Thème I. Ondes et signaux (Optique géométrique)

TD n°2 Formation des images – *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Construire l'image d'un objet par un miroir plan.		✎							
Construire l'image d'un objet situé à distance finie ou infinie à l'aide de rayons lumineux, identifier sa nature réelle ou virtuelle.	✎			✎	✎	✎	✎		
Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement transversal de Descartes et de Newton.	✎		✎	✎			✎	✎	✎
Citer les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire et de la plage d'accommodation.				✎		✎	✎		
Modéliser, à l'aide de plusieurs lentilles, un dispositif optique d'utilisation courante.						✎	✎		✎

Parcours possibles

- ♪ Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°3, n°4, n°6 (Q1 à Q5).
- ♪ ♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°2, n°3, n°4, n°6.
- ♪ ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : exercices n°5, n°6, n°7.

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Configuration de Silbermann ♪

Une lentille convergente, de distance focale image f' supposée connue, donne d'un objet AB réel une image inversée de même taille.

R1. Que vaut le grandissement transverse ?

Solution: D'après la définition $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -1$

R2. Exprimer $\overline{FA}$ en fonction de f', puis $\overline{OA}$ en fonction de f'.

Solution: D'après la relation de conjugaison de Descartes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} &= \frac{1}{f'} \\
\text{or} \quad \gamma &= \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -1 \\
\overline{OA'} &= -\overline{OA} \\
-\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA}} &= \frac{1}{f'} \\
-\frac{2}{\overline{OA}} &= \frac{1}{f'} \\
\overline{OA} &= -2f' < 0
\end{aligned}$$

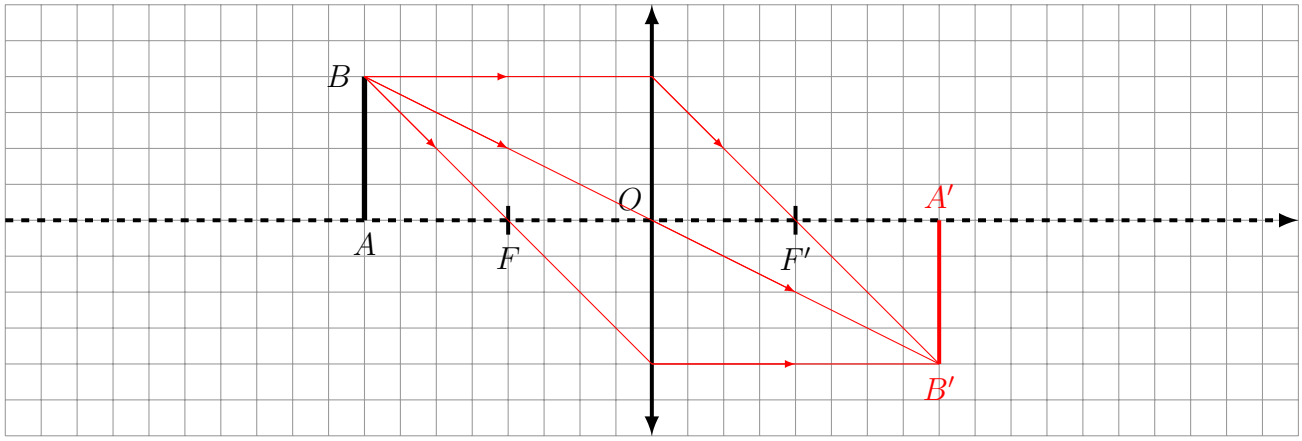
L'objet est réel.

R3. Exprimer $\overline{F'A'}$ en fonction de f', puis $\overline{OA'}$ en fonction de f'.

Solution: D'après le grandissement : $\boxed{\overline{OA'} = \gamma \overline{OA} = 2f'}$

R4. Effectuer le tracé des rayons dans cette configuration.

Solution:



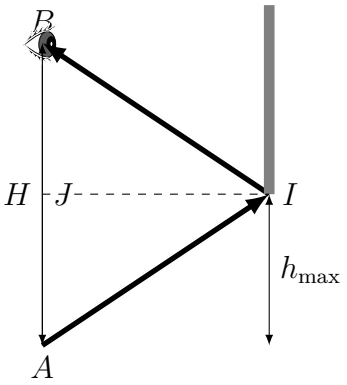
Exercice n°2 Enfant devant un miroir ♪ ♪

La petite Louise, 8 ans, est debout devant un miroir plan rectangulaire, fixé sur un mur vertical. Son œil est à 1,2 m du sol. La base du miroir est à une hauteur h au dessus du sol.
Déterminer la valeur maximale de h pour que l'enfant puisse s'admirer en entier.

Solution:

Pour que l'enfant puisse voir ses chaussures dans le miroir, il faut qu'au moins un rayon diffusé par ses chaussures se réfléchisse sur le miroir et atteigne ses yeux.
Si le miroir est trop haut, le rayon diffusé par la chaussure et atteignant le bas du miroir sera réfléchi trop haut et n'atteindra pas les yeux, et il en sera de même avec ceux réfléchis plus haut sur le miroir.
D'après la loi de Descartes de la réflexion, les angles $\widehat{JIB}$ et $\widehat{JIA}$ sont égaux.
Le triangle ABI est isocèle en I, donc $AJ = JB \Rightarrow H = 2h_{\max}$.

Le miroir doit se trouver au maximum à une hauteur $\boxed{h_{\max} = \dfrac{H}{2} = 50 \text{ cm}}$ du sol.



Exercice n°3 Radio-réveil ♪ ♪

Certains radios-réveils permettent d'afficher l'heure au plafond en plus de celle affichée sur l'écran. Le système, constitué d'une lentille mince convergente de distance focale $f' = 5,0$ cm, forme une image de 12,0 cm de hauteur à une distance de 1,70 m du radio-réveil (cette distance est mesurée à partir de la lentille de projection).
En utilisant les relations de Newton, exprimer la taille $\overline{AB}$ de l'objet dont l'image est projetée au plafond.
Faire l'application numérique.

Solution: $\overline{A'B'} = 12,0$ cm et $\overline{OA'} = 1,70$ m

La relation de grandissement de Newton permet de résoudre :

$$\begin{aligned}\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{F'A'}}{-f'} \\ \overline{AB} &= -\overline{A'B'} \times \frac{f'}{\overline{F'A'}} \\ \overline{AB} &= -\overline{A'B'} \times \frac{f'}{\overline{F'O} + \overline{OA'}} \\ \overline{AB} &= -\overline{A'B'} \times \frac{f'}{\overline{OA'} - f'}\end{aligned}$$

$$\boxed{AB = A'B' \times \left|\frac{f'}{\overline{OA'} - f'}\right|}$$

A.N. : AB=3, 6 mm

Exercice n°4 Loupe ♪

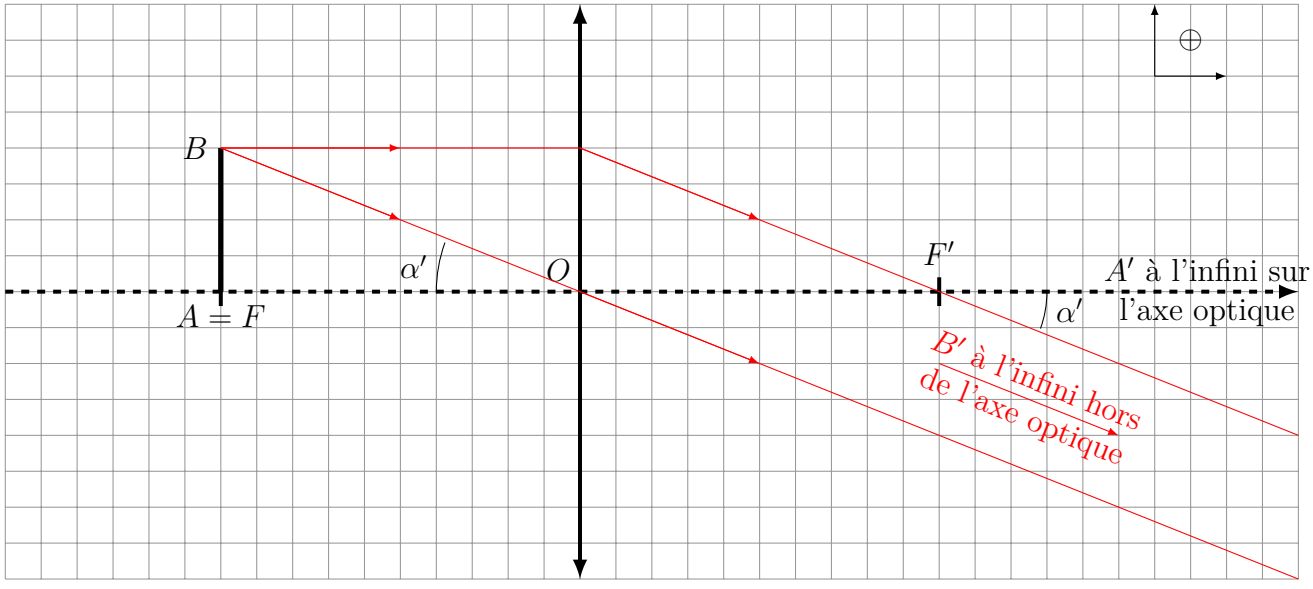
Une loupe est une lentille convergente de distance focale image f'. On l'utilise pour observer une image agrandie d'un objet à travers la lentille.

R1. De quelle nature (réelle/virtuelle) est l'image donnée par la loupe ?

Solution: L'image donnée par la loupe ne peut pas être projetée, elle est virtuelle.

R2. Pour observer l'image de l'objet sans fatigue, où doit-elle se former ? Où doit être placé l'objet par rapport à la lentille pour qu'il en soit ainsi ? Faire un schéma dans cette situation.

Solution: Pour observer l'image de l'objet sans fatigue, elle doit se former à l'infini. Pour cela l'objet doit se trouver dans le plan focal objet de la loupe.



On définit le grossissement commercial par $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$, où α est l'angle sous lequel est vu l'objet à l'œil nu (sans loupe) observé au punctum proximum ($d_m = 25$ cm), et α' l'angle sous lequel est vue l'image observée à travers la loupe.

R3. (a) Exprimer α' en fonction de f' et de $\overline{AB}$.

(b) Exprimer α en fonction de d_m et $\overline{AB}$ *(on s'aidera d'un schéma).*

(c) Exprimer le grossissement commercial de la loupe en fonction de f' et d_m.

Solution:
Dans OAB rectangle en A : $\tan(\alpha') = \dfrac{AB}{f'}$

Dans les conditions de Gauss, $\tan(\alpha') \approx \alpha'$, ainsi $\boxed{\alpha' \approx \dfrac{AB}{f'}}$

En l'observant à l'œil nu, au PP : $\tan(\alpha) = \dfrac{AB}{d_m}$, avec la même approximation.

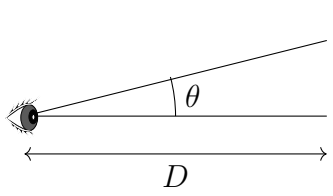
Ainsi $\boxed{G = \dfrac{d_m}{f'}}$

R4. Calculer la valeur du grossissement commercial d'une loupe de vergence $V = 10\ \delta$.

Solution: $\boxed{G = d_m V = 25.10^{-2} \times 10 = 2,5}$ ⚠attention aux unités !

R5. Quel est le pouvoir de résolution de l'œil dans de bonnes conditions d'éclairement ? Déterminer la taille du plus petit objet que peut distinguer un œil normal qui accommode au maximum.

Solution:



Le plus petit détail est discernable lorsque l'observation se fait au punctum proximum.
$\boxed{\ell_{\min} = d_m \alpha = 0,0075 \text{ cm} = 75\ \mu\text{m}}$

R6. Donner la taille du plus petit objet que peut distinguer un œil normal en utilisant la loupe sans accommoder. Conclure.

Solution: À travers la loupe, l'image est vue sous l'angle $\alpha' = G\alpha = G\dfrac{\ell}{d_m}$, qui doit être supérieur à $\varepsilon = 1'$

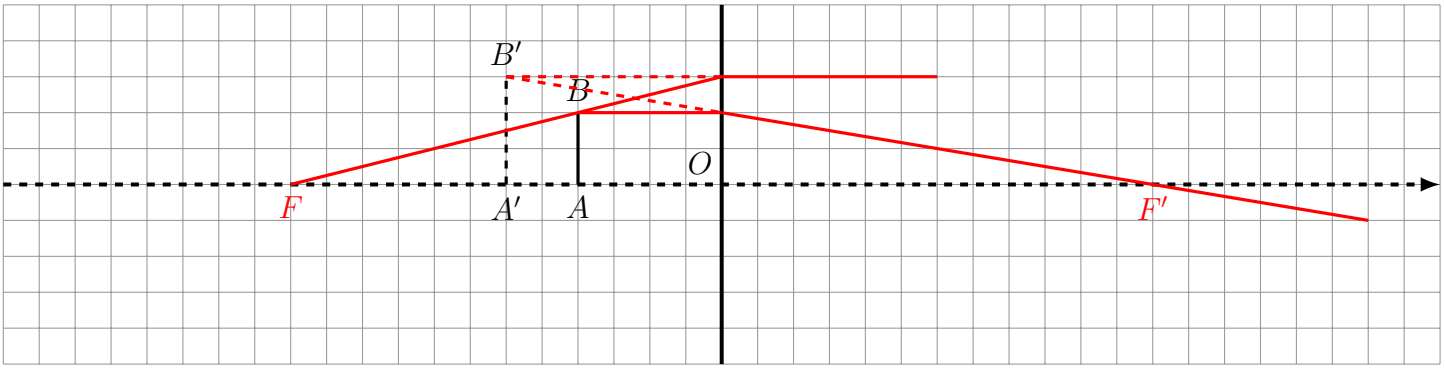
Ainsi $\boxed{\ell > \dfrac{d_m \varepsilon}{G} = 30\ \mu\text{m}}$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°5 Quelle est donc cette lentille ? ♪ ♪ ♪

On donne l'image $A'B'$ d'un objet AB. Déterminer la nature et la position des foyers des lentilles ci-dessous.

R1. .

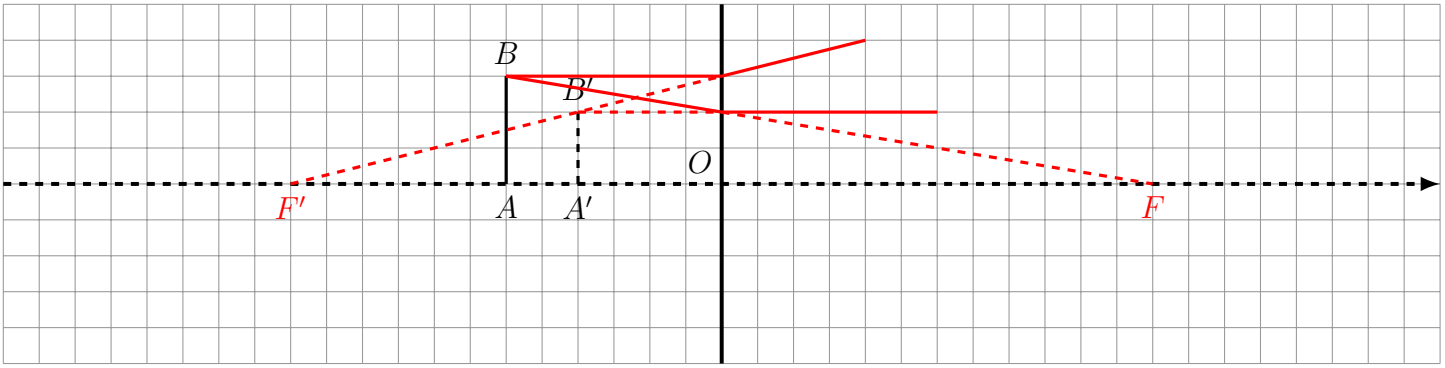


Solution: Méthode :

1. Tracer le rayon parallèle à l'axe optique passant par B, le rayon émergent est celui dont le prolongement passe par B'. Il croise l'axe optique en F'.
2. Tracer le rayon qui émerge parallèle à l'axe optique provenant de B', son rayon incident passe par B. Son intersection avec l'axe optique donne F.

Le foyer principal image F' est réel, le foyer principal objet F est réel, donc la lentille est convergente.

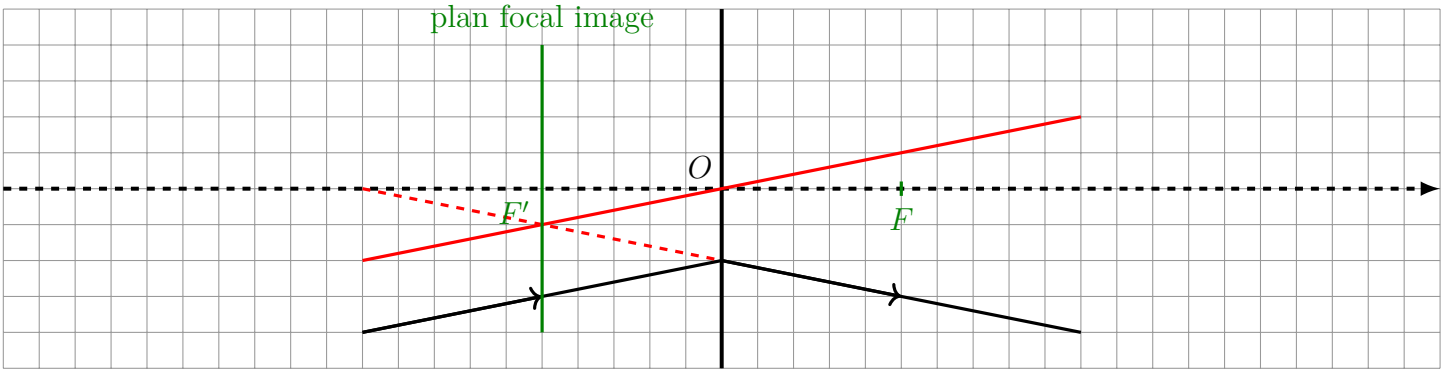
R2. .



Solution: En suivant la même méthode que précédemment, on déterminer que F et F' sont virtuels, donc la lentille est divergente.

On donne le tracé complet d'un rayon à travers la lentille. Déterminer la nature de la lentille et la position des foyers.

R3. .

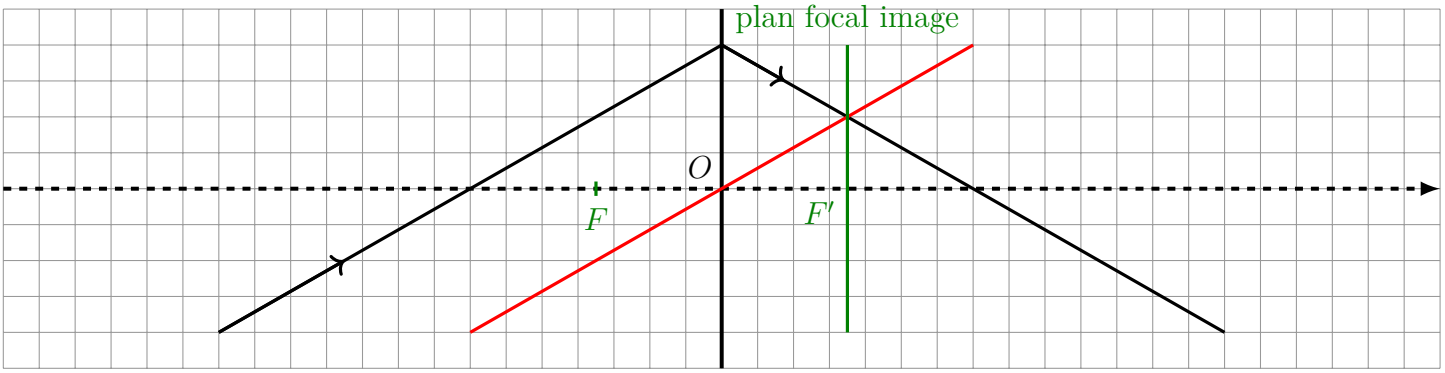


Solution:

1. Je trace le rayon incident parallèle au rayon incident et qui passe par O.
2. Je prolonge le rayon émergent avant la lentille.
3. Les deux rayons émergents se croisent dans le plan focal image de la lentille.
4. J'en déduis le plan focal image : il est situé avant la lentille.

C'est une lentille divergente.

R4. .



Solution:

1. Je trace le rayon incident parallèle au rayon incident et qui passe par O.
2. Les deux rayons émergents se croisent dans le plan focal image de la lentille.
3. J'en déduis le plan focal image : il est situé après la lentille.

C'est une lentille convergente.

Exercice n°6 Lunette de Galilée ♪♪

Mars est située à une distance variant entre 56 et 160 millions de kilomètres de la Terre. Son diamètre vaut 6800 km. On l'observe au travers d'une lunette de Galilée composée d'un objectif et d'un oculaire.

Ces deux systèmes optiques complexes peuvent être modélisés par deux lentilles minces la première (l'objectif) de focale 1,0 m et la seconde (l'oculaire) de focale $-2,5$ cm.

R1. Où se forme l'image intermédiaire de Mars par l'objectif ?

Solution: L'image intermédiaire de Mars par l'objectif se forme dans le plan focal image de l'objectif.

R2. Où doit se former l'image finale pour pouvoir être observée sans fatigue ? Pour cela, où doit alors se trouver l'image intermédiaire de Mars par l'objectif qui joue le rôle d'objet pour l'oculaire ?

Solution: L'image finale doit se former à l'infini pour être observée sans fatigue. Pour cela, l'image intermédiaire doit se former dans le plan focal objet de l'oculaire.

R3. En déduire avec quel point le foyer principal objet F_{oc} de l'oculaire doit coïncider. On réalise dans ce cas là ce qu'on appelle un **système afocal**.

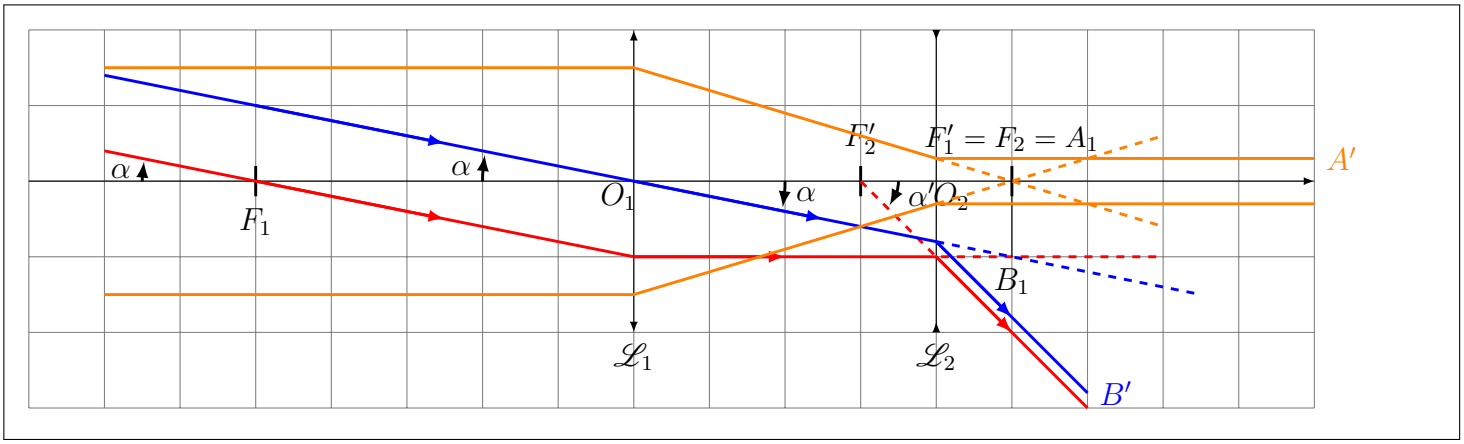
Faire un schéma en positionnant les lentilles convenablement (on fera attention au fait que l'oculaire est une lentille divergente !). On ne cherchera pas à faire le schéma à l'échelle.

Solution: Ainsi l'image intermédiaire se forme dans le plan focal image de $\mathscr{L}_1$ et doit se situer dans le plan focal objet de $\mathscr{L}_2$, donc le plan focal image de $\mathscr{L}_1$ doit être confondu avec la plan focal objet de $\mathscr{L}_2$.

Mars est assimilé à un objet AB situé à l'infini, où A est sur l'axe optique.

R4. Faire le tracer de deux rayons lumineux issus de B à travers la lunette : commencer par celui passant par F_1, puis un autre au choix. L'image finale apparaît-elle dans le même sens que l'objet pour l'observateur ?

Solution:



On appelle grossissement de la lunette le rapport $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ où α' est le diamètre apparent sous lequel est vue Mars à travers la lunette.

R5. (a) Indiquer α et α' sur le tracé précédent.

(b) Exprimer α et α' en fonction de la taille de l'image intermédiaire et des distances focales de l'objectif f'_{obj} et de l'oculaire f'_{oc}.

(c) Établir l'expression du grossissement en fonction des distances focales de l'objectif f'_{obj} et de l'oculaire f'_{oc}.

(d) Le calculer numériquement.

Solution:

Dans le triangle $O_2A_1A_2$ rectangle en F_2 : $\tan(\alpha') = \dfrac{\overline{A_1A_2}}{-f'_2} < 0$ $(f'_2 < 0)$

Dans le triangle $O_1A'_1A'_1$ rectangle en F'_1 : $\tan(\alpha) = \dfrac{\overline{A_1A_2}}{f'_1} < 0$

Dans les conditions de Gauss, les rayons sont peu inclinés par rapport à l'axe optique, donc $\theta \ll 1$ rad et $\alpha' \ll 1$ rad, ainsi $\tan(\alpha) \approx \alpha$ et de même pour α'.

Ainsi $\alpha \approx -\dfrac{\overline{A_1A_2}}{f'_2}$ et $\alpha' \approx \dfrac{\overline{A_1A_2}}{f'_1}$

Le grossissement s'exprime alors selon $\boxed{G = -\dfrac{f'_2}{f'_1} = 40 > 0}$

R6. On appelle diamètre apparent l'angle sous lequel est vu un objet. Calculer le diamètre apparent α de la planète Mars lorsqu'elle est observée sans lunette, lorsqu'elle est au plus proche de la Terre.
Est-il possible de voir à l'œil nu la surface de Mars ?

Solution: Au plus près de la Terre, on voit Mars à l'œil nu sous l'angle α, tel que $\tan(\alpha) = \dfrac{D_M}{D_{TM}}$. Or $\alpha \ll 1$ rad, donc $\tan\alpha \approx \alpha$.

Ainsi $\boxed{\alpha \approx \dfrac{D_M}{D_{TM}} = 1,21.10^{-4} \text{ rad}}$ ce qui est inférieur à la limite de résolution angulaire : la surface de Mars n'est pas visible à l'œil nu.

R7. Sous quel angle Mars est-elle perçue à travers la lunette lorsqu'elle est au plus proche ? Est-il cette fois-ci possible de distinguer sa surface ?

Solution: L'angle sous lequel est vu Mars est $\boxed{\alpha' = G \times \alpha = 4,84.10^{-3} \text{ rad}}$ ce qui est distingable.

Exercice n°7 Microscope ♪ ♪ ♪

Un microscope optique est modélisé par deux lentilles minces convergentes : l'objectif, placé du coté de l'objet,et l'oculaire, placé du côté de l'observateur. Il est réglé pour donner une image à l'infini d'un objet réel AB, perpendiculaire à l'axe optique, A étant placé sur l'axe, légèrement avant du foyer objet de l'objectif. L'image finale est observée par un œil emmétrope placé au voisinage du foyer image de l'oculaire. On modélise l'objectif par une lentille $\mathscr{L}_1$ convergente de distance focale image f_1' et l'oculaire par une lentille $\mathscr{L}_2$ convergente de distance focale image f_2'. La notice constructeur précise également l'intervalle optique $\Delta = \overline{F_1'F_2} = 16$ cm.

R1. Comment placer le foyer principal objet de $\mathscr{L}_2$ pour que l'image finale se forme à l'infini ?

Faire un schéma du dispositif. Placer un objet AB en tenant compte du principe de fonctionnement d'un microscope puis tracer la marche de 3 rayons issus de B en faisant bien apparaitre l'image intermédiaire $\overline{A_1B_1}$.

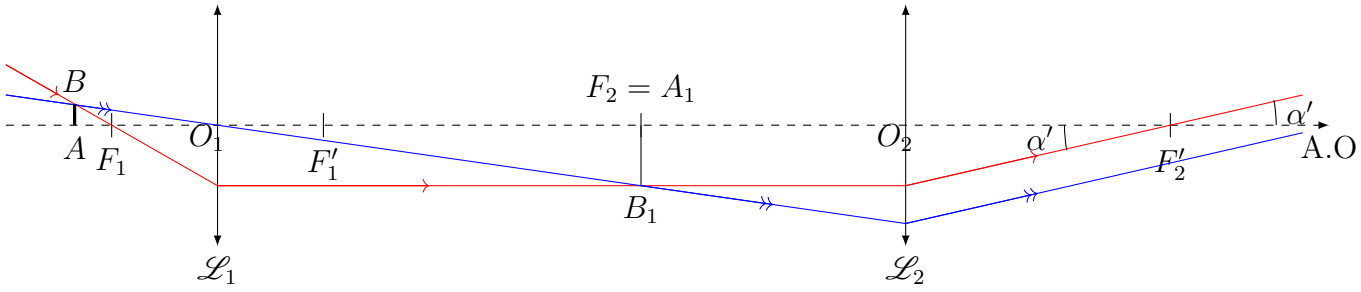
Solution:

L'image finale doit se former à l'infini pour pouvoir être observée sans fatigue. Ainsi, l'image intermédiaire A_1B_1 de l'objet AB par la lentille $\mathscr{L}_1$ doit se former dans le plan focal objet de la lentille de l'oculaire $\mathscr{L}_2$.

REMARQUES

Tracés à travers un microscope

- Deux possibilités pour réaliser le tracer :
  - placer l'objet juste avant le foyer principal objet de $\mathscr{L}_1$, tracer son image par $\mathscr{L}_1$, puis positionner la lentille $\mathscr{L}_2$ pour que son foyer principal objet F_2 soit au niveau de l'image de l'objet par $\mathscr{L}_1$.
  - ou placer les deux lentilles, partir de l'image finale à l'infini et remonter au tracé de l'objet.
- **Toujours commencer par tracer le rayon parallèle à l'axe optique entre les deux lentilles, il peut être entièrement tracé dès le début.**



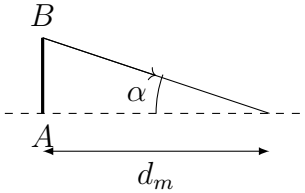
On s'intéresse tout d'abord à l'oculaire seul. L'indication ×10 portée sur l'oculaire est le grossissement commercial $G_0 = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ où α est l'angle sous lequel on verrait l'objet intermédiaire transverse $\overline{A_1B_1}$ à l'œil nu lorsqu'il est situé à la distance minimale de vision distincte $d_m = 20$ cm et α' est l'angle sous lequel on voit l'image à l'infini de A_1B_1 lorsqu'il est placé dans le plan focal objet de l'oculaire seul.

R2. Déterminer la distance focale f_2' de l'oculaire.

Solution:

Lorsque l'objet est vu à l'œil nu :

Un schéma est absolument nécessaire pour établir la relation entre α, AB et d_m ! mais *O_1 n'intervient nullement ici.*



$$\tan(\alpha) = \frac{A_1B_1}{d_m}$$

Or $A_1B_1 \ll d_m$ (cf ODG des objets observés au microscope), donc $\alpha \ll 1$ rad, ainsi $\tan(\alpha) \approx \alpha$

Ainsi $\boxed{\alpha \approx \dfrac{A_1B_1}{d_m}}$

L'angle α' est l'angle sous lequel est vue l'image à travers le microscope :
$\tan(\alpha') = \dfrac{A_1B_1}{f_2'}$
Or $\alpha' \ll 1$ rad, $\alpha' \approx \dfrac{A_1B_1}{f_2'}$
Ainsi $\boxed{G_0 = \dfrac{d_m}{f_2'}}$
Ainsi $\boxed{f_2' = \dfrac{d_m}{G_0}}$
A.N. $\underline{f_2' = 2,0 \text{ cm}}$

On s'intéresse maintenant à l'objectif seul, modélisé par une lentille $\mathscr{L}_1$ de distance focale image f_1'. La valeur absolue du grandissement $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$ de l'objet AB par l'objectif est indiquée à $\times 40$.

R3. Déterminer la distance focale f_1' de l'objectif.

Solution:
D'après la relation de grandissement avec origine aux foyers $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{F_1'F_2}}{-f_1'}$, soit $\boxed{f_1' = -\dfrac{\overline{F_1'F_2}}{\gamma_1} = -\dfrac{\Delta}{\gamma_1}}$
A.N. avec $\gamma_1 = -40 < 0$ (l'image A_1B_1 est inversée par rapport à l'objet AB), $\underline{f_1' = 4,0 \text{ mm}}$

Pour finir, on s'intéresse au microscope dans son ensemble.

R4. Calculer la distance $\overline{O_1A}$ à laquelle positionner l'objet pour que l'image intermédiaire $\overline{A_1B_1}$ obtenue par l'objectif donne une image finale à l'infini.

Solution:
D'après la relation de conjugaison de Newton pour $\mathscr{L}_1$: $\overline{F_1A} \times \overline{F_1'A_1} = -{f_1'}^2$, avec $A_1 = F_2$, on en déduit que $\boxed{\overline{F_1A} = -\dfrac{{f_1'}^2}{\Delta} = -\dfrac{\Delta}{\gamma_1^2}}$
A.N. : $\underline{\overline{F_1A} = -0,10 \text{ mm}}$
Soit $\underline{\overline{O_1A} = \overline{O_1F_1} + \overline{F_1A} = -f_1' + \overline{F_1A} = -4,1 \text{ mm}}$
Cela peut également être déterminé à l'aide de la relation de conjugaison de Descartes, d'une manière similaire.

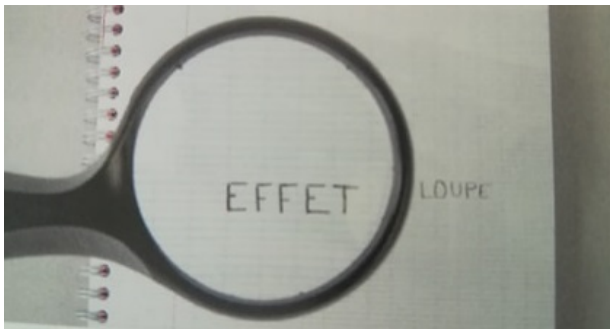
R5. Calculer dans ce cas le grossissement commercial du microscope en entier, défini comme étant $G_c = \dfrac{\alpha'}{\alpha''}$, avec α'' l'angle sous lequel on voit l'objet AB à l'œil nu placé au punctum proximum.

Solution:
En reprenant le même raisonnement que précédemment : $\tan(\alpha'') = \dfrac{AB}{d_m} \approx \alpha''$
L'expression de α' n'a pas changé (puisqu'il a toujours la même définition !).
Ainsi $G_c = \dfrac{A_1B_1}{f_2'} \times \dfrac{d_m}{AB}$, or $\dfrac{A_1B_1}{AB} = |\gamma_1|$ et $\dfrac{d_m}{f_2'} = G_0$
Ainsi $\boxed{G_c = |\gamma_1| \times G_0 = 400}$

III Résolutions de problèmes

Exercice n°8 Loupe

L'objet dont on forme l'image, est situé à 8,0 cm de la loupe.
Déterminer la distance focale de la loupe.



Solution: $\overline{OA} = -8,0$ cm

Par mesures sur la photo, on détermine le grandissement transversal : $\gamma = 1,6 > 0$ (puisque l'image est dans le même sens que l'objet).

D'après la relation de grandissement de Newton :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{f'}{\overline{FA}} \\ f' &= \gamma \times \overline{FA} \\ f' &= \gamma \times (f' + \overline{OA}) \\ f'(1-\gamma) &= \gamma \overline{OA} \end{aligned}$$

Soit $\boxed{f' = \dfrac{\gamma}{1-\gamma} \times \overline{OA} = 22 \text{ cm}}$

Exercice n°9 Hauteur d'une chute d'eau

Quelle est la hauteur de la chute d'eau qui apparaît sur la photographie ci-dessous ?

Réglages de l'appareil :
Ouverture : f/9,0
Durée d'exposition : 1/100 sec
Distance focale : 135 mm

Caractéristiques techniques : Appareil Canon EOS 550D

Type et Taille du capteur	Cmos APS-C 22,3 x 14,9 mm
Nombre de pixels effectifs	Environ 18,0 millions
Nombre total de pixels	Environ 18,7 millions

La position du photographe est repérée par une croix sur la vue satellite ci-dessous.

N
N Rim Dr
N Rim Dr
N Rim Dr
N Rim Dr
Loop Rd (Closed winters)
S Rim Dr
200 m
500 pieds

Solution: