Thème I. Ondes et signaux (Oscillateurs)

# TD n°5 Oscillateurs mécaniques et électriques libres harmoniques

**Méthode : Comment travailler des exercices ?**

**Avant la séance de TD :**

- ★ Sur une feuille de brouillon, avec un crayon à la main et le chapitre ouvert sous les yeux.
- ★ Essayer des « trucs » même si cela n'aboutit pas.
- ★ Faire des schémas complets et suffisamment grands.
- ★ Ne rien écrire sur l'énoncé de TD afin de pouvoir refaire les exercices après la correction en classe.
- ★ Réfléchir environ 10 à 15 min sur chaque exercice demandé. Si vous bloquez complètement sur une question/un exercice, passez à la suite au bout de 10 min, et me poser des questions soit directement soit par mail nvalade.pcsi@gmail.com .

**Après la séance de TD :**

- ★ Refaire les exercices corrigés ensemble, sans regarder le corrigé dans un premier temps.
- ★ Une fois l'exercice terminé ou si vous êtes totalement bloqué, reprendre avec le corrigé.

| Capacités \ Exercice n° | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique. | | | | | | | | | |
| Résoudre l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique compte tenu des conditions initiales. | | | | | | | | | |
| Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. | | | | | | | | | |
| Réaliser un bilan énergétique. | | | | | | | | | |

## Parcours possibles

♪ Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2, n°3, n°4 (+ cahier d'entraînement : 2.5, 2.9, 4.18).

♪ ♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°3, n°4, n°5, n°6.

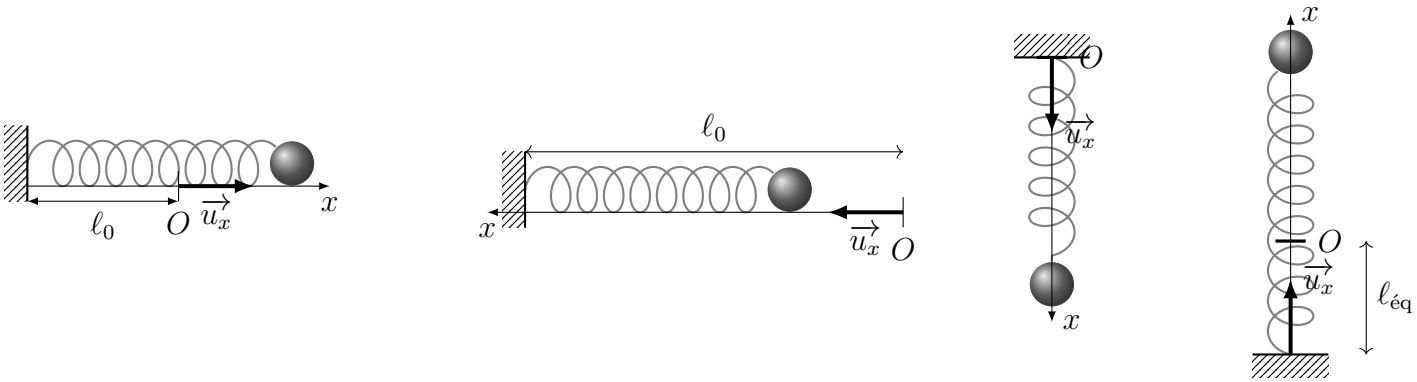
♪ ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : exercices n°5, n°6, n°7, n°8, n°9.

# I Exercices d'application directe du cours

## Exercice n°1 Forces de rappel élastique ♪

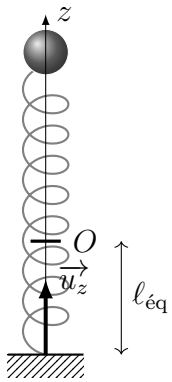
Pour chaque situation ci-dessous, exprimer la force de rappel élastique en fonction de $k$, $\ell_0$ (ou $\ell_{\text{éq}}$), $x$ et $\overrightarrow{u_x}$.

⚠ On sera très vigilant.e au sens de $\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$ par rapport à $\overrightarrow{u_x}$ et à la relation entre $\ell$ et $x$ (et si besoin d'autres constantes).




## Exercice n°2 Ressort vertical ♪

On considère le système ci-dessous, une masse $m$ est suspendue à un ressort vertical de constante de raideur $k$ et de longueur à vide $\ell_0$.
L'axe $(Oz)$ est choisi vertical ascendant et son origine est située à la position d'équilibre de la masse.




Q1. Établir l'expression de la longueur du ressort à l'équilibre $\ell_{éq}$ en fonction de $k$, $m$, $\ell_0$ et $g$. Comparer $\ell_{\text{éq}}$ et $\ell_0$.

Q2. Exprimer la force de rappel élastique en fonction de $k$, $z$, $\ell_{eq}$, $\ell_0$ et $\overrightarrow{u_z}$.

Q3. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $z$ et la mettre sous forme canonique* :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 z = 0$$

Exprimer la pulsation propre $\omega_0$.

Q4. Résoudre l'équation du mouvement avec les conditions initiales suivantes : $z(0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = -v_0 < 0$.

Q5. Représenter l'allure de $z(t)$.

Q6. Établir l'expression de l'énergie cinétique pour le jeu de conditions initiales précédent.

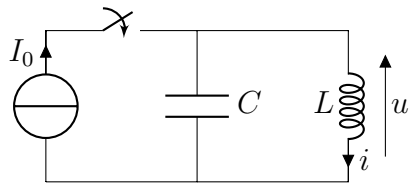
Q7. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur, l'énergie potentille élastique, puis l'énergie potentielle totale en fonction de $m$, $g$, $k$, $v_0$, $\omega_0$ et $t$.

Q8. Exprimer l'énergie mécanique en fonction de $v_0$, $m$, $g$ et $k$. Commenter.

∗. Non, non, il n'y a pas de second membre à cette équation différentielle : s'il vous n'avez pas 0 à droite, vous avez fait une erreur !

## Exercice n°3 Circuit LC parallèle ♪

On étudie le circuit ci-contre.
Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et aucun courant ne circule dans le circuit.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le générateur idéal de courant en parallèle avec le condensateur et la bobine.




Q1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i$.

Q2. Identifier la pulsation propre du circuit.

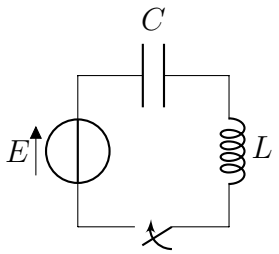
Q3. Justifier très proprement $i(0^+)$ et $u(0^+)$. Puis, par utilisation de la loi bobine, en déduire $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

Q4. Résoudre complètement l'équation différentielle compte tenu des conditions initiales†.

Q5. Représenter l'allure de $i$ en fonction du temps.

## Exercice n°4 Circuit LC ♪

On étudie le circuit ci-contre. Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le générateur idéal de fem $E$ constante au condensateur et à la bobine.




Q1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans le circuit.

Q2. Identifier la pulsation propre du circuit.

Q3. La résoudre compte tenu des conditions initiales.

Q4. En déduire l'expression de la tension aux bornes du condensateur.

Q5. Représenter les allures de $u_c(t)$ et $i(t)$.

# II Exercices d'approfondissement

## Exercice n°5 Se peser à bord de l'ISS ♪ ♪

Lors d'une mission spatiale, l'évolution de la masse d'un.e astronaute est une donnée cruciale pour suivre leur santé. Mais, dans la station spatiale internationale, les objets et les hommes évoluent en apesanteur. Aussi les dispositifs de mesure de masse habituellement utilisés sur Terre (balance à fléau, pèse personne...) sont inopérants dans cet environnement.
Pour cela, ils utilisent le SLAMMD (Space Linear Acceleration Mass Measurement Device sprint-diplacement), qui peut être modélisé par un ressort (de constante de raideur $k$) fixé sur une paroi sur lequel une chaise (de masse $m_0$) est attachée sur laquelle peut se placer l'astronaute (de masse $m$) pour osciller.

Capture d'écran issue de la vidéo de l'Agence Spatiale Canadienne https://www.youtube.com/watch?v=oU3pp_4n84U.

ⓘ : Visualiser la vidéo de présentation du fonctionnement.

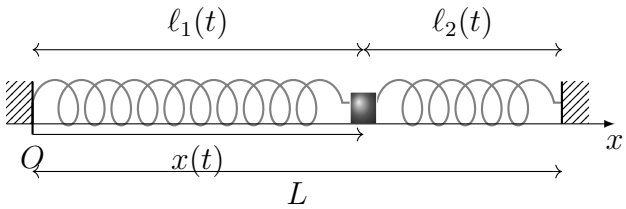
Q1. Établir l'équation différentielle du mouvement. Identifier la pulsation propre.

Q2. Sachant que la constante de raideur vaut $k = 606\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$, déterminer la masse $m_0$ puis la masse $m$ de l'astronaute en exploitant la vidéo‡.

†. Déterminer la solution de l'équation différentielle compte tenu des conditions initiales.
‡. Mesurer la période propre des oscillations sur la vidéo, avec puis sans l'astronaute.
Avec : 4 oscillations en 12 s ; Sans 8 oscillations en 4 s

## Exercice n°6 Deux ressorts ♪ ♪

Un point matériel $M$, de masse $m$, peut se déplacer sur une tige horizontale parallèle à l'axe $Ox$.
Il est relié à deux ressorts identiques de constante de raideur $k$ et de longueur à vide $\ell_0$.
La distance entre les deux points d'attache est $L = 2\ell_0$.




Q1. Exprimer, **en étant très vigilant.e aux longueurs et aux sens**, les deux forces de rappel élastique qui s'exercent sur $M(m)$. On commencera par les exprimer en fonction des longueurs instantanées $\ell_1(t)$ et $\ell_2(t)$ de chaque ressort, puis en fonction de $x(t)$ et $L$.

Q2. Déterminer la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ de la masse $M$.

Q3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x$ et la mettre sous la forme canonique $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$.
Identifier l'expression de la la pulsation propre $\omega_0$ de cet oscillateur. Vérifier l'expression de $x_{\text{éq}}$ avec l'expression déterminée à la question précédente.

Q4. La résoudre si la passe $M$ est lâchée sans vitesse initiale depuis $x(0) = \dfrac{L}{2} + x_0$.
Représenter les allures de $x(t)$ et de $\dot{x}(t)$.

Q5. Donner les expressions de l'énergie potentielle élastique des deux ressorts, de l'énergie cinétique du mobile, et de l'énergie mécanique totale $\mathscr{E}_m(t)$ en fonction de $k$, $x_0$, $v_0$, $\omega_0$, $L$, $\ell_0$, $t$.

## Exercice n°7 Oscillations dans un cristal ♪ ♪ ♪

Dans un cristal, un atome de masse $1,0 \times 10^{-26}$ kg effectue des oscillations harmoniques autour de sa position d'équilibre. La fréquence est égale à $f_0 = 1,0 \times 10^{12}$ Hz et l'amplitude à $X_m = 0,05$ nm. Déterminer :

Q1. La norme de la vitesse maximale.

Q2. Son énergie mécanique.

Q3. La norme de son accélération maximale

Q4. La constante de rappel du ressort modélisant les oscillations.

# III Résolution de problèmes

## Exercice n°8 Ressort inconnu ♪ ♪ ♪

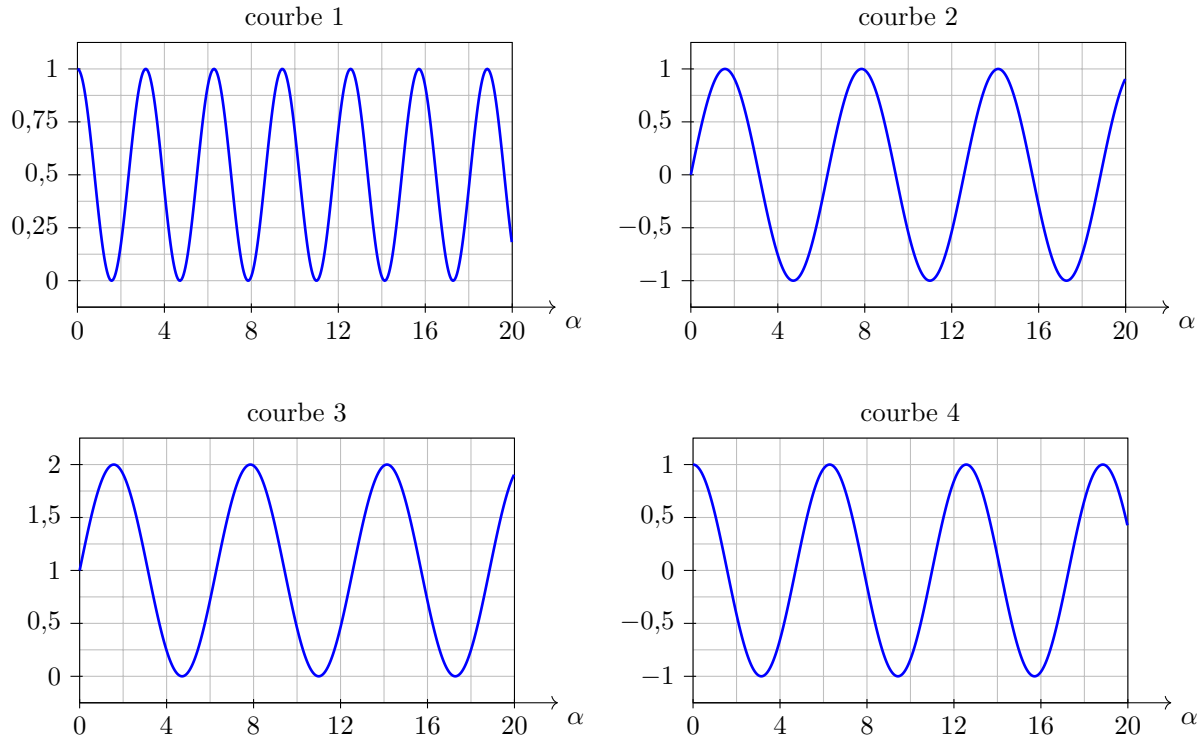
On considère un ressort dont les caractéristiques (constante de raideur $k$ et longueur à vide $\ell_0$) sont inconnues. On accroche une extrémité du ressort à un point fixe et on accroche une masse $m$, dont on ne connaît pas la valeur, à l'autre extrémité, le ressort s'allonge alors de 10 cm.
Prévoir la valeur de la période propre des oscillations libres de ce système.

## Exercice n°9 Nid de poule ♪ ♪ ♪

Une voiture ayant une masse de 1,30 tonne est assemblée de façon telle que son châssis s'appuie sur 4 ressorts de suspension. La constante de raideur de chaque ressort est $2,00 \times 10^4$ kg $\cdot$ s$^{-2}$.
Deux personnes assises dans la voiture ont une masse totale de 160 kg.
Déterminer la fréquence de vibration de la voiture après son passage sur un nid-de-poule.

# IV Extraits du cahier d'entraînement de physique-chimie

**Entraînement 2.5 — Représentations graphiques.**




Pour les quatre graphiques ci-dessus, $\alpha$ est exprimé en radians.

Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

a) $\sin(\alpha)$ .....

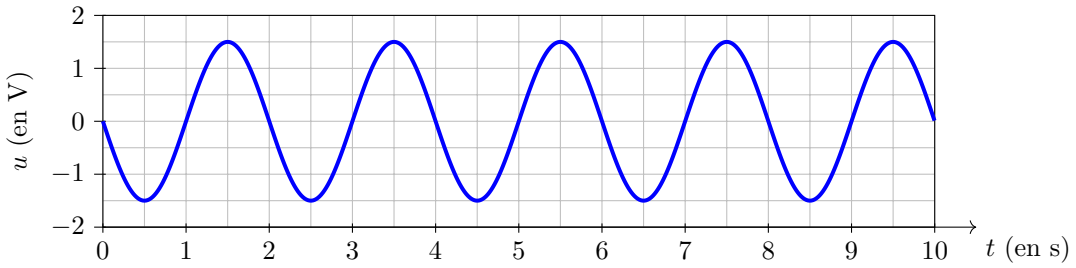
b) $\cos(\alpha)$ .....

c) $1 + \sin(\alpha)$ .....

d) $\cos^2(\alpha)$ .....

**Entraînement 2.7 — Paramètres d'un signal sinusoïdal.**

En travaux pratiques, vous faites l'acquisition d'une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ et obtenez l'oscillogramme ci-dessous.




Par lecture graphique ou par le calcul, déterminer :

a) l'amplitude $U_0$ .....

b) la phase à l'origine $\varphi$ .....

c) la période $T$ .....

d) la fréquence $f$ .....

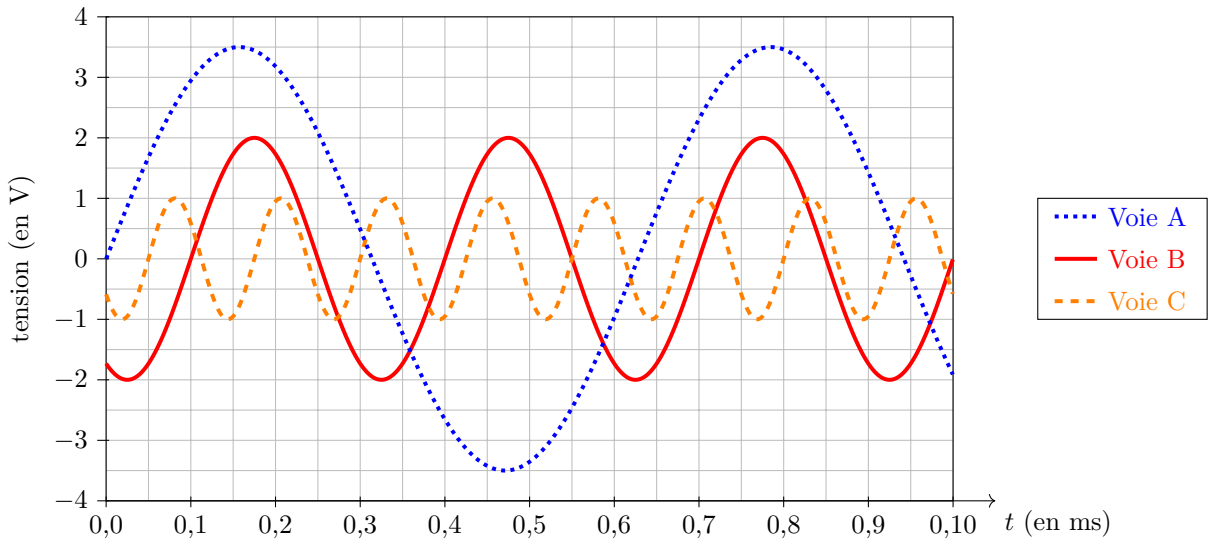
e) la pulsation $\omega$. .....

**Entraînement 2.9 — Qui est qui ?**

En travaux pratiques, vous faites l'acquisition de trois signaux périodiques : $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$.

Malheureusement, vous ne vous souvenez pas quelle voie d'acquisition vous avez utilisée pour chaque signal !

Vous savez que la tension $u_1(t)$ a pour période 300 µs, que la tension $u_2(t)$ a pour fréquence 8,0 kHz et que la tension $u_3(t)$ a pour pulsation $1 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

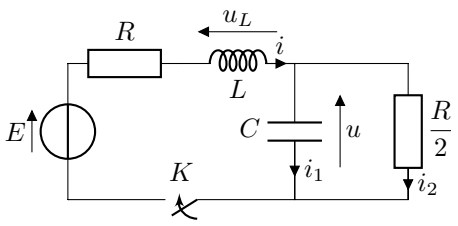



Attribuer chacun des graphes au signal qui lui correspond.

a) Voie A ..... ☐ b) Voie B ..... ☐ c) Voie C ..... ☐

**Entraînement 4.11 — Circuit à deux mailles.**

Le circuit suivant, constitué de deux mailles indépendantes, est alimenté par un générateur de tension de fém $E$ constante.




Pour ce circuit, on considère de plus que :

- l'interrupteur $K$ est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$ ;
- le condensateur est initialement déchargé.

Exprimer :

a) $u(0^+)$ ..... ☐

b) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$ ..... ☐

c) $i(+\infty)$ ..... ☐

d) $u(+\infty)$ ..... ☐

**Entraînement 4.18 — Équations type « oscillateur harmonique ».**

a) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,(u_C(t) - E) = 0$ avec $\begin{cases} u_C(0) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \end{cases}$.

b) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\, i(t) = 0$ avec $\begin{cases} i(0) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) = \dfrac{E}{L} \end{cases}$ .....