Thème I. Ondes et signaux (Oscillateurs)
TD n°6 Oscillateurs libres amortis

Méthode : Comment travailler des exercices ?

Avant la séance de TD :

- ★ Sur une feuille de brouillon, avec un crayon à la main et le chapitre ouvert sous les yeux.
- ★ Essayer des « trucs » même si cela n'aboutit pas.
- ★ Faire des schémas complets et suffisamment grands.
- ★ Ne rien écrire sur l'énoncé de TD afin de pouvoir refaire les exercices après la correction en classe.
- ★ Réfléchir environ 10 à 15 min sur chaque exercice demandé. Si vous bloquez complètement sur une question/un exercice, passez à la suite au bout de 10 min, et me poser des questions soit directement soit par mail nvalade.pcsi@gmail.com .

Après la séance de TD :

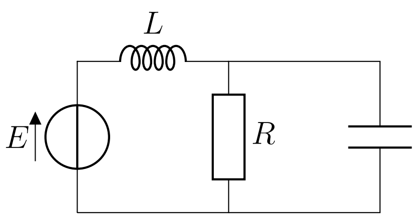
- ★ Refaire les exercices corrigés ensemble, sans regarder le corrigé dans un premier temps.
- ★ Une fois l'exercice terminé ou si vous êtes totalement bloqué, reprendre avec le corrigé.

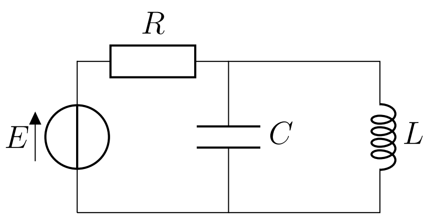
Exercice n° / Capacités	1	2	3	4	5	6	7
Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.		✎	✎		✎	✎	
Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.			✎	✎	✎	✎	
Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.			✎	✎	✎	✎	
Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.		✎	✎	✎	✎	✎	
Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine.				✎	✎		
Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.			✎			✎	✎
Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.							✎
Réaliser un bilan énergétique.							✎

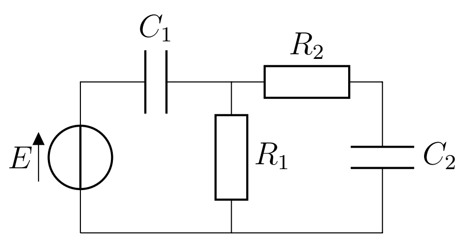
I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Recherche de régime permanent

Déterminer la tension aux bornes de chaque condensateur ou le courant circulant dans chaque bobine lorsque le régime permanent est atteint.







Exercice n°2 Lectures de graphes

Associer à chaque graphe, le jeu de conditions initiales et le jeu de paramètre correspondant, ci-dessous.

— Les conditions initiales suivantes :

  — $z(0) = z_{\text{éq}} + 2,0\ \text{cm}\,;\ \dot{z}(0) = 0\ \text{m/s}$

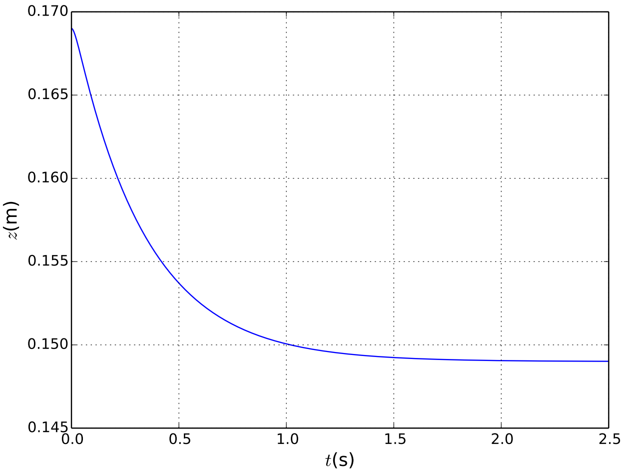
  — $z(0) = z_{\text{éq}}\,;\ \dot{z}(0) = 1\ \text{m/s}$

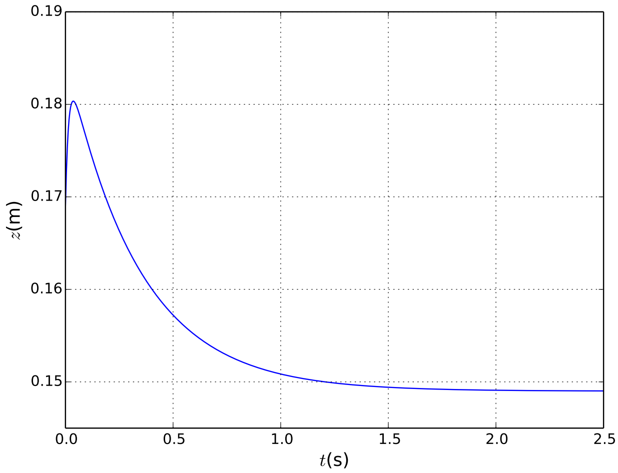
  — $z(0) = z_{\text{éq}} + 2,0\ \text{cm}\,;\ \dot{z}(0) = 1\ \text{m/s}$

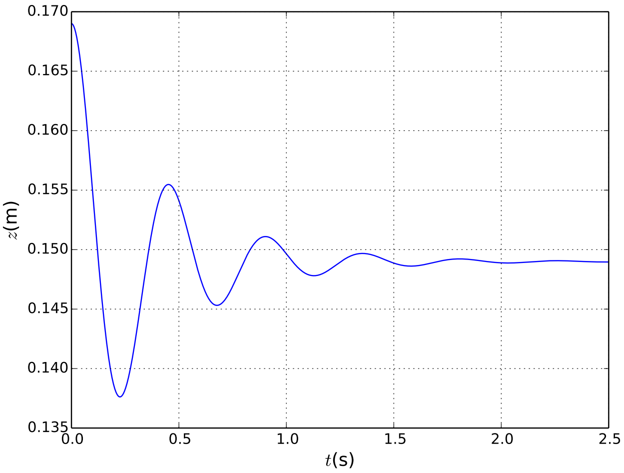
— Les couples de paramètres suivants :

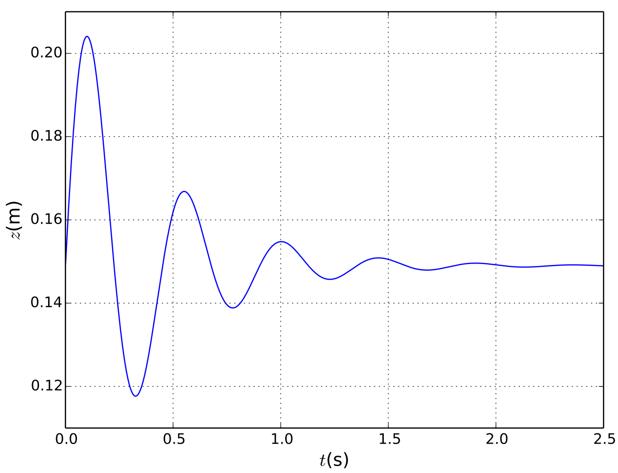
  — $k = 20\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}\,;\ m = 0,1\ \text{kg}\,;\ \alpha = 0,5\ \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$

  — $k = 20\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}\,;\ m = 0,1\ \text{kg}\,;\ \alpha = 7\ \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$



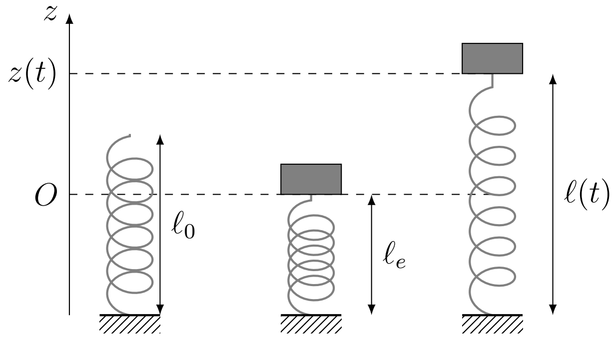






Exercice n°3 Fourche de VTT

La fourche de VTT peut être modélisée par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, associé à un amortisseur dont la force de frottement est $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$. On note m la masse appuyant sur la fourche lorsque le vététiste appuie sur le guidon (par exemple en descente).
Données : $m = 20$ kg ; $k = 2,5 \cdot 10^3$ N · m^{-1} ;
$\alpha = 5,0 \cdot 10^2$ N · s · m^{-1} ; $\ell_0 = 1,3$ m ;
$g = 9,8$ m · s^{-2} ; $v_0 = 5,0$ m · s^{-1}



Q1. Le cycliste appuie sur le guidon, avec une masse m. Exprimer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre en fonction de m, g, k et ℓ_0. La calculer. Le ressort est-il comprimé ou étiré ?

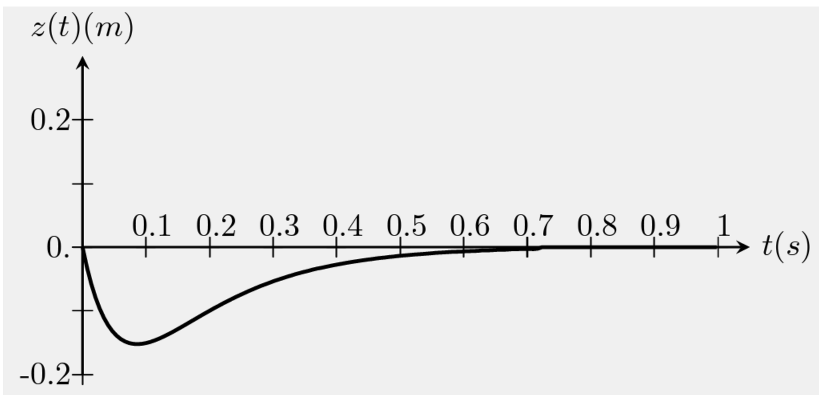
Le vététiste se réceptionne après un dénivelé. On souhaite établir la forme du mouvement du cycliste suite à ce saut. Les conditions initiales sont $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = -v_0$ (avec $v_0 > 0$, $\dot{z}(0) < 0$ car dirigé vers le sol).

Q2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position verticale $z(t) = \ell - \ell_{eq}$ et la mettre sous la forme canonique $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ en exprimant Q et ω_0.

Q3. Calculer Q et ω_0 (en précisant leur unité). Quelle est la nature du mouvement du vététiste (pseudo périodique, critique ou apériodique) ?
Calculer le temps d'amortissement caractéristique compte tenu du régime.

Q4. Déterminer la solution $z(t)$ avec les conditions initiales. On pourra introduire la grandeur $\gamma = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$.

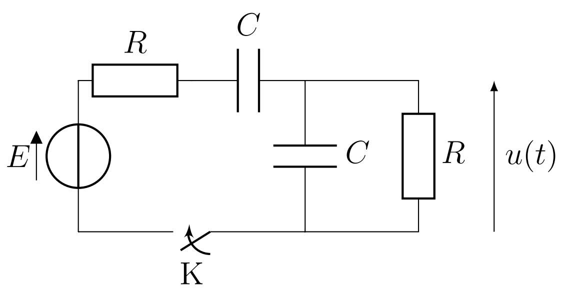
Q5. La figure ci-dessous représente $z(t)$. De quelle longueur s'enfonce approximativement la fourche ?



II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Pont de Wien

On considère le circuit représenté ci-contre, appelé pont de Wien.
Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert et les deux condensateurs, de même capacité C, sont déchargés.
On ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Les deux résistances sont identiques.



Q1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u et montrer qu'elle s'écrit sous la forme

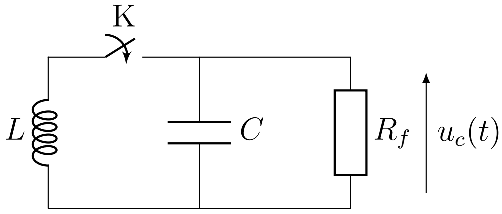
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 3\omega_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

Q2. Déterminer les conditions initiales $u(t = 0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+)$.

Q3. En déduire l'expression de $u(t)$. Représenter graphiquement son allure.

Exercice n°5 Encore un RLC !

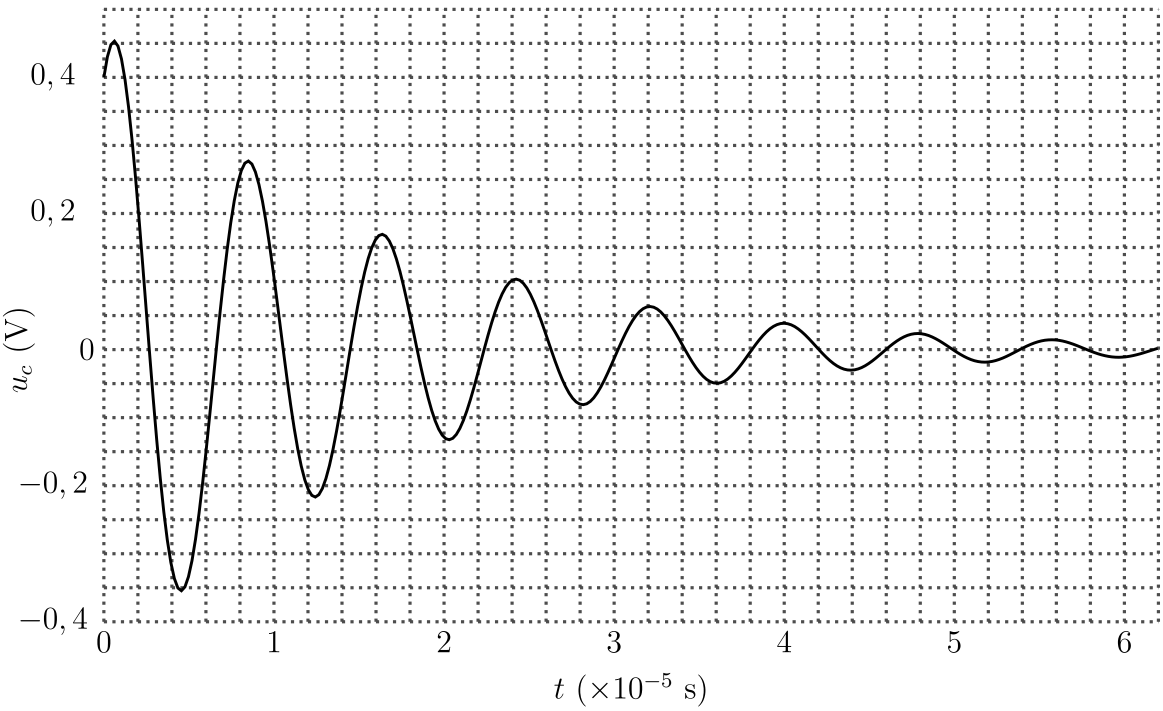
On considère un circuit constitué d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur réel de capacité C et de résistance de fuite R_f.
Pour $t < 0$, la tension aux bornes du condensateur vaut U_0. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.
Données : $C = 5,0$ nF



Q1. Établir l'équation différentielle dont u_c est solution et déterminer les expressions de la pulsation propre et du facteur de qualité en fonction de R_f, L et C.

Q2. Déterminer les expressions de $u_c(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+)$ en fonction de U_0, R_f, C.

On a enregistré l'évolution de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps.



Q3. Établir complètement la solution $u_c(t)$ de l'équation différentielle précédente.

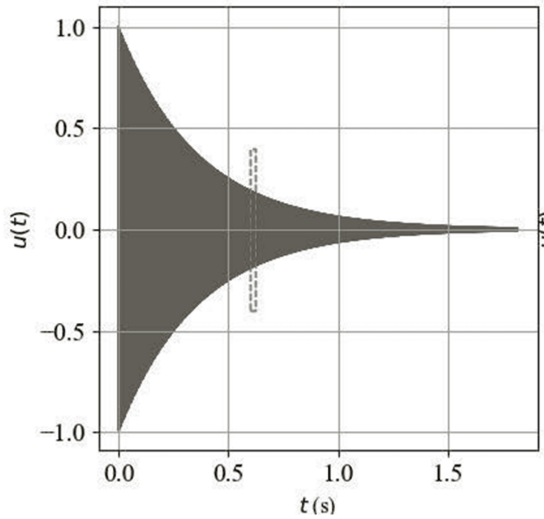
Q4. Établir l'expression du décrément logarithmique, noté δ, défini par $\delta = \ln\left(\frac{u_c(t)}{u_c(t+T)}\right)$, où T est la pseudo-période, en fonction de ω_0, T et Q, puis en fonction de Q uniquement.

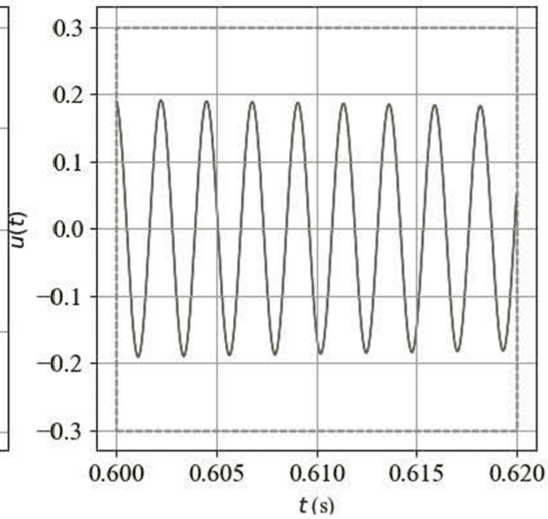
Q5. Déterminer graphiquement la valeur du décrément logarithmique δ.

Q6. Déduire de toutes ces mesures les valeurs des composants R_f, L ainsi que la tension initiale U_0.

Exercice n°6 Diapason

Un diapason peut être modélisé par un système masse-ressort amorti. L'amortissement provient principalement de la transmission des oscillations des tiges métalliques en vibration sonore.





Q1. Rappeler l'équation canonique d'un oscillateur amorti en faisant apparaître la pulsation propre ω_0 et le coefficient de qualité Q.

Q2. À partir de l'enregistrement sonore représenté ci-dessous, estimer le facteur d'amortissement Q.

Q3. Déterminer graphiquement la pseudo-période T et en déduire la valeur de la pseudo-pulsation Ω.

Q4. Relier la pseudo-pulsation à la pulsation propre. Calculer ω_0, commenter.

Exercice n°7 Interprétation énergétique du facteur de qualité

Un corps (S), de masse $m = 50$ g, est suspendu à un point fixe O par l'intermédiaire d'un ressort vertical de raideur $k = 20\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 20$ cm. Lorsqu'il est animé d'une vitesse $\vec{v}$, (S) est soumis de la part de l'air à une force de frottement fluide $\vec{F} = -h\vec{v}$. La position de (S) est repérée par la coordonnée $z(t)$ de son centre d'inertie M sur un axe vertical descendant Oz. On note z_{eq} la cote de M à l'équilibre.

On lâche (S) à $t = 0$ avec une vitesse nulle dans la position $z_0 = z_{eq} + a > z_{eq}$. Le référentiel $\mathscr{R}$ lié au sol est supposé galiléen.

En introduisant la variable $Z(t) = z(t) - z_{eq}$, on peut montrer que Z vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{mk}}{h}$$

On donne l'expression de Z dans le cadre du régime pseudo-périodique :

$$Z(t) = ae^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right) \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

On s'intéresse aux aspects énergétiques de ce mouvement. On se place dans l'hypothèse $Q \gg 1$.

Q1. Déterminer une expression approchée de Z compte tenu de $Q \gg 1$[1].

Q2. Établir l'expression approchée de l'énergie mécanique $\mathscr{E}_m$ de (S) en fonction du temps.

Q3. Quel est le signe de la dérivée temporelle de $\mathscr{E}_m(t)$? Commenter le résultat.

Q4. Donner une expression approchée de la variation relative $\dfrac{\Delta\mathscr{E}_m}{\mathscr{E}_m} = \dfrac{\mathscr{E}_m(t+T) - \mathscr{E}_m(t)}{\mathscr{E}_m(t)}$ de l'énergie mécanique pendant une période. En déduire une interprétation énergétique du facteur de qualité Q.

Q5. Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire en lien avec le facteur de qualité et la période propre ?

1. Z devra s'écrire sous la forme $Ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\Omega t + \varphi)$ où A et φ sont à déterminer en fonction de a

III Extraits du cahier d'entraînement de physique-chimie

Entraînement 4.16 — Équation canonique.

De nombreux circuits du second-ordre sont en fait des oscillateurs dont l'équation canonique est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x(t) = f(t),$$

où ω_0 est appelée *pulsation propre* et Q *facteur de qualité*.

Donner la dimension de :

a) ω_0 ....

b) Q ....

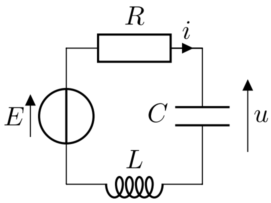
On considère l'équation $RC\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i(t) = 0$. Exprimer :

c) ω_0 ....

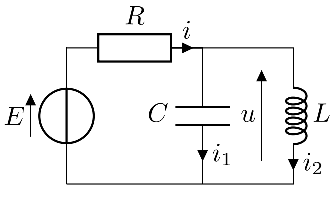
d) Q ....

Entraînement 4.17 — Mise en équation.

On considère les deux circuits suivants, pour lesquels les fém des générateurs de tension E sont constantes.



montage 1



montage 2

À l'aide de la loi des mailles et des nœuds, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u :

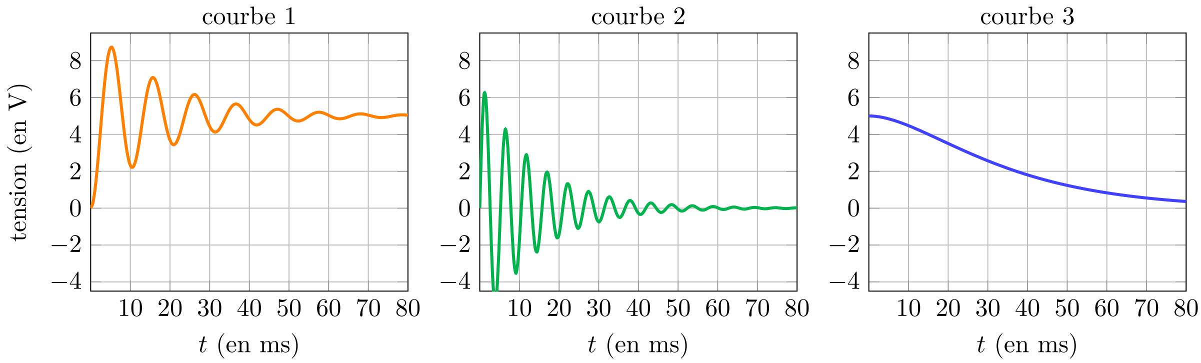
a) Dans le montage 1 ....

b) Dans le montage 2 ....

Entraînement 4.19 — Réponses d'un circuit du second-ordre.

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$ au cours du temps.
Toutes ces grandeurs évoluent suivant une équation différentielle du type

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\,x(t)=\mathrm{C^{te}}.$$



a) Quelle courbe est associée au plus grand facteur de qualité Q ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

b) On a

$$u_1(t)=a\mathrm{e}^{-t/\tau_1}-b\mathrm{e}^{-t/\tau_2}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

c) On a

$$u_2(t)=E\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

d) On a

$$u_3(t)=E\Big[1-(\cos(\Omega' t)+a\sin(\Omega' t))\mathrm{e}^{-t/\tau'}\Big].$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

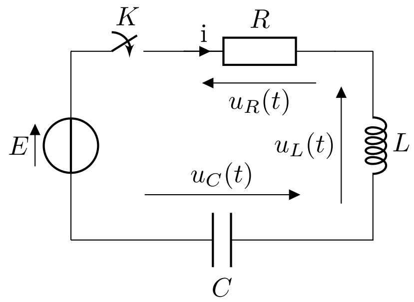
. . . .

e) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-pulsation Ω qui intervient dans $u_2(t)$

. . . .

Entraînement 6.14 — Aspects énergétiques du circuit RLC.

On considère le montage ci-dessous dans lequel le condensateur est initialement déchargé.



À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

À $t = 0^+$, on a $u_C(t = 0^+) = 0$ et $i(t = 0^+) = 0$.

En régime permanent, on a $u_C(t \to +\infty) = E$ et $i(t \to +\infty) = 0$.

a) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_E(t)$ fournie par la source en fonction de E et de $u_C(t)$.

On pourra s'aider de la relation $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

. . . .

b) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_C(t)$ reçue par le condensateur en fonction de $u_C(t)$ et C.

. . . .

c) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_L(t)$ reçue par la bobine en fonction de $i(t)$ et L.

. . . .

En intégrant les expressions des puissances instantanées aux bornes de chaque dipôle, exprimer en fonction des grandeurs introduites :

d) L'énergie totale fournie par la source de tension . . . .

e) L'énergie totale fournie au condensateur . . . .

f) L'énergie totale fournie à la bobine . . . .

g) En exploitant les résultats précédents, exprimer l'énergie totale dissipée par effet Joule.

. . . .