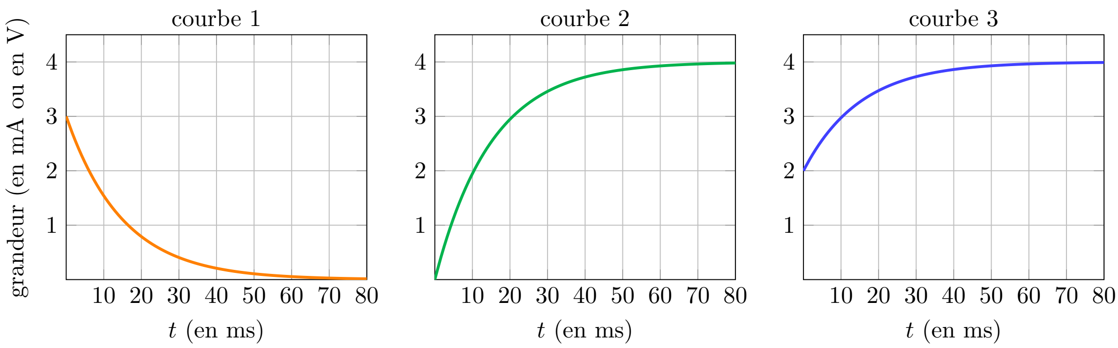
b) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}i(t) = 0$ avec $i(0) = \dfrac{E}{R}$ ....

c) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u(t) = \dfrac{E}{2\tau}$ avec $u(0) = \dfrac{E}{2}$ ....

Entraînement 4.15 — Analyse de courbes.

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois grandeurs au cours du temps :

- deux tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
- une intensité $i(t)$.



a) On a

$$u_1(t) = E_1\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

....

b) On a

$$u_2(t) = E_2\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-t/\tau}}{2}\right).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

....

c) On a

$$i(t) = \frac{E_1}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

....

Déterminer les valeurs numériques de :

d) E_1 ....

e) E_2 ....

f) R ....

Bilans d'énergie pour des circuits soumis à des échelons de tension

Prérequis
L'énergie $\mathcal{E}$ fournie à un dipôle entre les temps t_0 et t_1 est égale à

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

où $\mathcal{P}(t)$ est la puissance instantanée fournie à ce dipôle.

Entraînement 6.13 — Charge d'un condensateur.

Soit le circuit ci-contre dans lequel le condensateur C est initialement déchargé.

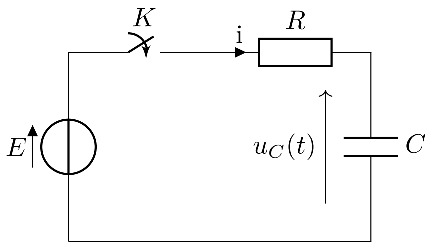
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

Dans ces conditions, la tension aux bornes du condensateur vaut

$$u_C(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))$$

avec $\tau = RC$; l'intensité dans le circuit vaut

$$i(t) = \frac{CE}{\tau}\exp(-t/\tau).$$



Exprimer, en fonction des grandeurs introduites :

a) la puissance instantanée $\mathcal{P}_E(t)$ délivrée par la source de fém E. ....

b) la puissance instantanée $\mathcal{P}_J(t)$ dissipée par effet Joule dans le circuit. .....

c) la puissance instantanée $\mathcal{P}_C(t)$ reçue par le condensateur ....

d) l'énergie totale $\mathcal{E}_E$ fournie par la source de tension que l'on calculera grâce à la formule

$$\mathcal{E}_E = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_E(t)\,\mathrm{d}t.$$

....

e) l'énergie totale $\mathcal{E}_J$ dissipée par effet Joule que l'on calculera grâce à la formule

$$\mathcal{E}_J = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_J(t)\,\mathrm{d}t.$$

....

f) l'énergie totale $\mathcal{E}_C$ fournie au condensateur que l'on calculera grâce à la formule

$$\mathcal{E}_C = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_C(t)\,\mathrm{d}t.$$

....