Thème I. Ondes et signaux (Électricité)

Chapitre n°4 Circuits linéaires du premier ordre

De nombreuses applications nécessitent l'utilisation d'un circuit électrique contenant un condensateur et une (ou plusieurs) résistances.
À gauche : le flash d'un appareil photo s'allume lors de la décharge très rapide d'un condensateur. On constate d'ailleurs qu'il faut attendre un peu entre deux photos avec flash.
À droite : un défibrillateur automatisé externe dont la décharge du condensateur permet de délivrer un courant électrique dans le corps de la victime entre les deux électrodes.

Pré-requis

- Terminale : Thème Ondes et signaux
  - Modèle du circuit RC série : charge d'un condensateur par une source idéale de tension, décharge d'un condensateur, temps caractéristique.
  - Capacité mathématique : Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec un second membre constant.
  - Capacité numérique (spé maths) : Résolution par la méthode d'Euler de $y' = f$, de $y' = ay + b$.
- PCSI : Thème Ondes et signaux.
  - Chapitre n°3. Signaux électriques dans l'ARQS.

Objectifs du chapitre

— Généraliser l'étude de la charge et de la décharge du condensateur vue en terminale, à l'étude des circuits linéaires du premier ordre : établir l'équation différentielle, et la résoudre.

— Réaliser et interpréter un bilan énergétique.

Plan du cours

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – 🙂 – 🙁 – Comment déterminer la constante de temps τ caractéristique de l'évolution du premier ordre à partir d'un graphe ?

2 – 🙂 – 🙁 – Quelles sont les grandeurs électriques qui sont des fonctions continues du temps, c'est-à-dire qui ne peuvent pas subir de discontinuité ?

3 – 🙂 – 🙁 – Comment se comporte un condensateur en régime permanent ? et une bobine ?

4 – 🙂 – 🙁 – Quelle est la forme canonique de l'équation différentielle qui régit l'évolution temporelle d'un système linéaire du premier ordre ?

Quelle constante introduit-on ? Quel est son nom ? Son unité ?

5 – 🙂 – 🙁 – Quelle est la solution générale d'une équation différentielle différentielle qui régit l'évolution temporelle d'un système linéaire du premier ordre ?

6 – 🙂 – 🙁 – Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur au cours de sa charge à travers une résistance R.

7 – 🙂 – 🙁 – Résoudre complètement l'équation différentielle précédente pour déterminer l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur au cours de sa charge, s'il est initialement déchargée.

8 – 🙂 – 🙁 – Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur au cours de sa décharge à travers une résistance R.

9 – 🙂 – 🙁 – Résoudre complètement l'équation différentielle précédente pour déterminer l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur au cours de sa décharge s'il a été préalablement chargé sous une tension U_0.

10 – 🙂 – 🙁 – Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans un circuit RL soumis à un échelon de tension.

11 – 🙂 – 🙁 – Établir l'évolution temporelle de l'intensité du courant dans un circuit RL soumis à un échelon de tension, si initialement aucun courant ne circule dans le circuit.

I Retour sur la terminale : Charge et décharge du condensateur

Cette partie est une révision de ce que vous avez déjà étudié en terminale. Vous n'allez rien découvrir de nouveau. Les méthodes nécessaires pour **rédiger convenablement** les différentes questions se trouvent dans la suite du polycopié (les § correspondants sont indiqués). Les méthodes revues ici seront ensuite mises en œuvre dans des situations nouvelles.

I.1 Étude graphique

Activité à maîtriser : Lectures graphiques

On donne les évolutions de la tension aux bornes du condensateur (en trait plein) et de la tension aux bornes de la résistance (en traits pointillés) au cours du temps.

R1. Commenter le comportement de ces deux tensions à $t = 0$.

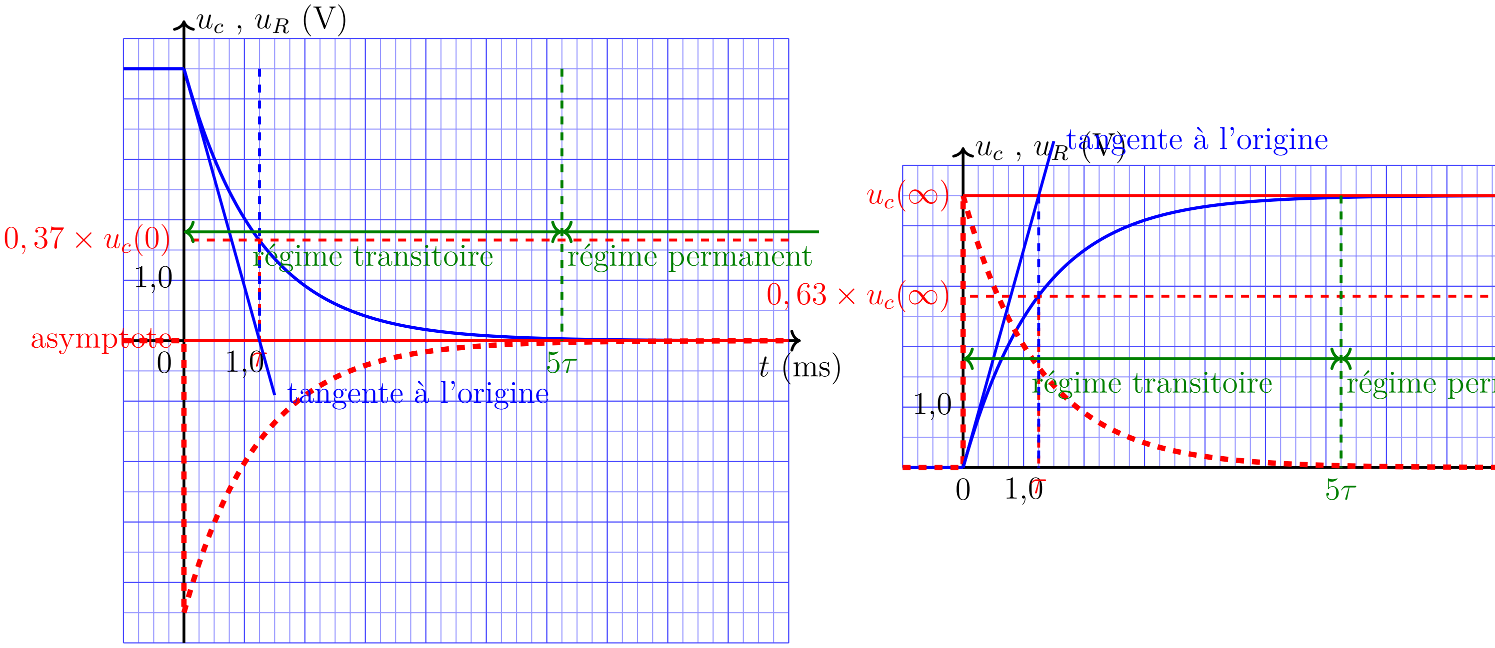
R2. Identifier la courbe correspondant à la charge du condensateur (=réponse à un échelon de tension), et celle correspondant à la décharge (=régime libre).

> **Solution:**
> Sur la courbe de gauche, u_c diminue au cours du temps pour tendre vers 0, c'est la décharge du condensateur. La courbe de droite correspond à la charge du condensateur : u_c est initialement nulle, puis à la fin elle présente une valeur non nulle.

R3. Identifier sur chaque courbe le régime permanent initial, le régime transitoire et le régime permanent final.

R4. (voir § II.5) Déterminer graphiquement le temps caractéristique du circuit.

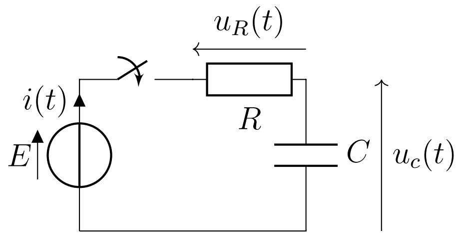
> **Solution:** On lit $\boxed{\tau = 1,25 \text{ ms}}$



I.2 Étude de la charge du condensateur

Activité à maîtriser : Charge du condensateur

On étudie la charge d'un condensateur de capacité C à travers une résistance R par un générateur idéal de fem E.
Le condensateur est initialement déchargé (pour $t < 0$).
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, et le générateur débite alors dans l'ensemble série $\{R - C\}$.



R1. (voir § II.3) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.

> **Solution:** Dans le circuit tracé précédemment, il y a 3 inconnues : $i(t)$, $i_c(t)$ et $u_R(t)$, il faut donc 3 équations indépendantes pour résoudre le problème.
>
> — Loi des mailles : $u_c(t) + u_R(t) - E = 0$ (1)
>
> — Loi d'Ohm : $u_R(t) = R_i(t)$ (2)
>
> — Relation du condensateur : $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ (3)
>
> On cherche à obtenir l'équation différentielle vérifiée par u_c, il faut donc tout exprimer en fonction de u_c.
>
> On injecte (3) dans (2) puis dans (1) : $u_c(t) + RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = E$

R2. (voir § II.3) L'écrire sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{A}{\tau}$$

et identifier la constante de temps τ et la constante A.

> **Solution:** Pour la mettre sous forme canonique il faut diviser par RC pour qu'il y ait un facteur 1 devant la dérivée de plus haut ordre (la dérivée 1$^{\text{re}}$ ici) et placer tout ce qui dépend de la fonction $u_c(t)$ inconnue à gauche de l'égalité, le reste à droite :
>
> $$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_c(t) = \frac{E}{RC}}$$
>
> On identifie alors la constante de temps du circuit RC série : $\boxed{\tau = RC}$

R3. (voir § II.4) Déterminer les solutions générales de l'équation différentielle.

> **Solution:**
>
> — Solution de l'équation homogène (sans second membre) : $\dfrac{\mathrm{d}u_{c,H}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_{c,H}}{\tau} = 0$
> $u_{c,H}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$
>
> — Solution particulière de l'équation différentielle (avec second membre) recherchée sous la forme du second membre, c'est-à-dire sous la forme d'une constante ici : $u_{c,P} = C$, qui vérifie l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}u_{c,P}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_{c,P}}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$, soit avec $\dfrac{\mathrm{d}u_{c,P}}{\mathrm{d}t} = 0$, on en déduit $u_{c,P} = E$
>
> — Solution générale de l'équation différentielle : $\boxed{u_c(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + E}$

R4. (voir § II.1) Que vaut $u_c(0^-)$ (juste avant la fermeture de l'interrupteur) ? Quelle propriété particulière possède la tension aux bornes d'un condensateur ? En déduire $u_c(0^+)$.

Solution:
Le condensateur est initialement déchargé, donc $\boxed{u_c(0^-) = 0}$

La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité : $\boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-)}$

On en déduit que $\boxed{u_c(0^+) = 0}$

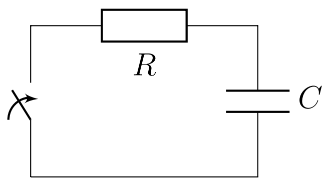
R5. (voir § II.4) Déterminer la constante d'intégration et en déduire l'expression de $u_c(t)$.

Solution:
Détermination de la constante d'intégration à l'aide de la condition initiale $u_c(0^+) = 0$.
Or $u_c(0) = K + E$, donc $K + E = 0$
ainsi $\boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

I.3 Étude de la décharge du condensateur

Activité à maîtriser : Décharge du condensateur

On étudie la décharge d'un condensateur de capacité C dans une résistance R.
Le condensateur a été préalablement chargé sous une tension U_0.
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.
On parle ici de **régime libre**, car il n'y a pas de source de tension dans le circuit.

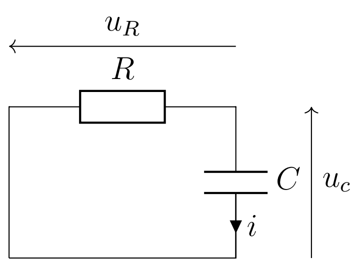


R1. (voir § II.3) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
L'écrire sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{\tau} = 0$$

et identifier la constante de temps τ.

Solution:



- Loi des mailles : $u_c + u_R = 0$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri$
- Relation du condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$

En combinant : $u_c + RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = 0$

Soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{RC} = 0}$
On identifie à nouveau la constante de temps du circuit $\tau = RC$

R2. (voir § II.4) Déterminer les solutions générales de l'équation différentielle.

Solution: $\boxed{u_c(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}}$

R3. (voir § II.1) Que vaut $u_c(0^-)$ (juste avant la fermeture de l'interrupteur) ? Quelle propriété particulière possède la tension aux bornes d'un condensateur ? En déduire $u_c(0^+)$.

Solution: Le condensateur est initialement chargé sous la tension U_0, donc $\boxed{u_c(0^-) = U_0}$

La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité : $\boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-)}$

On en déduit que $\boxed{u_c(0^+) = U_0}$

R4. (voir § II.4) Déterminer la constante d'intégration et en déduire l'expression de $u_c(t)$.

Solution: On en déduit $u_c(0^+) = K = U_0$

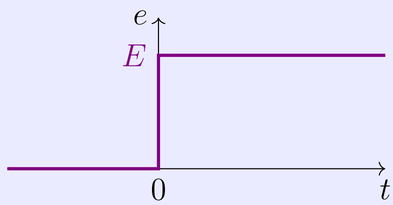
$\boxed{u_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$

II Généralisation : méthodes pour l'étude des circuits linéaires du premier ordre

Définitions

Dans ce chapitre, nous étudierons les **régimes transitoires du premier ordre** :

- **Réponse à un échelon de tension** : le circuit comporte une source de tension de f.é.m. nulle jusqu'à l'instant initial choisi, puis constante à partir de cet instant. Cela peut correspondre en pratique à l'allumage d'un générateur de tension constante, ou à la fermeture d'un interrupteur.



- **Régime libre** : le circuit ne comporte aucun générateur. Les grandeurs électriques évoluent néanmoins au cours du temps si on connecte dans le circuit un condensateur chargé (par ex.).
- Lorsqu'un changement brutal intervient dans un circuit (fermeture d'un interrupteur par ex.), les tensions et intensités mettent un certain temps à s'établir et à atteindre un nouveau régime permanent : c'est le **régime transitoire**, au cours duquel les tensions et intensités évoluent dans le temps entre un premier régime permanent et le nouveau régime permanent.

Méthode : Tout exercice d'électricité DOIT COMMENCER par :

- la **représentation du schéma du circuit étudié** ;
- l'**indication** sur le circuit de **toutes les intensités** (une par branche) et **tensions** (une aux bornes de chaque dipôle) : **flèche et nom**.

II.1 Conditions initiales

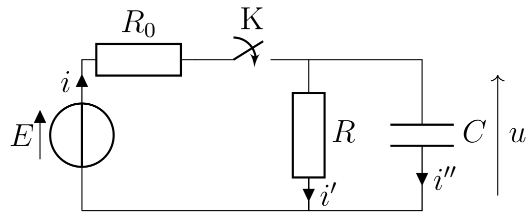
Méthode : Comment déterminer les conditions initiales ?

1. Déterminer les valeurs des intensités et tensions AVANT la fermeture de l'interrupteur.
2. Utiliser la continuité de la charge du condensateur (ou de la tension aux bornes du condensateur) et de l'intensité du courant à travers une bobine, pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).

3. Les autres grandeurs électriques à $t = 0^+$ se déterminent en appliquant les relations intensité/tension à $t = 0^+$ et les lois des mailles et des nœuds à $t = 0^+$.

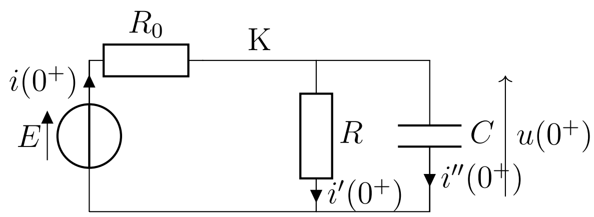
Exercice de cours A   Conditions initiales du circuit R-R//C

On étudie le circuit ci-contre, dans lequel, pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, aucun courant ne circule et le condensateurs est déchargé.
Déterminer les expressions de i, i', i'' et u juste après la fermeture de l'interrupteur, c'est-à-dire à $t = 0^+$.



Solution:

1. Pour $t < 0$ (et donc $t = 0^-$), le condensateur est déchargé, donc $u(0^-) = 0$, et aucun courant ne circule, donc $i(0^-) = i'(0^-) = i''(0^-) = 0$
2. La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u(0^+) = u(0^-)$, donc $\boxed{u(0^+) = 0}$
3. On en déduit d'après la loi d'Ohm : $\boxed{i'(0^+) = \dfrac{u(0^+)}{R} = 0}$
   La loi de nœuds à $t = 0^+$ s'écrit $i(0^+) = i'(0^+) + i''(0^+)$, or $i'(0^+) = 0$, donc $i(0^+) = i''(0^+)$
   La loi des mailles à $t = 0^+$ s'écrit : $u(0^+) - R_0 i(0^+) - E = 0$, soit $\boxed{i(0^+) = i''(0^+) = -\dfrac{E}{R}}$



II.2 État final

Méthode : Comment déterminer le régime permanent ?

Avant de réaliser de longs calculs (équations différentielles et résolutions), il est tout à fait possible de déterminer complètement l'état final du circuit, c'est-à-dire les tensions et intensités dans le circuit une fois le nouveau régime permanent atteint.

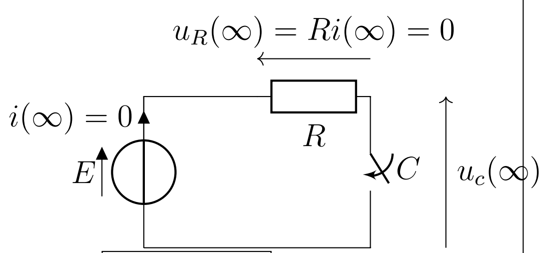
1. Reproduire le circuit électrique une fois le nouveau **régime permanent** atteint en remplaçant les **condensateurs par un interrupteur ouvert** et les **bobines par un fil**.
2. En déduire les tensions aux bornes des fils et les intensités à travers les interrupteurs ouverts qui sont nulles.
3. Appliquer les lois des nœuds, les lois des mailles et les relations intensité-tension pour déterminer les autres grandeurs électriques.

Exercice de cours B   Circuit RC

Déterminer l'état final du circuit (en régime permanent) lors de la charge du condensateur, sans utiliser les calculs effectués précédemment.

Solution:

En régime permanent, u ne dépend pas du temps , donc $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = 0$, donc le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $\boxed{i(\infty) = 0}$.
Pour déterminer l'état final du circuit, il faut représenter le circuit en RP, en remplaçant le condensateur par un interrupteur ouvert.



En régime permanent, la loi des mailles s'écrit alors $u_c(\infty) - E = 0$, donc $\boxed{u_c(\infty) = E}$

Exercice de cours C État final du circuit R-R//C

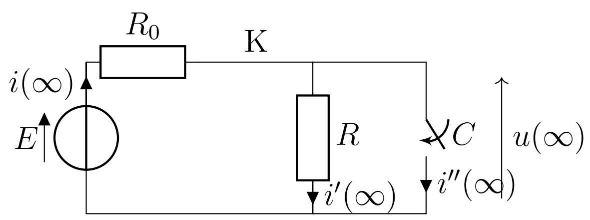
On considère à nouveau le circuit étudié dans l'exercice du § II.1.
Déterminer les expressions de i, i', i'' et u une fois le régime permanent atteint.

Solution: En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine est équivalente à un fil.

$\boxed{i''(\infty) = 0}$

Les deux résistances sont en série, elles constituent donc un pont diviseur de tension, donc $\boxed{u(\infty) = \dfrac{R}{R+R_0}E}$

La loi des nœuds donne : $\boxed{i(\infty) = i'(\infty) = \dfrac{E}{R+R_0}}$



II.3 Établir l'équation différentielle

Méthode : Comment établir l'équation différentielle d'un système du premier ordre ?

Objectif : établir l'équation différentielle vérifiée par la grandeur électrique s.

1. Lister les grandeurs électriques (tension, intensité) inconnues (qui ont du être représentées sur le circuit précédemment).
   Le nombre de grandeurs électriques inconnues vous donne le nombre d'équations indépendantes à écrire.
2. Écrire toutes les relations indépendantes possibles :
   — lois des mailles indépendantes (attention aux redondances) ;
   — lois des nœuds (attention aux redondances) ;
   — relations entre intensité et tension pour tous les dipôles.
3. Combiner ces relations entre elles pour ne conserver que la grandeur électrique qui nous intéresse.
4. La mettre sous forme canonique :
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{\tau} = \frac{s(\infty)}{\tau}$$
   avec s la grandeur électrique qui nous intéresse (une tension ou une intensité ou une charge) ;
   τ la constante de temps du circuit ;
   $s(\infty)$ la valeur qu'atteint s en régime permanent.

II.4 Résoudre l'équation différentielle

Méthode : Comment résoudre l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{y}{\tau} = B$ (E) ?

La résolution d'une telle équation différentielle se fait en **4 étapes** :

1. Déterminer la **solution générale** y_H **de l'équation** $\dfrac{\mathrm{d}y_H}{\mathrm{d}t} + \dfrac{y_H}{\tau} = 0$ **(EH) homogène (sans second membre)** :
$$y_H(t) = Ke^{-t/\tau} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R} \text{ une constante d'intégration}$$
2. Déterminer une **solution particulière** y_P **de (E), recherchée sous la forme du second membre**, ici constant $\left(\dfrac{\mathrm{d}y_P}{\mathrm{d}t} = 0\right)$: $\dfrac{y_P}{\tau} = B$, soit $y_P = B\tau$.

3. La solution générale de (E) est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$y(t) = y_H(t) + y_P \qquad y(t) = Ke^{-t/\tau} + B\tau$$

4. **Déterminer la constante d'intégration** K à l'aide de la condition initiale $y(t=0)$.

Attention – Erreur à ne pas commettre

La constante d'intégration se détermine sur la **solution générale de l'équation différentielle complète** et JAMAIS sur une partie de la solution, donc JAMAIS sur la solution homogène.

II.5 Lire graphiquement la constante de temps

Méthodes : Comment déterminer graphiquement τ ?

1re méthode en utilisant la valeur de $u_c(\tau)$:

τ est la durée au bout de laquelle, le régime transitoire a eu lieu à 63 %, autrement dit il en reste 37 %.

1. Déterminer la valeur de la tension finale $u_c(\infty)$ atteinte au bout d'un temps très long (resp. $u_c(0^+)$).
2. Calculer $0,63 \times u_c(\infty)$ (resp. $0,37u_c(0^+)$).
3. Déterminer l'abscisse τ du point de la courbe $u_c(t)$ d'ordonnée $0,63 \times u_c(\infty)$ (resp. $0,37u_c(0^+)$).

Attention – Erreur à ne pas commettre

ATTENTION $\cancel{\tau = 0,63E}$ N'A AUCUN SENS !

2e méthode en utilisant la tangente à l'origine :

1. Tracer la tangente à l'origine à la courbe $u_c(t)$.
2. Tracer l'asymptote à la courbe $u_c(t)$ (valeur atteinte pour $t \to +\infty$).
3. L'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote est τ.

III Aspect énergétique

Méthode : Comment réaliser des bilans de puissance et d'énergie ?

1. Écrire la loi des mailles.
2. Multiplier l'équation obtenue par l'intensité i du courant dans le circuit.
3. Identifier chaque terme de la relation obtenue en terme de puissance algébriquement fournie (dipôles en convention générateur) ou algébriquement reçue (dipôles en convention récepteur), donner leur interprétation et vérifier la conservation de la puissance,donc de l'énergie.
4. Intégrer par rapport au temps pour obtenir un bilan énergétique.

Activité à maîtriser : Bilans énergétiques du circuit RC

Bilan énergétique de la charge

R1. En suivant la méthode précédente, établir le bilan de puissance de la charge du condensateur que l'on mettra sous la forme : $\mathscr{P}_G = \mathscr{P}_{\text{Joule}} + \mathscr{P}_{\text{stockée dans C}}$, on précisera l'expression et la signification des différents termes.

Solution: Repartons de la loi des mailles : $E = u_R + u_c$
Et multiplions-la par i : $Ei = Ri^2 + u_c \times i$, avec :

- Ei : puissance algébriquement fournie par le générateur (en convention générateur)
  D'après l'expression établie pour $i(t)$ précédemment, $\forall t$, $Ei(t) > 0$: le générateur fournit à chaque instant de la puissance électrique au reste du circuit.
- Ri^2 : puissance reçue algébriquement par le conducteur ohmique (en convention récepteur)
  Cette puissance est toujours positive, donc le conducteur ohmique reçoit réellement à chaque instant de la puissance électrique, puissance qui est entièrement dissipée par effet Joule (sous forme de chaleur).
- $u_c \times i$: puissance reçue algébriquement par le condensateur (en convention récepteur)
  Avec la relation du condensateur, on peut écrire $\mathscr{P}_{\text{stockée dans C}} = u_c \times C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}u_c^2\right)$, on reconnait ici l'énergie emmagasinée par le condensateur.
  Au cours de la charge $u_c > 0$ et $u_c \nearrow$, donc $u_c^2 \nearrow$, donc la puissance algébriquement reçue par le condensateur est positive à chaque instant : le condensateur reçoit réellement de la puissance électrique à chaque instant.

R2. Exprimer l'énergie fournie par le générateur au circuit sur toute la durée du régime transitoire. Pour le calcul de l'intégrale on pourra utiliser le fait que $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.
Exprimer l'énergie initialement stockée dans le condensateur, et l'énergie stockée dans le condensateur à la fin du régime transitoire.
En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.

Solution: Énergie fournie par le générateur

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_{\text{G fournie}} &= \int_0^\infty \mathscr{P}_G \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty Ei(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty EC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
&= EC[u_C(t)]_0^\infty \\
&= EC(E-0) \\
&= CE^2
\end{aligned}$$

Énergie stockée par le condensateur :

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_{\text{C,stockée}}(0) &= \frac{1}{2}Cu_c(0)^2 \\
&= 0 \\
\mathscr{E}_{\text{C,stockée}}(\infty) &= \frac{1}{2}Cu_c(\infty)^2 \\
&= \frac{1}{2}CE^2
\end{aligned}$$

Le générateur a fournie CE^2, la moitié est récupérée par le condensateur.
L'énergie se conserve, donc la moitié de l'énergie fournie est reçue par la résistance qu'elle dissipe par effet Joule, soit $\mathscr{E}_{\text{Joule}} = \dfrac{1}{2}CE^2$.

Bilan énergétique de la décharge

R3. Exprimer l'énergie initialement stockée par le condensateur, et l'énergie stockée à la fin du régime transitoire.
Qu'est devenue cette énergie ?

Solution: Énergie stockée par le condensateur :

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\text{C,stockée}}(0) &= \frac{1}{2}Cu_c(0)^2\\ &= \frac{1}{2}CE^2\\ \mathscr{E}_{\text{C,stockée}}(\infty) &= \frac{1}{2}Cu_c(\infty)^2\\ &= 0\end{aligned}$$

L'énergie se conserve, donc la moitié de l'énergie perdue par le condensateur est reçue par la résistance et dissipée par effet Joule, soit $\mathscr{E}_{\text{Joule}} = \mathscr{E}_{\text{C,stockée}}(0) - \mathscr{E}_{\text{C,stockée}}(\infty) = \frac{1}{2}CE^2$.

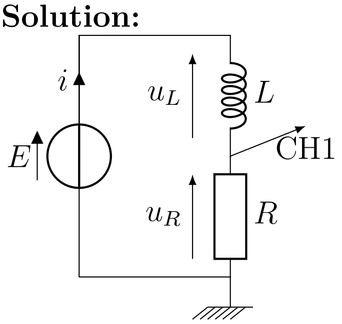
IV Étude du circuit RL

Activité à maîtriser : Établissement du courant dans un circuit RL

On étudie la réponse d'un circuit RL série ($R = 2,0$ kΩ et $L = 39,96$ mH) constitué d'une résistance et d'une bobine en série alimenté par un générateur qui délivre à un échelon de tension de force électromotrice $E = 1,0$ V. On observe la tension aux bornes de la résistance.

R1. Représenter le circuit en supposant la bobine idéale.

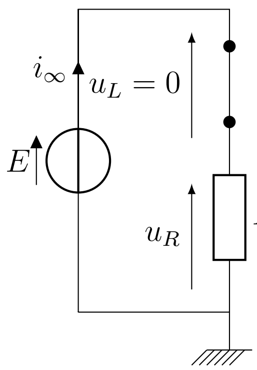
Solution:



R2. Déterminer, en utilisant le comportement en régime permanent de la bobine, la valeur finale $i(\infty)$ atteinte par l'intensité.

Solution:

$i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = \frac{E}{R}$ À la fin du régime transitoire, un nouveau régime permanent est atteint, la bobine est alors équivalent à un fil :



La loi des mailles nous donne $E = Ri_\infty \Leftrightarrow \boxed{i_\infty = \frac{E}{R}}$

R3. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i du courant électrique.

Solution: Loi des mailles : $E = u_R + u_L \Leftrightarrow E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}}$

R4. Résoudre l'équation différentielle.

Solution: Solution générale de l'équation différentielle : $i(t) = i_H(t) + i_P$, avec

- $i_H(t) = Ke^{-t/\tau}$, la solution générale de l'équation homogène
- i_P une solution particulière recherchée sous la forme du 2$^{\text{nd}}$ membre, c'est-à-dire constant ici : $i_P = \dfrac{E}{R}$

Donc $i(t) = Ke^{-t/\tau} + \dfrac{E}{R}$

À $t = 0^-$: $i(0^-) = 0$.

Or l'intensité du courant à travers une bobine étant une fonction continue du temps, donc $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

Ainsi $K = -\dfrac{E}{R}$, ainsi $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

R5. On définit le temps de montée à 95 %, qui correspond à l'instant auquel l'intensité du courant ne diffère que de 5 % de la valeur finale. Exprimer ce temps t_m en fonction de τ.

Solution: t_m est tel que : $i(t_m) = 0,95 i_\infty$ (l'intensité correspond à 95 % de l'intensité finale à $t = \infty$).

$\dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-t_m/\tau}\right) = 0,95\dfrac{E}{R} \Leftrightarrow e^{-t_m/\tau} = 0,05 \Leftrightarrow \boxed{t_m = -\tau\ln(0,05) \approx 3\tau}$

R6. Analyser les résultats expérimentaux de la figure ci-dessous : déterminer $i(\infty)$ et τ. Comparer aux valeurs attendues. Commenter.

Solution: Par lecture graphique :

— $i_\infty = 0,44$ mA, or
$\frac{E}{R} = \frac{1,0 \text{ V}}{2.10^3\ \Omega} = 0,5$ mA
En pratique, $i_\infty = \frac{E}{R_{\text{tot}}}$ et on peut alors déterminer $r_L + r_{\text{GBF}} = R_{\text{tot}} - R = 270\ \Omega$

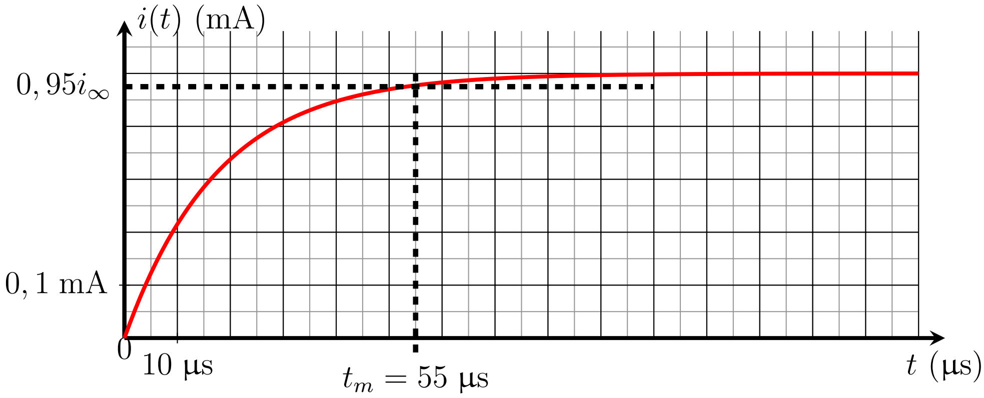
— $0,95 i_\infty = 0,475 \text{ mA} \Rightarrow t_m = 55\ \mu\text{s} \Rightarrow \tau = \frac{-t_m}{\ln(0,05)} = 18,4\ \mu\text{s}$

Or $\frac{L}{R} = 19,98.10^{-6}$ s

On constate que $\tau < \frac{L}{R}$, cela peut s'expliquer par la non prise en compte de la résistance interne de la bobine et de celle du générateur.

En pratique $\tau = \frac{L}{R_{\text{tot}}}$ avec $R_{\text{tot}} = r_L + r_{\text{GBF}}$ la résistance totale dans le circuit.

On en déduit que $R_{\text{tot}} = \frac{L}{\tau} = 2,3.10^3\ \Omega$, donc $r_L + r_{\text{GBF}} = 300\ \Omega$.



R7. Établir le bilan de puissance, et commenter.

Solution: Pour obtenir un bilan de puissance, il faut multiplier la loi des mailles par i :
$u_L \times i + u_R \times i = Ei$,

ainsi $\underbrace{L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \times i}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)\text{:puissance reçue par} L} + \underbrace{Ri^2}_{\text{Puissance dissipée par effet Joule}} = \underbrace{Ei}_{\text{Puissance fournie par le généraeur}}$

V Méthode d'Euler pour la résolution approchée des équations différentielles

<u>Capacité exigible</u> : **Mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.**

On souhaite déterminer la réponse du circuit RC à une excitation de forme quelconque, qui répond à l'équation différentielle sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$:

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{u_c}{\tau} + \frac{e(t)}{\tau}$$

Où e est une fonction du temps.

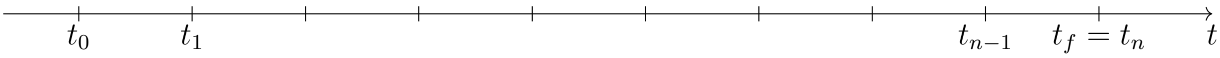
Au cours de la charge du condensateur, $e(t) = E$, une constante pour $t > 0$. Au cours de la décharge, $e(t) = 0$. e peut dépendre également du temps (fonction créneau, ou sinusoïdale,...)

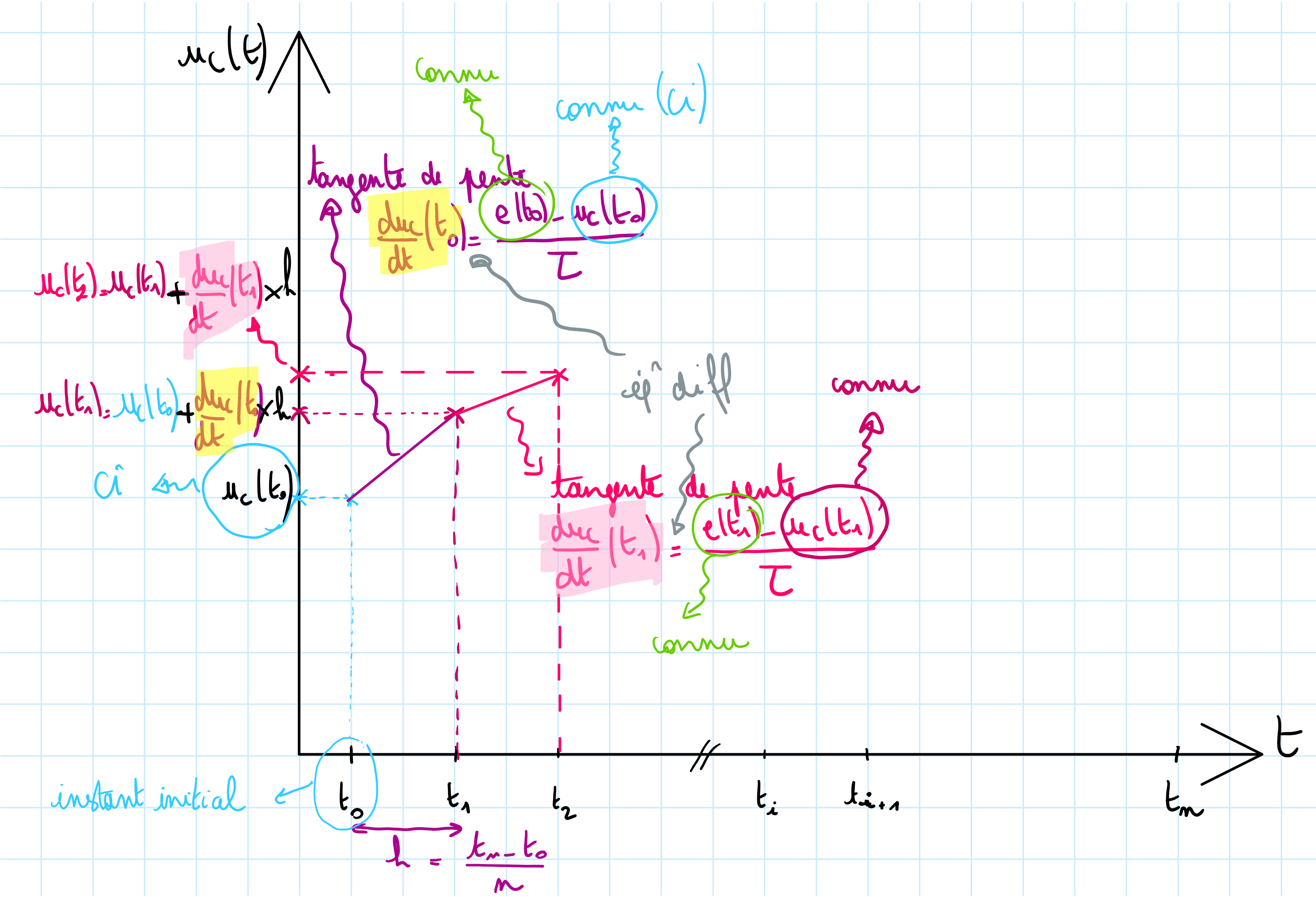
La méthode d'Euler est une méthode numérique de résolution approchée des équations diffé-

rentielles du premier ordre.

On découpe l'intervalle $[t_0, t_f]$ de résolution, en n intervalles de largeur $h = \dfrac{t_f - t_0}{n}$.

La valeur approchée de la solution est déterminée en $(n+1)$ instants, qui s'écrivent $t_i = t_0 + i \times h = t_0 + i \times \dfrac{t_f - t_0}{n}$ (pour $i \in [\![0, n]\!]$).





Les valeurs approchées de u_c se déterminent de proche en proche en partant de l'instant initial.

— Partons de l'instant initial t_0 où on connait la tension $u_c(t_0)$ (c'est la condition initiale).

Le nombre dérivé à l'instant t_0, noté $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t_0)$, s'exprime, d'après l'équation différentielle, selon :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t_0) = -\frac{u_c(t_0)}{\tau} + \frac{e(t_0)}{\tau}$$

il correspond à la **pente de la tangente à la courbe à l'instant** t_0**.** Ce nombre dérivé est connu à t_0, puisque $u_c(t_0)$ est connu (CI) et $e(t_0)$ est connu (on connait ce que fournit le générateur au circuit).

L'idée de la méthode d'Euler est d'**approximer sur l'intervalle** $[t_0, t_1]$ **la fonction** u_c **par sa tangente à** t_0.

Connaissant la valeur de la pente et le point $\big(t_0, u_c(t_0)\big)$ de cette tangente, on peut déterminer la valeur de $u_c(t_1)$ (équation d'une droite) :

$$\begin{aligned}
u_c(t_1) &\approx u_c(t_0) + \text{pente}_0 \times (t_1 - t_0)\\
u_c(t_1) &\approx u_c(t_0) + \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t_0) \times h\\
u_c(t_1) &\approx u_c(t_0) + \left(-\frac{u_c(t_0)}{\tau} + \frac{e(t_0)}{\tau}\right) \times h\\
u_1 &\approx u_0 + \frac{e(t_0) - u_0}{\tau}
\end{aligned}$$

— On connait maintenant $u_c(t_1)$ à l'instant t_1.
Le nombre dérivé à l'instant t_1, s'exprime, d'après l'équation différentielle, selon :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t_1) = -\frac{u_c(t_1)}{\tau} + \frac{e(t_1)}{\tau}$$

il correspond à la **pente de la tangente à la courbe à l'instant t_1.** Ce nombre dérivé est connu à t_1, puisque $u_c(t_1)$ est connu (étape précédente) et $e(t_1)$ est connu (on connait ce que fournit le générateur au circuit).
L'idée de la méthode d'Euler est d'**approximer sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ la fonction u_c par sa tangente à t_1.**
Connaissant la valeur de la pente et le point $\big(t_1, u_c(t_1)\big)$ de cette tangente, on peut déterminer la valeur de $u_c(t_2)$ (équation d'une droite) :

$$\begin{aligned}
u_c(t_2) &\approx u_c(t_1) + \text{pente}_1 \times (t_2 - t_1)\\
u_c(t_2) &\approx u_c(t_1) + \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t_1) \times h\\
u_c(t_2) &\approx u_c(t_1) + \left(-\frac{u_c(t_1)}{\tau} + \frac{e(t_1)}{\tau}\right) \times h\\
u_2 &\approx u_1 + \frac{e(t_1) - u_1}{\tau}
\end{aligned}$$

— Et ainsi de suite...
— Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, On connait maintenant $u_c(t_i)$ à l'instant t_i.
Le nombre dérivé à l'instant t_i, s'exprime selon : $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t_i) = -\frac{u_c(t_i)}{\tau} + \frac{e(t_i)}{\tau}$, il correspond à la **pente de la tangente à la courbe à l'instant t_i.** Ce nombre dérivé est connu à t_i, puisque $u_c(t_i)$ est connu (étape précédente) et $e(t_i)$ est connu (on connait ce que fournit le générateur au circuit).
L'idée de la méthode d'Euler est d'**approximer sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ la fonction u_c par sa tangente à t_i.**
Connaissant la valeur de la pente et le point $\big(t_i, u_c(t_i)\big)$ de cette tangente, on peut déterminer la valeur de $u_c(t_{i+1})$ (équation d'une droite) :

$$\begin{aligned}
u_c(t_{i+1}) &\approx u_c(t_i) + \text{pente}_i \times (t_{i+1} - t_i)\\
u_c(t_{i+1}) &\approx u_c(t_i) + \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t_i) \times h\\
u_c(t_{i+1}) &\approx u_c(t_i) + \left(-\frac{u_c(t_i)}{\tau} + \frac{e(t_i)}{\tau}\right) \times h\\
u_{i+1} &\approx u_i + \frac{e(t_i) - u_i}{\tau}
\end{aligned}$$

On note u_i la valeur approchée déterminée par la méthode d'Euler de u_c à l'instant t_i : $u_c(t_i) \approx u_i$.

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n-1]\!] \;:\; u_{i+1} \approx u_i + \frac{e(t_i) - u_i}{\tau} \times h}$$

Cette relation de récurrence permet de déterminer successivement les valeurs approchées de u_c connaissant la tension e imposée à chaque instant par le générateur, et la valeur de u_c à $t = 0$.

Activité numérique : Charge du condensateur

R1. Compléter le code ci-dessous.

R2. Que faut-il modifier pour le résoudre dans le cas de la décharge du condensateur ?