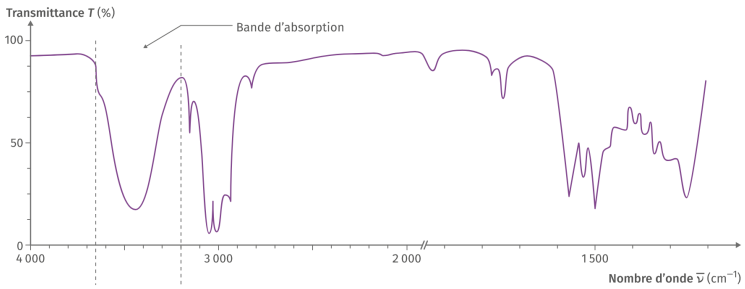
Thème I. Ondes et signaux (Oscillateurs)

Chapitre n°5 Oscillateurs mécaniques et électriques libres harmoniques

En terminale, en chimie, vous avez étudié des spectres infra-rouge (cf ci-contre). Vous avez appris à identifier les bandes caractéristiques et les associer aux liaisons présentent dans la molécule.
Pourquoi la liaison C=C vibre-t-elle à une fréquence supérieure à la liaison C−C ?
Pourquoi la liaison C−H vibre-t-elle à une fréquence supérieure à la liaison C−C ?



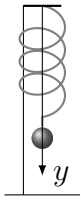
Spectre infra-rouge (D'après https://www.lelivrescolaire.fr/page/18369066)

Expérience

On accroche à un ressort fixé à une potence une masse (cf schéma ci-contre). On étire le ressort.

Q1. Que se passe-t-il ? Représenter la position y de la masse en fonction du temps.

Q2. Quelle fonction mathématique permettrait de modéliser cette évolution ?



Pré-requis

- Terminale : Thème Mouvement et interactions
  - Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point : définition et expression en coordonnées cartésiennes.
  - Deuxième loi de Newton.
- PCSI : Thème Ondes et signaux. Chapitre n°3. Signaux électriques dans l'ARQS.

Objectifs du chapitre

— Étudier deux oscillateurs harmoniques : l'oscillateur {masse-ressort} et l'oscillateur LC série.
— Étudier les propriétés des oscillateurs harmoniques.
— Outils mathématiques : résoudre les équations différentielles $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y(t) = B$
— Réaliser un bilan d'énergie de ces deux systèmes.

Plan du cours

I Étude de l'oscillateur harmonique mécanique **2**
I.1 Position du problème 2
I.2 Force de rappel élastique 3
I.3 Position d'équilibre 4
I.4 Équation du mouvement 5
I.5 Comment résoudre l'équa diff de l'OH ? . . 6
I.6 Évolution harmonique 7
I.7 Approche énergétique 8
I.7.a) Énergies mises en jeu 8
I.7.b) Conservation de l'énergie mécanique 9

II Un autre oscillateur harmonique : le circuit LC **9**
II.1 Circuit étudié 9
II.2 Équation différentielle 9
II.3 Conditions initiales 10
II.4 Résolution complète 10
II.5 Aspect énergétique 10

III Analogie **11**

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – ☺ – ☹ – Définir les caractéristiques d'un signal sinusoïdal : amplitude, période, fréquence, pulsation et phase à l'origine des temps.

2 – ☺ – ☹ – Donner l'expression d'un signal harmonique/sinusoïdal.

3 – ☺ – ☹ – Donner les relations entre la période, la fréquence et la pulsation.

4 – ☺ – ☹ – Établir l'équation différentielle du mouvement d'une masse accrochée à un ressort horizontal.

5 – ☺ – ☹ – Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur dans un circuit LC série.

6 – ☺ – ☹ – Déterminer les conditions initiales d'un circuit électrique LC série.

7 – ☺ – ☹ – Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique $\ddot{y} + \omega_0^2 y = b$ connaissant les conditions initiales $y(0)$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)$.

8 – ☺ – ☹ – Représenter l'allure de l'évolution temporelle, en tenant compte des conditions initiales, en plaçant dessus l'amplitude, la valeur moyenne et la période.

9 – ☺ – ☹ – Donner les expressions de l'énergie cinétique, l'énergie potentielle de pesanteur, l'énergie potentielle élastique d'un point matériel.

10 – ☺ – ☹ – Exprimer l'énergie mécanique d'un oscillateur mécanique harmonique.

11 – ☺ – ☹ – Faire le bilan de puissance du circuit LC série.

I Étude de l'oscillateur harmonique mécanique

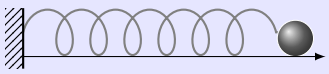
I.1 Position du problème

Animation : oscillateur harmonique

On considère le système constitué d'une masse m, accrochée à un ressort (de masse supposée négligeable), astreinte à se déplacer horizontalement sur un support sur lequel les frottements peuvent être négligés.

Définition : Ressort

Un **ressort** est un dispositif mécanique pouvant se déformer, c'est-à-dire s'allonger et se raccourcir.



Sans contrainte, lorsqu'il est posé sur une table horizontale, la longueur prise par le ressort est appelée **longueur à vide**, notée ℓ_0.
Hors de la position de repos, la longueur du ressort, appelée **longueur instantanée**, notée ℓ, est différente de sa longueur à vide.

Méthode : Comment commencer l'étude d'un système mécanique ?

AVANT TOUTE CHOSE, il FAUT :

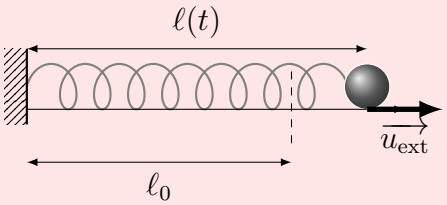
1. Définir le système étudié.
2. Préciser le référentiel d'étude.
3. Réaliser le bilan des forces qui s'exercent sur le système étudié.
4. Représenter un schéma du dispositif étudié, sur lequel les forces seront représentées, ainsi que les axes cartésiens nécessaires.

I.2 Force de rappel élastique

À connaître : La force de rappel élastique

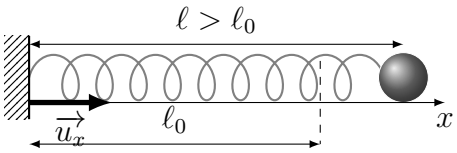
La force de rappel élastique exercée par un ressort de **longueur à vide** ℓ_0, de constante de raideur k et de **longueur instantanée** $\ell(t)$ s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{\text{élastique}}} = -k\left(\ell(t) - \ell_0\right)\overrightarrow{u_{\text{ext}}}}$$

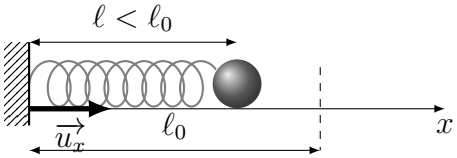


avec $\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$ le **vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort**.

- Si $\ell > \ell_0$, soit $(\ell - \ell_0) > 0$, le ressort est étiré et tend à vouloir se raccourcir en exerçant sur la masse m une force de rappel $\overrightarrow{f_{\text{élastique}}}$ dirigée selon $-\overrightarrow{u_x}$: $\overrightarrow{f_{\text{élastique}}} = \underbrace{-k\underbrace{\left(\ell(t) - \ell_0\right)}_{>0}}_{<0}\overrightarrow{u_x}$



- Si $\ell < \ell_0$, soit $(\ell - \ell_0) < 0$, le ressort est comprimé et tend à vouloir s'allonger en exerçant sur la masse m une force de rappel $\overrightarrow{f_{\text{élastique}}}$ dirigée selon $+\overrightarrow{u_x}$: $\overrightarrow{f_{\text{élastique}}} = \underbrace{-k\underbrace{\left(\ell(t) - \ell_0\right)}_{<0}}_{>0}\overrightarrow{u_x}$



Méthode : Comment exprimer la force de rappel élastique ?

1. Faire un schéma avec dessus :
   - le ressort,
   - la longueur du ressort (représentée par une double flèche avec « ℓ » dessus) d'un bout à l'autre du ressort,
   - le vecteur $\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$,
   - l'axe orienté $((Ox), (Oy), (Oz))$ et le vecteur unitaire correspondant $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$,
   - l'origine O de l'axe,
   - la distance algébrique (x, y, z) entre l'origine O et la masse.
2. Écrire la force de façon générale $\overrightarrow{f} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$.
3. Relier $\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$ au vecteur unitaire orientant l'axe.
4. Relier la longueur du ressort ℓ à la position sur l'axe en s'aidant du dessin.
5. Vérifier la validité physique de la formule.

Attention à l'expression de la force de rappel élastique

- La force de rappel a toujours la MÊME EXPRESSION que $\ell(t) > \ell_0$ ou $\ell(t) < \ell_0$.
- Ne pas confondre la longueur à vide ℓ_0, la longueur instantanée du ressort ℓ, et l'abscisse x.
- La force s'exprime toujours en premier lieu à partir des longueurs ℓ et ℓ_0.
- ℓ ne dépend pas de l'origine du repère ; x en dépend.
- Il faut toujours **vérifier la pertinence du signe** de cette expression en réalisant une expérience de pensée : Si je comprime le ressort, dans quel sens va être la force...

I.3 Position d'équilibre

Définition : Position d'équilibre

Une **position d'équilibre** $x_{\text{éq}}$ est une position telle que si on y pose le système sans vitesse initiale alors il y reste :

$$\text{Si à } t=0,\ x(t=0)=x_{\text{éq}} \text{ et } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0)=0, \text{ alors } \forall t>0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=0.$$

À retenir

En une position d'équilibre, la somme des forces s'exerçant sur l'objet est nulle : $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}$

La réciproque est fausse : cf principe d'inertie.

Méthode : Comment déterminer une position d'équilibre ?

1. Écrire qu'à l'équilibre : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}$.
2. Isoler la longueur du ressort à l'équilibre $\ell_{\text{éq}}$ et l'exprimer en fonction de ℓ_0, m, g et k.
3. Vérifier la cohérence physique :
   - vérifier l'homogénéité de la formule (penser au fait que $[k\ell_{\text{éq}}] = [mg]$;
   - comparer physiquement $\ell_{\text{éq}}$ à ℓ_0, en lien avec l'effet du poids sur la masse.

Exercice à maîtriser n°1 – Établir la position d'équilibre

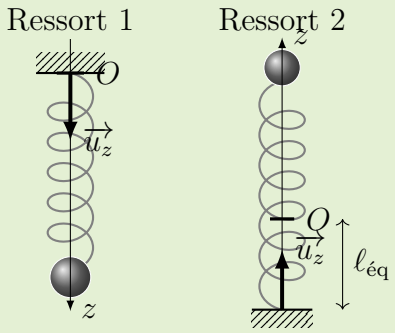
On étudie un ressort placé sur une table horizontale.

Q1. Déterminer la longueur $\ell_{\text{éq}}$ du ressort si celui-ci est horizontal.

Q2. On place l'origine de l'axe (Ox) au point d'attache du ressort. En déduire la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$.

Activité n°2 – Positions d'équilibre de ressorts verticaux

Une masse m est attachée à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k.



Q1. Déterminer pour le ressort 1 la longueur du ressort à l'équilibre. Comparer à la longueur à vide.

Q2. Déterminer pour le ressort 2 la longueur du ressort à l'équilibre. Comparer à la longueur à vide.

I.4 Équation du mouvement

Capacité exigible : Établir l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique.

Méthode : Comment établir l'équation du mouvement ?

1. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au système étudié et dans le référentiel choisi.
2. Projeter sur l'axe du mouvement et obtenir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.
3. L'écrire sous forme canonique :
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$$
4. Identifier l'expression de ω_0, la **pulsation propre** de l'oscillateur.

Exercice à maîtriser n°3 – Établir l'équation du mouvement de l'oscillateur mécanique

Q1. Énoncer et appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique en référentiel galiléen.

Q2. Le mouvement se faisant selon l'axe horizontal (Ox), projeter l'équation précédente selon $\overrightarrow{u_x}$ afin d'obtenir une relation entre $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ et x : c'est une **équation différentielle**.

Q3. Mettre l'équation différentielle sous la forme canonique : $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$ et donner l'expression de ω_0 en fonction de k et m.

Q4. Déterminer la dimension et l'unité (dans le système international) de ω_0.

À retenir : Équation d'un oscillateur harmonique

Un **oscillateur harmonique** est un système dont l'évolution temporelle est régie par une équation différentielle :
$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\, s = b$$
où ω_0 est la **pulsation propre** (en rad/s) de l'oscillateur harmonique qui **dépend des caractéristiques intrinsèques du système**.

I.5 Comment résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique ?

Capacité exigible : Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique compte tenu des conditions initiales.

Méthode : Comment résoudre l'équation différentielle $\ddot{y} + \omega_0^2 y = b$ (E) ?

1. La solution générale de l'équation (E) s'écrit

$$y(t) = y_H(t) + y_P$$

avec

2. y_H la solution générale de l'**équation homogène (sans 2nd membre)** $\ddot{y}_H + \omega_0^2 y_H = 0$ (EH) :

$$\begin{aligned} y_H(t) &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ y_H(t) &= Y_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

3. y_P **une solution particulière de l'équation différentielle étudiée (E)**, recherchée sous la forme du second membre, constant ici, qui vérifie : $0 + \omega_0^2 y_P = b$
4. En déduire la solution générale de (E) :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_H(t) + y_P \\ y(t) &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + y_P \\ y(t) &= Y_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + y_P \end{aligned}$$

5. Déterminer les deux constantes d'intégration (A, B) à l'aide des deux conditions initiales $y(t=0) = y_0$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t=0) = v_0$.
   a) D'après la solution $y(0) = A + \frac{b}{\omega_0^2}$, or d'après la CI $y(0) = y_0$. Ainsi $A + \frac{b}{\omega_0^2} = y_0$, donc $A = ...$
   b) Exprimer la dérivée de y : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

   Puis exprimer sa valeur en $t = 0$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = B\omega_0$. Et on en déduit $B\omega_0 = v_0$, d'où $B = ...$
6. Conclure sur l'expression de $x(t)$.

Méthode : Comment tracer l'allure de l'évolution temporelle d'un OH ?

1. **Indiquer les noms des axes** : abscisses et ordonnées.
2. Identifier s'il y a un **terme constant** qui s'ajoute aux termes sinusoïdaux. Si oui, reporter sur le graphe en pointillé ce terme constant en indiquant son nom sur le graphe. C'est autour de cette valeur que va osciller la grandeur.
3. Repérer les **conditions initiales** pour :
   — à partir de $x(0)$ (ou $u_c(0)$, ...) placer convenablement le point de départ (à 0, à la position d'équilibre, au-dessus de la position d'équilibre, en-dessous,...) ;
   — la valeur de la dérivée en 0 indique comment faire partir la courbe (0 : tangente horizontale ; > 0 : croissante ; < 0 : décroissante).
4. Tracer quelques périodes.

Exercice à maîtriser n°4 – Résolution de l'équation différentielle de l'OH mécanique

Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$ en tenant compte des conditions initiales suivantes et représenter $x(t)$ dans les différents cas.

Q1. On étire le ressort depuis sa position d'équilibre d'une distance a et on lâche la masse sans vitesse initiale : $x(0) = x_{\text{éq}} + a$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$

Q2. Depuis la position d'équilibre, on communique une vitesse initiale à la masse : $x(0) = x_{\text{éq}}$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$

Q3. $x(0) = x_{\text{éq}} + a$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$

Q4. $x(0) = x_{\text{éq}}$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$

I.6 Évolution harmonique

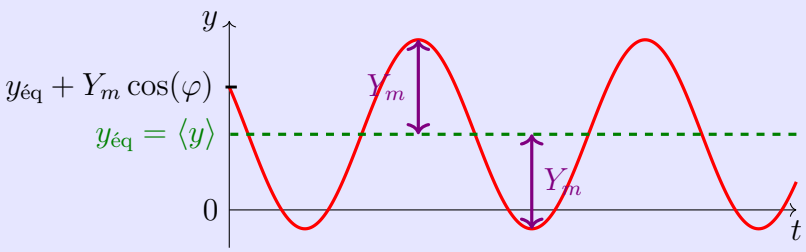
Capacité exigible : Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.

Définitions : Évolution harmonique

La solution générale de l'oscillateur harmonique s'écrit

$$y(t) = Y_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + y_{\text{éq}}$$

- Y_m est l'**amplitude** : $Y_m = \dfrac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$. C'est une **grandeur positive** de même dimension que y.
- ω_0 est la **pulsation propre**, en **rad/s**, elle dépend des paramètres intrinsèques de l'oscillateur.
- φ est la **phase à l'origine des temps**, en **radians**.
- $\langle y(t) \rangle = y_{\text{éq}}$ est la **valeur moyenne** de y : c'est la valeur autour de laquelle oscille y.



À connaître : Liens entre f_0, T_0, et ω_0

La **période propre** T_0 définie comme étant la plus petite durée non nulle telle que

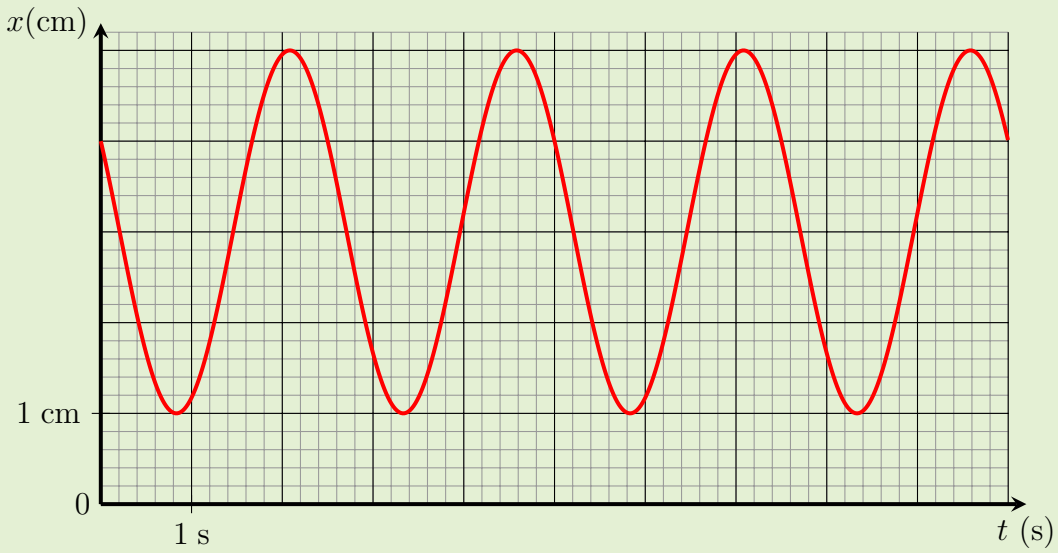
$$\forall t \;\; y(t + T_0) = y(t)$$

Elle est reliée à la pulsation propre par $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

La **fréquence propre** f_0 est reliée à T_0 et ω_0 par $f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$

Activité n°5 – Lectures graphiques

On donne l'évolution de la position $x(t)$ d'un oscillateur harmonique au cours du temps.



Q1. Déterminer graphiquement l'amplitude.

Q2. Déterminer graphiquement la valeur moyenne.

Q3. Déterminer graphiquement la période propre, notée T_0.

Q4. Déterminer la valeur de la pulsation propre ω_0.

Q5. Déterminer la valeur de la phase à l'origine des temps φ.

Attention

La valeur de la phase à l'origine des temps φ ne se lit pas directement sur le graphe de $y(t)$.

I.7 Approche énergétique

I.7.a) Énergies mises en jeu

À connaître : Énergies mises en jeu

- L'**énergie cinétique** d'un point matériel M de masse m de vecteur vitesse $\vec{v}$ s'écrit :

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}m\left\|\vec{v}\right\|^2$$

- L'**énergie potentielle de pesanteur** d'un point matériel de masse m, repéré par son altitude z :

$$\mathscr{E}_{\text{pp}} = \pm mgz + K$$

avec « + » si (Oz) est ascendant ; « − » si (Oz) est descendant ; K une constante

- L'**énergie potentielle élastique** d'un point matériel accrochée à un ressort est :

$$\mathscr{E}_{\text{p, él}} = \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2 + K'$$

avec K' une constante.
Plus la longueur ℓ du ressort est différente de la longueur à vide ℓ_0, plus l'énergie emmagasinée par le système est importante.

■ On appelle **énergie mécanique**, notée $\mathscr{E}_m$, la somme de ses énergies cinétique $\mathscr{E}_c$ et potentielles $\mathscr{E}_p$:

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p$$

Toutes les énergies s'expriment en joule (J), avec $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

I.7.b) Conservation de l'énergie mécanique

Capacité exigible : **Réaliser un bilan énergétique.**

Exercice à maîtriser n°6 – Aspect énergétique de l'oscillateur harmonique mécanique

Considérons notre système étudié depuis le début : un oscillateur mécanique horizontal, avec l'origine de l'axe (Ox) au niveau du point d'attache du ressort.
On étudie l'expression générale de la position au cours du temps $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{\text{éq}}$, avec $x_{\text{éq}} = \ell_0$.

Q1. Exprimer l'énergie potentielle élastique $\mathscr{E}_{\text{p, él}}$ en fonction de X_m, ω_0, φ, k, t.

Q2. Exprimer l'énergie cinétique en fonction de X_m, ω_0, φ, m, t ; puis en fonction de X_m, ω_0, φ, k, t.

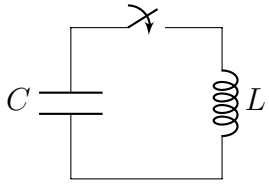
Q3. Exprimer l'énergie mécanique en fonction de k et X_m, puis en fonction de m, ω_0 et X_m. Commenter

Q4. Tracer l'allure de l'évolution temporelle des trois énergies avec les conditions initiales : $x(0) = x_{\text{éq}} + a$ et $v(0) = 0\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

II Un autre oscillateur harmonique : le circuit LC

II.1 Circuit étudié

On étudie le circuit ci-contre constitué d'un condensateur de capacité C et d'une bobine idéale d'inductance L.
Le condensateur a été préalablement chargé sous une tension E.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le condensateur à la bobine en série.



II.2 Équation différentielle

Méthode : Comment établir l'équation différentielle d'un circuit électrique ?

On souhaite établir l'équation différentielle vérifiée par une grandeur électrique s (u_c, i, q, ...) :

1. Représenter le circuit électrique étudié, pour $t > 0$, en nommant et fléchant SUR le circuit toutes les tensions et intensités.
2. Lister les grandeurs électriques variables (tension, intensité) inconnues (qui sont représentées sur le circuit précédent).
   Le nombre de grandeurs électriques inconnues donne le nombre d'équations indépendantes à écrire.
3. Écrire toutes les relations indépendantes possibles :
   — lois des mailles indépendantes (attention aux redondances) ;
   — lois des nœuds (attention aux redondances) ;
   — relations entre intensité et tension pour tous les dipôles.
4. Combiner ces relations entre elles pour ne conserver que la grandeur qui nous intéresse.
5. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 s = b$$

   et identifier l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction des composants du circuit.

Exercice à maîtriser n°7 – Établir l'équation différentielle du circuit LC série

Q1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.

Q2. La mettre sous la forme canonique et identifier la pulsation propre de l'oscillateur électrique.

II.3 Conditions initiales

Méthode : Comment déterminer les CI dans un circuit du 2e ordre ?

On a obtenu une équation différentielle du 2e ordre vérifiée par s (tension, intensité, charge, ... ça dépend !), pour la résoudre, il faut déterminer les deux conditions initiales $s(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$:

1. Déterminer les valeurs des intensités et tensions AVANT la fermeture de l'interrupteur.
2. Utiliser la continuité de la tension aux bornes du condensateur (ou de la charge du condensateur) et de l'intensité du courant à travers une bobine, pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS (à $t = 0^+$) la fermeture de l'interrupteur.
3. Les autres grandeurs électriques à $t = 0^+$ se déterminent en appliquant les relations intensité/tension à $t = 0^+$ et les lois des mailles et des nœuds à $t = 0^+$. En déduire les valeurs de $s(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

Exercice à maîtriser n°8 – Conditions initiales

Déterminer les valeurs de u_c, i et $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ à l'instant $t = 0^+$ (juste après la fermeture de l'interrupteur).

II.4 Résolution complète

On s'appuiera sur la méthode du § I.5 page 6.

Exercice à maîtriser n°9 – Résolution de l'équation différentielle du circuit LC

Q1. Résoudre l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u_c = 0$ en utilisant les conditions initiales déterminées précédemment.

Q2. Représenter l'allure de u_c en fonction du temps, puis de i.

II.5 Aspect énergétique

Exercice à maîtriser n°10 – Bilan de puissance du circuit LC

Q1. Effectuer un bilan de puissance du circuit LC. L'écrire sous la forme $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = 0$, où on exprimera $\mathscr{E}$: à quoi correspond cette grandeur ? Interpréter.

Q2. Représenter l'allure des énergies stockées par le condensateur et la bobine au cours du temps.

III Analogie

	Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique LC série
	position $x(t)$	Charge du condensateur $q(t)$
	vitesse $v_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	Intensité du courant $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$
Équation différentielle	$m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = kx_{\text{éq}}$	$L\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{q}{C} = 0$
	Constante de raideur du ressort k	Capacité du condensateur $\dfrac{1}{C}$
	Masse m	Inductance L
Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
Énergies	$\mathscr{E}_p = \dfrac{1}{2}kx^2$	$\mathscr{E}_{\text{stockée dans C}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$
	$\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}mv_x^2$	$\mathscr{E}_{\text{stockée dans L}} = \dfrac{1}{2}Li^2$

.

LES AUTEURS

JEAN-MICHEL COURTY ET ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique
à Sorbonne Université, à Paris

POURQUOI LA GRANDE BLEUE EST… BLEUE

L'eau d'une bouteille est transparente, mais celle de la mer, ou d'une piscine, est bleue. Pour quelle raison? Parce que l'eau absorbe préférentiellement la lumière rouge à cause des vibrations de ses molécules.

Le problème, et la beauté, de la mer, c'est qu'elle est bleue, car l'eau absorbe préférentiellement dans le rouge. Pour prendre des photos, on doit corriger ce phénomène avec un flash (de la lumière blanche) afin de redonner leurs couleurs aux poissons et aux coraux.

Seul sur le sable, le regard posé sur l'eau, vous rêvez… et vous vous interrogez. Pourquoi l'eau de votre bouteille est-elle transparente alors que la mer qui s'étend devant vous est bleue? Et pour quelle raison un plongeur s'enfonçant dans les profondeurs est-il peu à peu entouré d'un bleu de plus en plus dense, puis de ténèbres? Pour répondre, on fait souvent l'analogie avec le bleu du ciel ou on invoque la présence de minéraux ou de microorganismes. Ce n'est pas faux, mais loin d'être suffisant. L'explication est ailleurs, au cœur des vibrations des molécules d'eau.

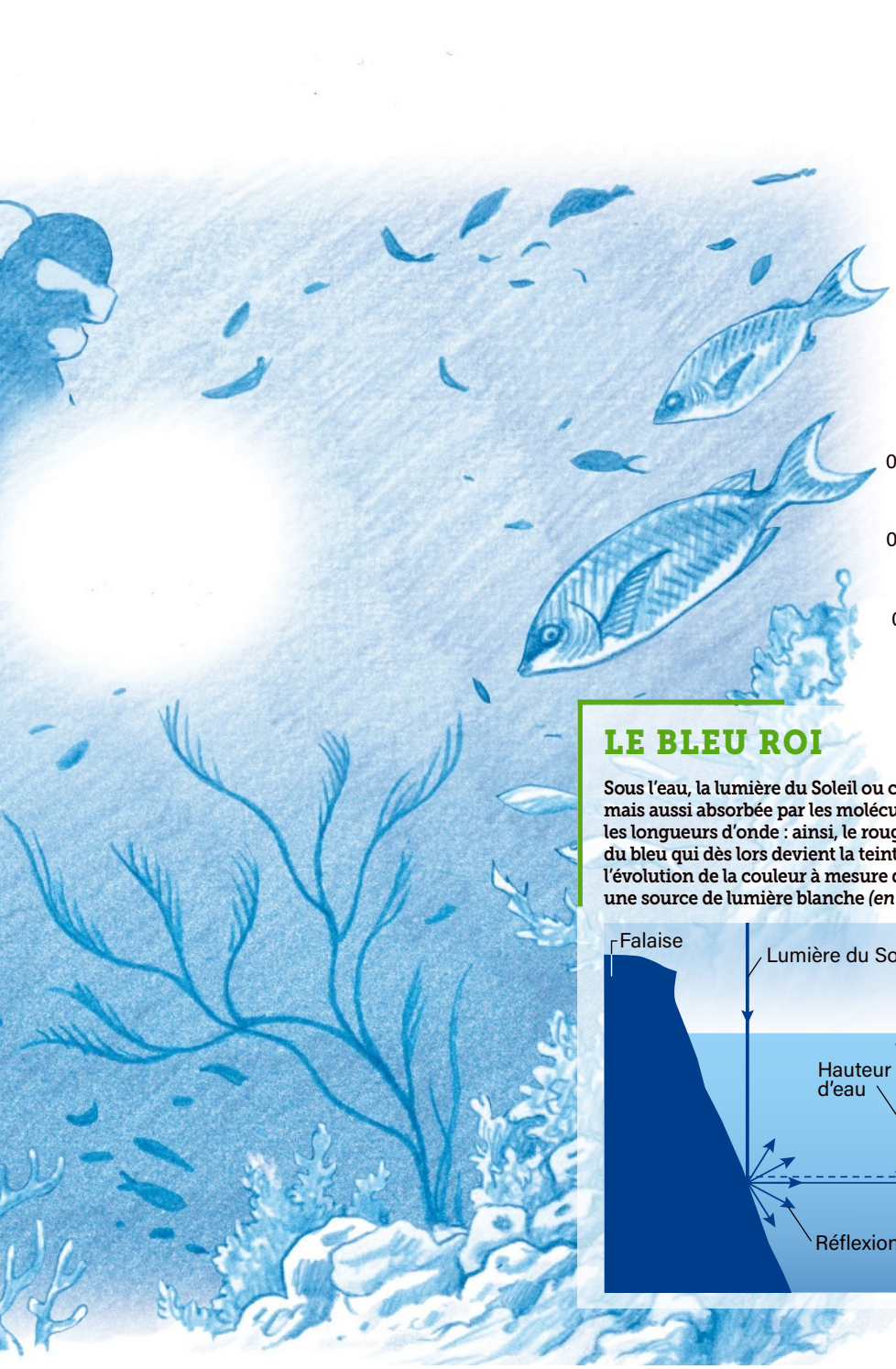
Si le ciel est bleu, c'est que dans l'air, chaque molécule diffuse une infime partie de la lumière du Soleil qu'elle reçoit dans d'autres directions. Cependant, ce phénomène est d'autant plus important que la longueur d'onde (la couleur) est courte: le bleu est ainsi plus diffusé que le rouge et domine. Ce processus a aussi lieu dans l'eau. Or celle-ci contient par mètre cube environ 1300 fois plus de molécules que l'air: on s'attendrait donc à une diffusion plus de 1000 fois plus importante en amplitude.

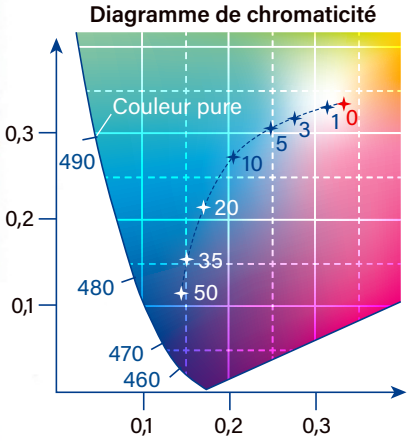
IL Y A LE CIEL, LE SOLEIL ET LA MER…

C'est compter sans le fait que la lumière diffusée par chacune des molécules interfère avec celle qui l'est par ses voisines. La diffusion est considérablement réduite sur les côtés lorsque de nombreuses molécules sont présentes dans un volume dont la taille est de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière, ce qui est le cas dans l'eau. L'important dans cette histoire n'est pas alors le nombre de molécules présentes dans ce petit volume, mais les fluctuations de ce nombre. Or celles-ci sont bien moins importantes dans un liquide que dans un gaz. En fin de compte, la diffusion contribue certes à la couleur bleue de l'eau, mais elle n'en est pas le facteur principal.

Pour mieux comprendre, plongeons avec masque et palmes dans une eau cristalline le long d'une falaise rocheuse. Près de la surface et de la paroi, disons à moins de 1 mètre, nous profitons pleinement des couleurs des poissons, des coraux et la roche a la même couleur sous l'eau qu'au-dessus. Mais quand nous nous éloignons, plongeons plus profondément ou regardons tout simplement la paroi

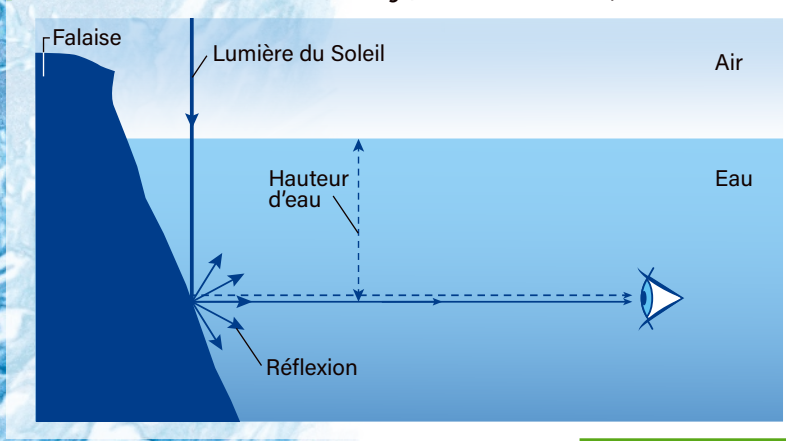
© Illustrations de Bruno Vacaro





LE BLEU ROI

Sous l'eau, la lumière du Soleil ou celle réfléchie par une falaise, est diffusée, mais aussi absorbée par les molécules d'eau. Ce phénomène varie selon les longueurs d'onde : ainsi, le rouge est rapidement absorbé, à l'inverse du bleu qui dès lors devient la teinte dominante. La figure ci-dessus montre l'évolution de la couleur à mesure que la distance parcourue sous l'eau entre une source de lumière blanche *(en rouge)* et l'observateur croît, de 1 à 50 mètres.



rocheuse plus loin, la lumière se fait moins vive, les couleurs s'estompent et bleuissent. Comment l'interpréter ?

Avant d'atteindre notre œil, la lumière a depuis la surface traversé une certaine épaisseur d'eau et a été renvoyée par l'objet observé (*voir la figure ci-dessus, à droite*). S'il s'agissait d'un miroir, qui ne modifie en rien la lumière qu'il réfléchit, nous constaterions que seule l'eau est responsable du changement d'intensité et de teinte.

Dans les faits, l'eau absorbe la lumière : dans le jaune par exemple, l'intensité lumineuse est divisée par 2 pour un parcours de 7 mètres dans de l'eau pure. Sachant que la diminution suit une loi exponentielle avec la distance traversée, cette intensité baissera de seulement 0,7 % après un parcours de 7 centimètres, et d'un facteur 1 000 pour un parcours de 70 mètres. On comprend pourquoi l'eau de nos bouteilles d'eau minérale apparaît transparente : les distances en jeu sont insuffisantes pour une absorption décelable. Cela signifie que sous l'eau des objets vus de près ont la même apparence qu'à l'air libre. *A contrario*, plonger à des profondeurs au-delà de quelques mètres nécessite souvent de se munir d'une source de lumière pour prendre des photos (*voir la figure en haut à droite*) ou tout simplement voir son environnement quand on s'enfonce dans les abysses.

Le bleuissement observé résulte de l'absorption différente selon la longueur d'onde de la lumière, ce phénomène augmentant à mesure que l'on passe du bleu au rouge. Ainsi, l'intensité d'un faisceau de lumière bleue (450 nanomètres, ou nm) est réduite d'un facteur 2 après 70 mètres alors que 70 cm suffisent pour la lumière rouge (720 nm). De la sorte, de la lumière blanche qui se propage dans de l'eau pure voit disparaître en premier sa composante rouge, puis la jaune… et se teinte progressivement en cyan, puis en bleu (*voir la figure ci-dessus*). On observe ce phénomène en regardant sous l'eau dans une piscine… à condition que ses

Les auteurs ont notamment publié : En avant la physique !, une sélection de leurs chroniques (Belin, 2017).

parois soient blanches. Ce bleu dans lequel on a l'impression de baigner, c'est bien la couleur naturelle de l'eau !

Revenons à la diffusion évoquée plus haut. Elle a pour origine le mouvement des électrons des molécules et vaut pour toutes les longueurs d'onde, à l'inverse de l'absorption qui est un phénomène résonant : elle n'a lieu que si l'énergie des grains de lumière, les photons, coïncide avec l'écart entre deux niveaux d'énergie de la molécule. En d'autres termes, seules quelques longueurs d'onde bien précises sont absorbées. Avec des colorants par exemple, l'absorption de lumière visible correspond à des transitions entre des niveaux d'énergies électroniques de la molécule. Il en va autrement pour l'eau, dont les transitions électroniques à partir du niveau fondamental correspondent à de la lumière ultraviolette. En s'en tenant à ce seul effet, l'eau n'absorberait que les ultraviolets, et resterait transparente pour des yeux humains.

QUAND L'EAU VIBRE

C'est qu'interviennent en plus ici des niveaux énergétiques particuliers associés aux vibrations mécaniques de la molécule. Dans la quasi-totalité des molécules, les mouvements de vibration sont relativement lents et ne jouent pas de rôle dans l'absorption de la lumière visible. En revanche, dans l'eau, deux phénomènes se conjuguent pour créer des fréquences de vibration significativement supérieures à celles des autres molécules. L'« avidité » de l'atome d'oxygène pour les électrons et la facilité avec laquelle les atomes d'hydrogène lui en cèdent se traduisent par des liaisons robustes et donc un « ressort équivalent » très rigide. Cette caractéristique, associée à la très faible masse de l'atome d'hydrogène, entraîne des fréquences de vibrations élevées, de même qu'un système masse-ressort vibre d'autant plus que le rapport entre la raideur et la masse est grand.

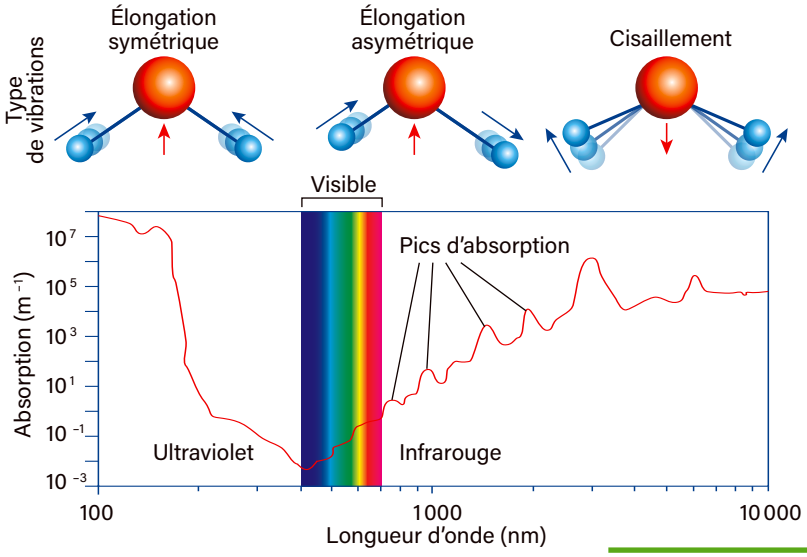
Dans le cas de l'eau, les divers modes de vibration (*voir la figure ci-dessus*) ont chacun un spectre en énergie avec des niveaux équidistants dont l'écart (et donc l'énergie des photons possiblement absorbés) correspond à de l'infrarouge moyen (vers 2 700 nm pour les modes de vibration de type élongation, 6 300 nm pour le cisaillement). Cela reste bien loin du visible, cantonné entre 400 et 700 nm !

Cependant, des photons peuvent être absorbés pour faire sauter la molécule d'eau vers un état vibrationnel plusieurs fois excité. Par exemple, si on part de l'état fondamental pour atteindre le quatrième état excité d'élongation, l'énergie nécessaire entre les niveaux d'excitation devient 4 fois supérieure et la longueur d'onde 4 fois plus petite, c'est-à-dire 675 nm… en plein dans le rouge.

Un lecteur physicien, et retors, rétorquera qu'au cinquième état excité, la longueur d'onde n'est plus que de 540 nm c'est-à-dire du vert ! C'est exact, mais plus le mode excité est élevé, plus la probabilité d'absorption d'un photon diminue. Aussi, dans le visible, les pics vibrationnels d'absorption pour l'eau les plus significatifs sont bien uniquement dans le rouge. Pour être quantitatif, il faut tenir compte de l'environnement de la molécule en phase liquide et notamment des liaisons hydrogènes avec ses voisines : l'absorption préférentielle dans le rouge de l'eau pure et liquide apparaît alors comme le bord d'une bande d'absorption autour de 760 nm. En fin de compte, l'eau est la seule molécule dont la couleur, difficile à appréhender, est reliée à ses vibrations. Vos questionnements sur la plage ont trouvé une réponse, et avec l'été qui s'achève, vous partirez à 100 000 lieues avec tellement de souvenirs… ■

GOOD VIBRATIONS

La molécule d'eau vibre selon différents modes, par exemple les deux d'élongation *(ci-dessous, à gauche)* et celui de cisaillement *(à droite)*. À ces vibrations mécaniques de la molécule sont associés des niveaux énergétiques particuliers qui peuvent être excités par l'absorption de photons : cela se traduit par des familles de pics d'absorption avec un fondamental dans l'infrarouge vers 2 700 nm pour les modes d'élongation et 6 300 nm pour le mode de cisaillement. Tous les niveaux vibrationnels peuvent être excités par l'absorption d'un seul photon, mais cette excitation est d'autant moins probable que le niveau est élevé : il en résulte une succession de pics d'absorption de moins en moins marqués de l'infrarouge moyen jusqu'au domaine du visible (en 400 et 700 nm). Finalement, le rouge est préférentiellement absorbé, laissant le bleu dominer et donner sa couleur à l'eau.



BIBLIOGRAPHIE

M. Vollmer et A. Mustard, **Blue : the color of (pure) water,** *Phys. Educ.*, 2019.

C. Braun et S. Smirnov, **Why the water is blue,** *J. of Chem. Educ.*, 1993.