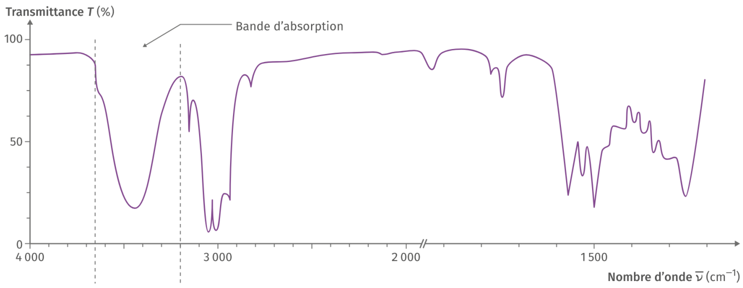
Thème I. Ondes et signaux (Oscillateurs)

Chapitre n°5 Oscillateurs mécaniques et électriques libres harmoniques — **Complété**

En terminale, en chimie, vous avez étudié des spectres infra-rouge (cf ci-contre). Vous avez appris à identifier les bandes caractéristiques et les associer aux liaisons présentent dans la molécule.
Pourquoi la liaison C=C vibre-t-elle à une fréquence supérieure à la liaison C−C ?
Pourquoi la liaison C−H vibre-t-elle à une fréquence supérieure à la liaison C−C ?



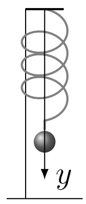
Spectre infra-rouge (D'après https://www.lelivrescolaire.fr/page/18369066)

Expérience

On accroche à un ressort fixé à une potence une masse (cf schéma ci-contre). On étire le ressort.

R1. Que se passe-t-il ? Représenter la position y de la masse en fonction du temps.

R2. Quelle fonction mathématique permettrait de modéliser cette évolution ?



Pré-requis

- Terminale : Thème Mouvement et interactions
  - Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point : définition et expression en coordonnées cartésiennes.
  - Deuxième loi de Newton.
- PCSI : Thème Ondes et signaux. Chapitre n°3. Signaux électriques dans l'ARQS.

Objectifs du chapitre

— Étudier deux oscillateurs harmoniques : l'oscillateur {masse-ressort} et l'oscillateur LC série.

— Étudier les propriétés des oscillateurs harmoniques.

— Outils mathématiques : résoudre les équations différentielles $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y(t) = B$

— Réaliser un bilan d'énergie de ces deux systèmes.

Plan du cours

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – Définir les caractéristiques d'un signal sinusoïdal : amplitude, période, fréquence, pulsation et phase à l'origine des temps.

2 – Donner l'expression d'un signal harmonique/sinusoïdal.

3 – Donner les relations entre la période, la fréquence et la pulsation.

4 – Établir l'équation différentielle du mouvement d'une masse accrochée à un ressort horizontal.

5 – Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur dans un circuit LC série.

6 – Déterminer les conditions initiales d'un circuit électrique LC série.

7 – Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique $\ddot{y} + \omega_0^2 y = b$ connaissant les conditions initiales $y(0)$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)$.

8 – Représenter l'allure de l'évolution temporelle, en tenant compte des conditions initiales, en plaçant dessus l'amplitude, la valeur moyenne et la période.

9 – Donner les expressions de l'énergie cinétique, l'énergie potentielle de pesanteur, l'énergie potentielle élastique d'un point matériel.

10 – Exprimer l'énergie mécanique d'un oscillateur mécanique harmonique.

11 – Faire le bilan de puissance du circuit LC série.

I Comment établir l'équation d'un oscillateur harmonique ?

I.1 Oscillateur mécanique

Méthode : Comment commencer l'étude d'un système mécanique ?

AVANT TOUTE CHOSE, il FAUT :

1. Définir le système étudié.
2. Préciser le référentiel d'étude.
3. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le système étudié.
4. Faire un schéma du dispositif étudié, sur lequel les forces seront représentées, ainsi que les axes cartésiens nécessaires.

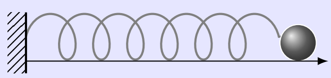
I.1.a) Position du problème

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

On considère le système constitué d'une masse m, accrochée à un ressort (de masse supposée négligeable), astreinte à se déplacer horizontalement sur un support sur lequel les frottements peuvent être négligés.

Définition : Ressort

Un **ressort** est un dispositif mécanique pouvant se déformer, c'est-à-dire s'allonger et se raccourcir.



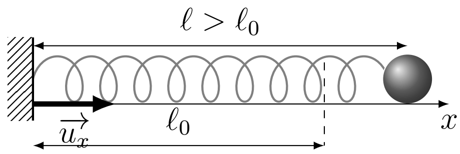
Sans contrainte, lorsqu'il est posé sur une table horizontale, la longueur prise par le ressort est appelée **longueur à vide**, notée ℓ_0.
Hors de la position de repos, la longueur du ressort, appelée **longueur instantanée**, notée ℓ, est différente de sa longueur à vide.

I.1.b) Force de rappel élastique

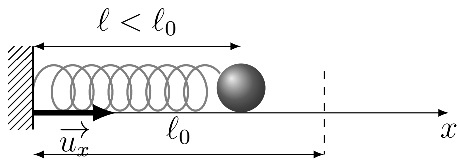
- La force de rappel élastique $\left\|\overrightarrow{f_{\text{élastique}}}\right\|$ exercée par un ressort linéaire est **proportionnelle à l'élongation** du ressort $|\ell - \ell_0|$, avec ℓ la longueur instantanée du ressort.
  On note k (en N.m^{-1}) la **constante de raideur** du ressort qui mesure la capacité du ressort à être étiré. **Étirer un ressort de constante de raideur élevée nécessite une force plus importante.**
  Ainsi, la norme de la force de rappel élastique s'écrit : $\left\|\overrightarrow{f_{\text{élastique}}}\right\| = k|\ell - \ell_0|$

- Pour obtenir l'expression de $\overrightarrow{f_{\text{élastique}}}$, il nous faut déterminer le sens de la force, pour cela il faut retenir que **la force de rappel élastique s'oppose toujours à la déformation imposée**.

  - Si $\ell > \ell_0 \Leftrightarrow (\ell - \ell_0) > 0$, le ressort est étiré et tend à vouloir se raccourcir en exerçant sur la masse m une force de rappel $\overrightarrow{f_{\text{élastique}}}$ dirigée selon ....



  - Si $\ell < \ell_0 \Leftrightarrow (\ell - \ell_0) < 0$, le ressort est comprimé et tend à vouloir s'allonger en exerçant sur la masse m une force de rappel $\overrightarrow{f_{\text{élastique}}}$ dirigée selon ....

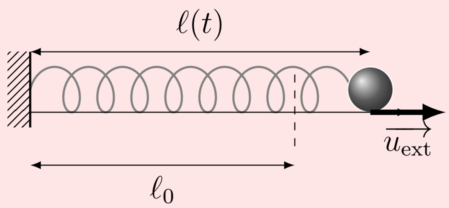


  On en déduit, dans notre cas, que $\overrightarrow{f_{\text{élastique}}}$ est de sens opposé à $(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$, ainsi $\overrightarrow{f_{\text{élastique}}} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$

À connaître : La force de rappel élastique

La force de rappel élastique exercée par un ressort de **longueur à vide** ℓ_0, de constante de raideur k et de **longueur instantanée** $\ell(t)$ s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{\text{élastique}}} = -k\left(\ell(t) - \ell_0\right)\overrightarrow{u_{\text{ext}}}}$$



avec $\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$ le **vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort**.

Méthode : Comment exprimer la force de rappel élastique ?

1. Faire un schéma avec dessus :
   - le ressort,
   - la longueur du ressort (représentée par une double flèche avec « ℓ » dessus),
   - l'axe orienté qui dirige le ressort et le vecteur unitaire correspondant,
   - l'origine O de l'axe,
   - la distance algébrique $(x,\, y,\, z)$ entre l'origine O et la masse.
2. Écrire la force de façon générale $\overrightarrow{f} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$ le vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort, en fonction du vecteur unitaire orientant l'axe.
4. Relier la longueur du ressort ℓ à la position sur l'axe (x si l'axe s'appelle (Ox)), pour cela s'aider du dessin.
5. Vérifier la validité physique de la formule.

Attention à l'expression de la force de rappel élastique

- La force de rappel a toujours la MÊME EXPRESSION que $\ell(t) > \ell_0$ ou $\ell(t) < \ell_0$.
- Ne pas confondre la longueur à vide ℓ_0, la longueur instantanée du ressort ℓ, et l'abscisse x.
- La force s'exprime toujours en premier lieu à partir des longueurs ℓ et ℓ_0.
- ℓ ne dépend pas de l'origine du repère ; x en dépend.
- Il faut toujours **vérifier la pertinence du signe** de cette expression en réalisant une expérience de pensée : Si je comprime le ressort, dans quel sens va être la force...

I.1.c) Position d'équilibre

Définition : Position d'équilibre

Une **position d'équilibre** $x_{\text{éq}}$ est une position telle que si on y pose le système sans vitesse initiale alors il y reste :

$$\text{Si à } t=0,\ x(t=0)=x_{\text{éq}} \text{ et } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0)=0, \text{ alors } \forall t>0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=0.$$

À retenir

En une position d'équilibre, la somme des forces s'exerçant sur l'objet est nulle : $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}$

La réciproque est fausse : cf principe d'inertie.

Méthode : Comment déterminer une position d'équilibre ?

1. Écrire qu'à l'équilibre : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}$.
2. Isoler la longueur du ressort à l'équilibre $\ell_{\text{éq}}$ et l'exprimer en fonction de ℓ_0, m, g et k.
3. Vérifier la cohérence physique :
   — vérifier l'homogénéité de la formule (penser au fait que $[k\ell_{\text{éq}}] = [mg]$;
   — comparer physiquement $\ell_{\text{éq}}$ à ℓ_0, en lien avec l'effet de la masse.

Exercice de cours A — Positions d'équilibre

Une masse m est attachée à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k.

R1. Déterminer la longueur $\ell_{\text{éq}}$ du ressort si celui-ci est horizontal.
On place l'origine de l'axe (Ox) au point d'attache du ressort. En déduire la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$.

Solution: Système : Masse $M(m)$

Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

— poids : $m\overrightarrow{g}$

— réaction du support (normale au support en l'absence de frottements) : $\overrightarrow{R_N}$

— force de rappel élastique $\overrightarrow{f_{\text{él}}} = -k(\ell(t)-\ell_0)\overrightarrow{u_x}$

À l'équilibre $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}$, donc $m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_N} - k(\ell_{\text{éq}}-\ell_0)\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{0}$

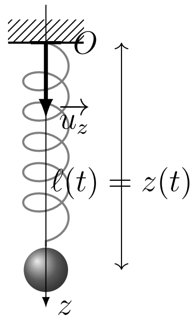
On projette selon $\overrightarrow{u_x}$, c'est-à-dire on calcule le produit scalaire entre la relation précédente et $\overrightarrow{u_x}$: $m\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{R_N}\cdot\overrightarrow{u_x} - k(\ell_{\text{éq}}-\ell_0)\overrightarrow{u_x}\cdot\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{u_x}$

Or $\overrightarrow{R_N}$ et $m\overrightarrow{g}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{u_x}$, donc leurs produits scalaires sont nuls et $\overrightarrow{u_x}\cdot\overrightarrow{u_x} = 1$, car $\overrightarrow{u_x}$ est un vecteur unitaire de norme 1.

Ainsi : $-k(\ell_{\text{éq}}-\ell_0) = 1$, soit $\boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0}$: pour un ressort **horizontal**, la longueur à l'équilibre est égale à la longueur à vide.

R2. Déterminer pour le ressort 2 la longueur du ressort à l'équilibre. Comparer à la longueur à vide.

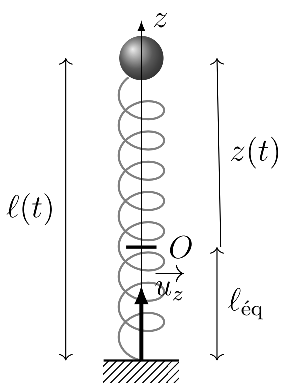
Solution:



La masse m est soumise au poids $m\overrightarrow{g} = mg\overrightarrow{u_z}$ (le poids est dans le même sens que $\overrightarrow{u_z}$) et à la force de rappel élastique $\overrightarrow{f_{\text{él}}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z}$
À l'équilibre : $m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{\text{él}}} = \overrightarrow{0}$,
soit $mg - k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0$,
donc $\boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} > \ell_0}$, en effet la masse m tire sur le ressort.
D'après le schéma $\ell(t) = z(t)$, ainsi $\boxed{\overrightarrow{f_{\text{él}}} = -k(z(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z}}$

R3. Déterminer pour le ressort 3 la longueur du ressort à l'équilibre. Comparer à la longueur à vide.

Solution:



La masse m est soumise au poids $m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$ (le poids est dans le sens opposé à $\overrightarrow{u_z}$) et à la force de rappel élastique $\overrightarrow{f_{\text{él}}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z}$
À l'équilibre : $m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{\text{él}}} = \overrightarrow{0}$,
soit $-mg - k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0$,
donc $\boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k} < \ell_0}$, en effet la masse m comprime le ressort.
D'après le schéma $\ell(t) = z(t) + \ell_{\text{éq}}$, ainsi $\boxed{\overrightarrow{f_{\text{él}}} = -k(\ell_{\text{éq}} + z(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z}}$, soit $\boxed{\overrightarrow{f_{\text{él}}} = -k\left(z(t) - \frac{mg}{k}\right)\overrightarrow{u_z}}$

I.1.d) Équation différentielle

Capacité exigible : Établir l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique.

Méthode : Comment établir l'équation du mouvement ?

1. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au système étudié et dans le référentiel choisi.
2. Projeter sur l'axe du mouvement et obtenir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.
3. L'écrire sous forme canonique :
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$$
4. Identifier l'expression de ω_0, la **pulsation propre** de l'oscillateur.

Établir l'équation différentielle de l'oscillateur mécanique harmonique

R1. Énoncer le Principe Fondamental de la Dynamique ($2^{\text{ème}}$ loi de Newton) en référentiel galiléen.

> **Solution:** Système : Masse $M(m)$
> Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
> Bilan des actions mécaniques :
> - poids : $m\overrightarrow{g}$
> - réaction du support (normale au support en l'absence de frottements) : $\overrightarrow{R_N}$
> - force de rappel élastique $\overrightarrow{f_{\text{él}}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$
>
> Le PFD appliqué à un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen énonce que la masse multipliée par l'accélération du point matériel est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système : $m\overrightarrow{a}(M) = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$.

R2. L'appliquer au système étudié.

> **Solution:** PFD appliqué à la masse m dans le référentiel terrestre galiléen :
> $m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{f_{\text{él}}}$

R3. Le mouvement se faisant selon l'axe horizontal (Ox), projeter l'équation précédente selon $\overrightarrow{u_x}$ afin d'obtenir une relation entre $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ et x : c'est une **équation différentielle**.

> **Solution:** Le vecteur accélération d'un point matériel se déplaçant uniquement selon l'axe (Ox) s'écrit $\overrightarrow{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u_x}$
> On projette le PFD selon $\overrightarrow{u_x}$, c'est-à-dire on calcule le produit scalaire avec $\overrightarrow{u_x}$:
> $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k(\ell(t) - \ell_0)$
> Avec $\ell(t) = x(t)$, on en déduit que $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k(x(t) - \ell_0)}$

R4. Mettre l'équation différentielle sous la forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$ et donner l'expression de ω_0 en fonction de k et m.

Solution:

- Mettre tout ce qui dépend de $x(t)$ à gauche : $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx(t) = k\ell_0$
- Diviser par le coefficient devant $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ toute l'équation pour que le coefficient devant $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ soit égal à 1 : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{k}{m}\ell_0$
- Identifier le coefficient devant x : c'est ω_0^2

  $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, soit $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

R5. Déterminer la dimension et l'unité (dans le système international) de ω_0.

Solution: Deux méthodes :

- À l'aide des unités de k et m :
  k intervient dans $\overrightarrow{f_{\text{él}}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$, donc $[\text{force}] = [k] \times L$, or $[\text{force}] = M.L.T^{-2}$
  Ainsi $[k] = M.T^{-2}$
  Soit $[\omega_0] = \sqrt{\dfrac{[k]}{[m]}} = \sqrt{T^{-2}}$, donc ω_0 est homogène à l'inverse d'un temps et s'exprime dans le système international en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (ou s^{-1}).
- À l'aide de l'équation différentielle, en écrivant que $[\dfrac{d^2x}{dt^2}] = [\omega_0^2 x(t)]$, et $[\dfrac{d^2x}{dt^2}] = [x].T^{-2}$

À retenir : Équation d'un oscillateur harmonique

Un **oscillateur harmonique** est un système dont l'évolution temporelle est régie par une équation différentielle :

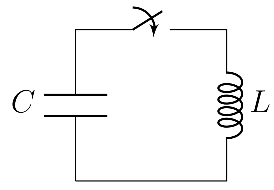
$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2\, s = b$$

où ω_0 est la **pulsation propre** (en rad/s) de l'oscillateur harmonique qui **dépend des caractéristiques intrinsèques du système**.

I.2 Oscillateur électrique : circuit LC

I.2.a) Circuit étudié

On étudie le circuit ci-contre constitué d'un condensateur de capacité C et d'une bobine idéale d'inductance L.
Le condensateur a été préalablement chargé sous une tension E.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le condensateur à la bobine en série.



I.2.b) Équation différentielle

Méthode : Comment établir l'équation différentielle d'un circuit électrique ?

On souhaite établir l'équation différentielle vérifiée par une grandeur électrique s (u_c, i, q, ...) :

1. Représenter le circuit électrique étudié, pour $t > 0$, en nommant et fléchant SUR le circuit toutes les tensions et intensités.
2. Lister les grandeurs électriques variables (tension, intensité) inconnues (qui sont représentées sur le circuit précédent).
   Le nombre de grandeurs électriques inconnues donne le nombre d'équations indépendantes à écrire.

3. Écrire toutes les relations indépendantes possibles :
   - lois des mailles indépendantes (attention aux redondances) ;
   - lois des nœuds (attention aux redondances) ;
   - relations entre intensité et tension pour tous les dipôles.
4. Combiner ces relations entre elles pour ne conserver que la grandeur qui nous intéresse.
5. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 s = b$$

et identifier l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction des composants du circuit.

Établir l'équation différentielle du circuit LC série

R1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.

Solution:
Loi des mailles : $u_c + u_L = 0$

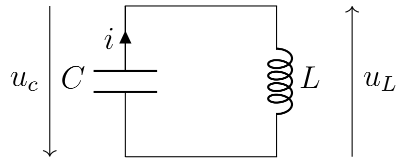
Relation du condensateur : $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$

Relation de la bobine : $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Ainsi $u_c + LC\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} = 0$

Soit $\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{u_c}{LC} = 0$

Pour $t > 0$, une fois l'interrupteur fermé.



R2. La mettre sous la forme canonique et identifier la pulsation propre de l'oscillateur électrique.

Solution:
On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

II Comment résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique ?

Capacité exigible : Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique compte tenu des conditions initiales.

II.1 Méthode de résolution

Méthode : Comment résoudre l'équation différentielle $\ddot{y} + \omega_0^2 y = b$ (E) ?

1. Écrire la **solution générale** y_H de l'**équation homogène (sans 2nd membre)** $\ddot{y}_H + \omega_0^2 y_H = 0$ (EH) :

$$\begin{aligned} y_H(t) &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ y_H(t) &= Y_m\cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

2. Déterminer **une solution particulière de l'équation différentielle étudiée (E)**, recherchée sous la forme du second membre, constant ici : y_p telle que $\dfrac{\mathrm{d}y_P}{\mathrm{d}t} = 0$, alors $\omega_0^2 y_P = b$
3. Écrire la solution générale de (E) comme la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_H(t) + y_P \\ y(t) &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + y_P \\ y(t) &= Y_m\cos(\omega_0 t + \varphi) + y_P \end{aligned}$$

4. Déterminer les deux constantes d'intégration (A, B) à l'aide des deux conditions initiales $y(t=0) = y_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t=0) = v_0$.
   a) D'après la solution $y(0) = A + \dfrac{b}{\omega_0^2}$, or d'après la CI $y(0) = y_0$. Ainsi $A + \dfrac{b}{\omega_0^2} = y_0$, donc $A = ...$
   b) Exprimer la dérivée de y : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$

      Puis exprimer sa valeur en $t = 0$: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = B\omega_0$. Et on en déduit $B\omega_0 = v_0$, d'où $B = ...$
5. Conclure sur l'expression de $x(t)$.

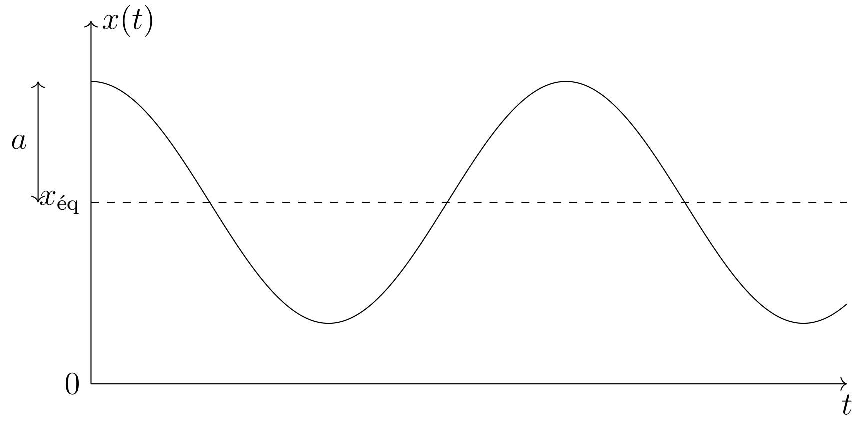
II.2 Oscillateur mécanique harmonique

Résolution de l'équation différentielle de l'OH mécanique

Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$ en tenant compte des conditions initiales suivantes.

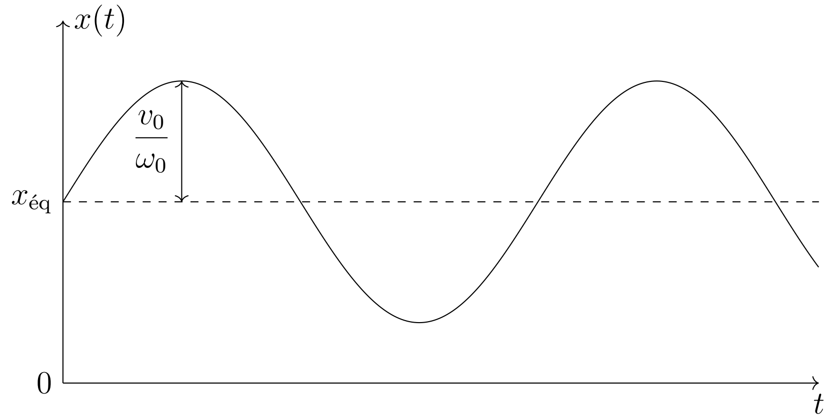
R1. On étire le ressort depuis sa position d'équilibre d'une distance a et on lâche la masse sans vitesse initiale : $x(0) = x_{\text{éq}} + a$ $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$

Solution: La solution générale s'écrit $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{éq}$
$x(0) = A + x_{éq} = x_{éq} + a$, soit $A = a$
$\frac{dx}{dt}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$
$\frac{dx}{dt}(0) = B\omega_0 = 0$, donc $B = 0$, car $\omega_0 \neq 0$.
Ainsi $\boxed{x(t) = a\cos(\omega_0 t) + x_{éq}}$



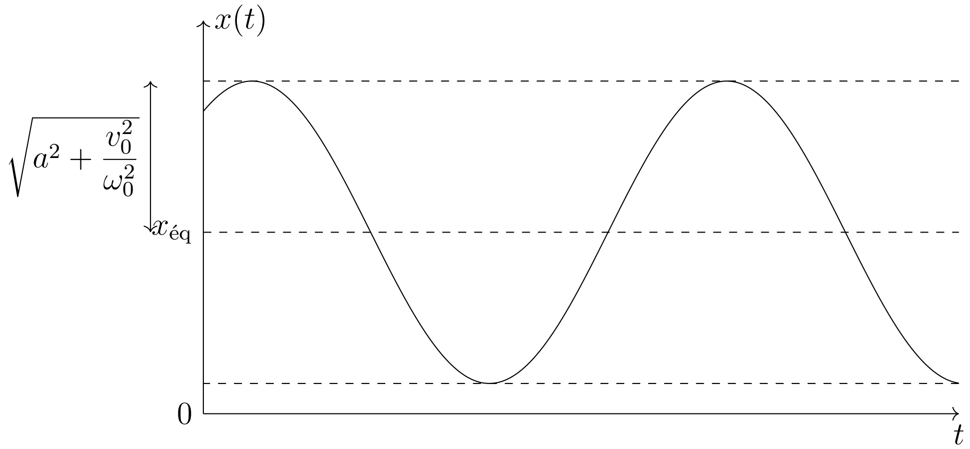
R2. Depuis la position d'équilibre, on communique une vitesse initiale à la masse : $x(0) = x_{éq}$ et $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$

Solution: La solution générale s'écrit $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{éq}$
$x(0) = A + x_{éq} = x_{éq}$, soit $A = 0$
$\frac{dx}{dt}(t) = B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$
$\frac{dx}{dt}(0) = B\omega_0 = v_0$, donc $B = \frac{v_0}{\omega_0}$
Ainsi $\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + x_{éq}}$



R3. $x(0) = x_{éq} + a$ et $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$

Solution: La solution générale s'écrit $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}$
$x(0) = A + x_{\text{éq}} = x_{\text{éq}} + a$, soit $A = a$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = B\omega_0 = v_0$, donc $B = \dfrac{v_0}{\omega_0}$
Ainsi $\boxed{x(t) = a\cos(\omega_0 t) + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}}$



R4. $x(0) = x_{\text{éq}}$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$

Solution: La solution générale s'écrit $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}$
$x(0) = A + x_{\text{éq}} = x_{\text{éq}}$, soit $A = 0$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = B\omega_0\cos(\omega_0 t)$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = B\omega_0 = 0$, donc $B = 0$, car $\omega_0 \neq 0$.
Ainsi $\boxed{x(t) = x_{\text{éq}}}$: en effet, si la masse m est placée à la position d'équilibre sans vitesse initiale, elle y reste (par définition même de la position d'équilibre).

II.3 Évolution harmonique

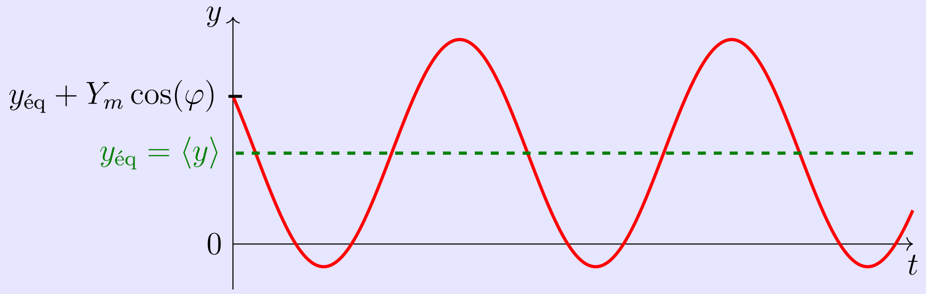
<u>Capacité exigible :</u> **Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.**

Définitions : Évolution harmonique

La solution générale de l'oscillateur harmonique s'écrit

$$y(t) = Y_m\cos(\omega_0 t + \varphi) + y_{\text{éq}}$$

- Y_m est l'**amplitude** : $Y_m = \dfrac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$.
  C'est une **grandeur positive** de même dimension que y.
- ω_0 est la **pulsation propre**, en **rad/s**, elle dépend des paramètres intrinsèques de l'oscillateur.
- φ est la **phase à l'origine des temps**, en **radians**.
- $\langle y(t)\rangle = y_{\text{éq}}$ est la **valeur moyenne** de y : c'est la valeur autour de laquelle oscille y.



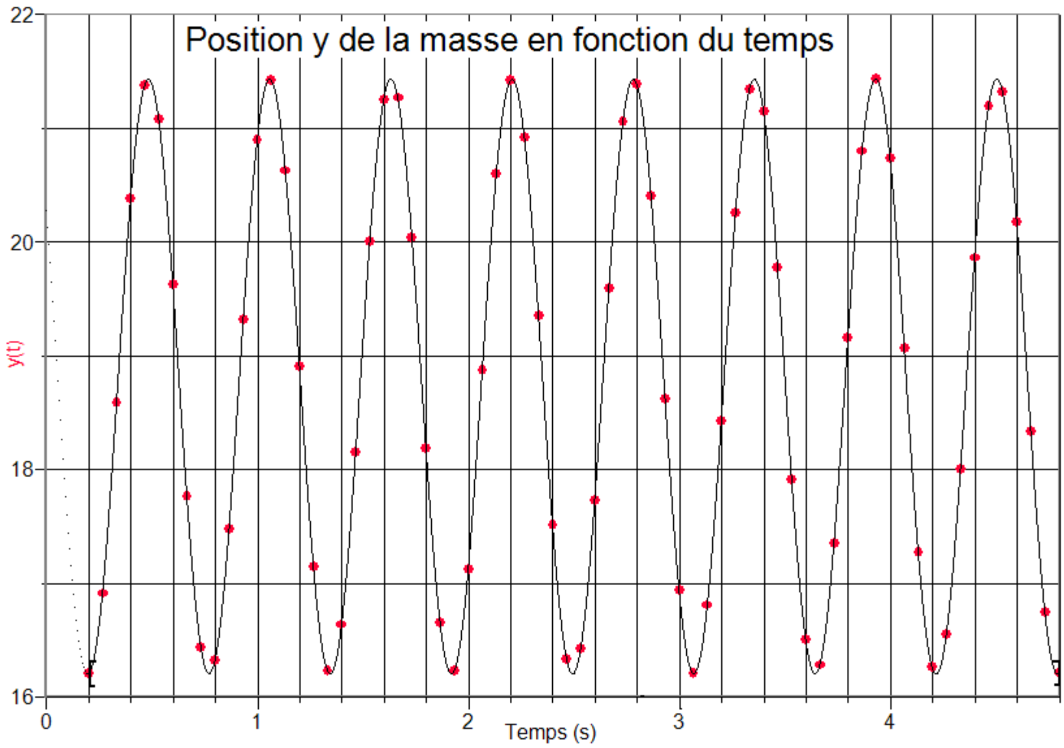
À connaître : Liens entre f, T, et ω

La **période propre** T_0 est reliée à la pulsation propre par $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

La **fréquence propre** f_0 est reliée à ω_0 par $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$

Exercice de cours B **Lectures graphiques**

On a filmé les oscillations de la masse m en fonction du temps. Sur la vidéo nous avons défini une échelle (pour faire le lien entre pixel et cm), ainsi que l'origine du repère, qui a été placée au point d'attache du ressort.
On a pu pointer la position de la masse m en fonction du temps, et on a obtenu la courbe ci-contre.



R1. Déterminer graphiquement l'amplitude.

Solution: Graphiquement : Amplitude$=\dfrac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \dfrac{21,4 - 16,2}{2} = 2,6$ cm
Valeur conforme avec la modélisation fournie.

R2. Déterminer graphiquement la valeur moyenne.

Solution: Graphiquement : Valeur moyenne$=\dfrac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \dfrac{21,4 + 16,2}{2} = 18,8$ cm, qui est bien conforme à la valeur de $y_{éq}$ fournie par la modélisation.

R3. Déterminer graphiquement la période propre, notée T_0.

Solution: Pour déterminer la période, prenons toutes les périodes affichées (au nombre de 8) :
$8T_0 = 4,8 - 0,2$, soit $\boxed{T_0 = 0,58 \text{ s}}$

R4. Déterminer la valeur de la pulsation propre ω_0.

Solution: D'après la modélisation $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{10,94} = 0,57$ s, valeur qui concorde avec la valeur lue graphiquement.

R5. Déterminer la valeur de la phase à l'origine des temps φ.

Solution: $y(t=0) = Y_m \cos(\varphi) + y_{\text{éq}}$: φ est donc reliée directement à la valeur de y à $t = 0$, d'où son nom.
Avec les valeurs fournies par la modélisation de Y_m, φ et $y_{\text{éq}}$, on détermine $y(t=0) = 20,2$ cm, conforme à la valeur graphique.

Attention

La valeur de la phase à l'origine des temps φ ne se lit pas directement sur le graphe de $y(t)$.

Méthode : Comment tracer l'allure de l'évolution temporelle d'un OH ?

1. **Indiquer les noms des axes** : abscisses et ordonnées.
2. Identifier s'il y a un **terme constant** qui s'ajoute aux termes sinusoïdaux. Si oui, reporter sur le graphe en pointillé ce terme constant en indiquant son nom sur le graphe. C'est autour de cette valeur que va osciller la grandeur.
3. Repérer les **conditions initiales** pour :
   — à partir de $x(0)$ (ou $u_c(0)$, ...) placer convenablement le point de départ (à 0, à la position d'équilibre, au-dessus de la position d'équilibre, en-dessous,...) ;
   — la valeur de la dérivée en 0 indique comment faire partir la courbe (0 : tangente horizontale ; > 0 : croissante ; < 0 : décroissante).
4. Tracer quelques périodes.

Évolution de l'OH mécanique selon les conditions initiales.

Représenter les évolutions temporelles de x dans les différents cas étudiés § II.2.

II.4 Oscillateur harmonique électrique

II.4.a) Conditions initiales

Méthode : Comment déterminer les CI dans un circuit du 2e ordre ?

On a obtenu une équation différentielle du 2e ordre vérifiée par s (tension, intensité, charge, . . . ça dépend !), pour la résoudre, il faut déterminer les deux conditions initiales $s(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$:

1. Déterminer les valeurs des intensités et tensions AVANT la fermeture de l'interrupteur.
2. Utiliser la continuité de la tension aux bornes du condensateur (ou de la charge du condensateur) et de l'intensité du courant à travers une bobine, pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS (à $t = 0^+$) la fermeture de l'interrupteur.
3. Les autres grandeurs électriques à $t = 0^+$ se déterminent en appliquant les relations intensité/tension à $t = 0^+$ et les lois des mailles et des nœuds à $t = 0^+$. En déduire les valeurs de $s(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

Conditions initiales

Déterminer les valeurs de u_c, i et $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ à l'instant $t = 0^+$ (juste après la fermeture de l'interrupteur).

Solution:

- Le condensateur a été au préalablement chargé sous une tension E, donc $u_c(0^-) = E$.
  Or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-)$.
  Donc $\boxed{u_c(0^+) = E}$
- Pour $t < 0$ aucun courant ne circule, donc $i(0^-) = 0$.
  Or l'intensité du courant à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i(0^+) = i(0^-) = 0$.
- Enfin, $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = 0$

II.4.b) Résolution complète

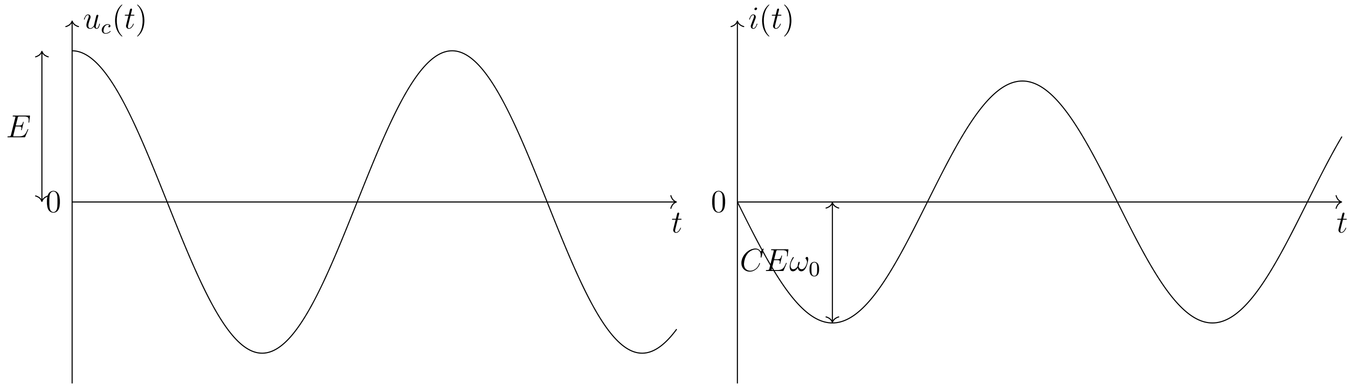
Résolution de l'équation différentielle du circuit LC

R1. Résoudre l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u_c = 0$ en utilisant les conditions initiales déterminées précédemment.

Solution:
La solution générale s'écrit : $u_c(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$
D'après les CI : $u_c(0^+) = E = A$
et $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+) = B\omega_0 = 0$
Ainsi $\boxed{u_c(t) = E\cos(\omega_0 t)}$

R2. Représenter l'allure de u_c en fonction du temps, puis de i.

Solution:



$$\begin{aligned} i(t) &= C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} \\ &= -CE\omega_0\sin(\omega_0 t) \\ &= -E\sqrt{\frac{C}{L}}\sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

III Aspect énergétique

III.1 Oscillateur harmonique mécanique

III.1.a) Énergies mises en jeu

À connaître : Énergies mises en jeu

- L'**énergie cinétique** d'un point matériel M de masse m, ayant la vitesse v s'écrit :

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}m\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2$$

- L'**énergie potentielle de pesanteur** d'un point matériel de masse m, repéré par son altitude z :

$$\mathscr{E}_{\text{pp}} = \pm mgz + K$$

avec « + » si (Oz) est ascendant ; « − » si (Oz) est descendant ; K une constante

- L'**énergie potentielle élastique** d'un point matériel accrochée à un ressort est :

$$\mathscr{E}_{\text{p, él}} = \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2 + K'$$

avec K' une constante.
Plus la longueur ℓ du ressort est différente de la longueur à vide ℓ_0, plus l'énergie emmagasinée par le système est importante.

- On appelle **énergie mécanique**, notée $\mathscr{E}_m$, la somme de ses énergies cinétique $\mathscr{E}_c$ et potentielles $\mathscr{E}_p$:

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p$$

Toutes les énergies s'expriment en Joule (J), avec 1 J = 1 kg · m^2 · s^{-2}.

III.1.b) Conservation de l'énergie mécanique

Capacité exigible : Réaliser un bilan énergétique.

Aspect énergétique de l'oscillateur harmonique mécanique

Considérons le cas général d'un oscillateur mécanique horizontal caractérisé par l'évolution de la position au cours du temps $x(t) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{\text{éq}}$.

R1. Exprimer l'énergie potentielle élastique $\mathscr{E}_{\text{p, él}}$ en fonction de X_m, ω_0, φ, k, t.

> **Solution:** L'énergie potentielle de pesanteur est constante au cours du déplacement de la masse m sur le plan horizontal. Nous prendrons cette constante comme étant nulle.
>
> L'énergie potentielle élastique s'exprime selon $\mathscr{E}_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}k(\ell(t) - \ell_0)^2$, or dans la configuration étudiée dans le cours, $\ell(t) = x(t)$ et $x_{\text{éq}} = \ell_0$
>
> Ainsi $\ell(t) - \ell_0 = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$
>
> Ainsi $\boxed{\mathscr{E}_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)}$

R2. Exprimer l'énergie cinétique en fonction de X_m, ω_0, φ, m, t ; puis en fonction de X_m, ω_0, φ, k, t.

Solution: L'énergie cinétique s'exprime selon $\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}mv^2$,

avec $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -X_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Ainsi $\boxed{\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}mX_m^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}$, avec $\omega_0 = \dfrac{k}{m}$

On en déduit que $\boxed{\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}kX_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}$

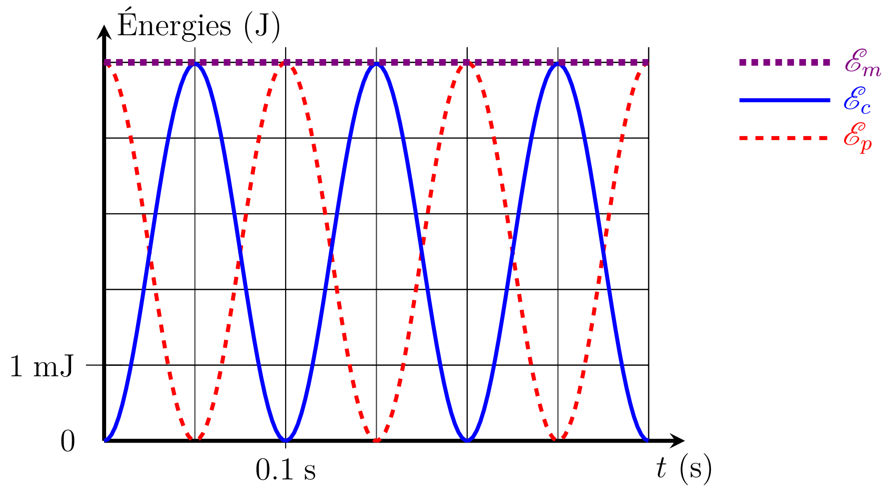
R3. Exprimer l'énergie mécanique en fonction de k et X_m, puis en fonction de m, ω_0 et X_m. Commenter

Solution: $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \dfrac{1}{2}kX_m^2\Big(\underbrace{\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}_{=1}\Big)$

Ainsi $\boxed{\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}kX_m^2}$: l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement. En effet, toute l'étude a été menée en négligeant tous frottements.

R4. Tracer l'allure de l'évolution temporelle des trois énergies avec les conditions initiales : $x(0) = x_{éq} + a$ et $v(0) = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Solution:



La période de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle vaut 0,1 s.

Tandis que la période de $x(t)$ vaut : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 0,2$ s

En effet, les échanges d'énergie ont lieu de façon identique deux fois par période : entre la position minimale et la position maximale, puis entre la position maximale et la position minimale. L'aller et le retour sont identiques d'un point de vue énergétique.

III.2 Oscillateur harmonique électrique

Bilan de puissance du circuit LC

R1. Effectuer un bilan de puissance du circuit LC. L'interpréter.

Solution: On part de la loi des mailles :

$$\begin{aligned}
u_c + u_L &= 0\\
u_c \times i + u_L \times i &= 0\\
u_c \times C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \times i &= 0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) &= 0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) &= 0
\end{aligned}$$

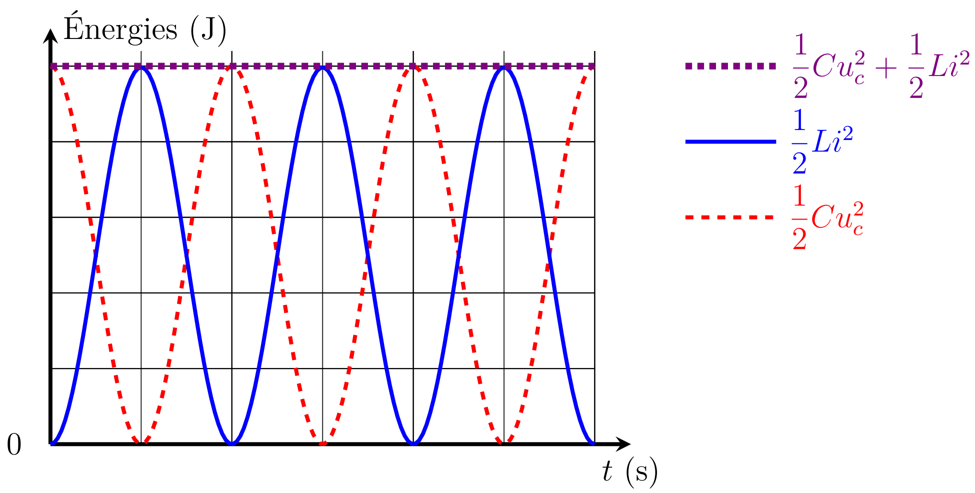
On en déduit que l'énergie totale stockée dans le condensateur et la bobine se conserve :

$$\boxed{\frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \text{constante} = \frac{1}{2}CE^2 + 0}$$

L'énergie initialement stockée dans le condensateur, $\frac{1}{2}CE^2$, s'échange entre le condensateur et la bobine.

R2. Représenter l'allure des énergies stockées par le condensateur et la bobine au cours du temps.

Solution:



IV Analogie

	Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique LC série
	position $x(t)$	Charge du condensateur $q(t)$
	vitesse $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$	Intensité du courant $i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$
Équation différentielle	$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = kx_{\text{éq}}$	$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{C} = 0$
	Constante de raideur du ressort k	Capacité du condensateur $\frac{1}{C}$
	Masse m	Inductance L
Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Énergies	$\mathscr{E}_p = \frac{1}{2}kx^2$	$\mathscr{E}_{\text{stockée dans C}} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
	$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv_x^2$	$\mathscr{E}_{\text{stockée dans L}} = \frac{1}{2}Li^2$