Thème I. Ondes et signaux (Oscillateurs)

Chapitre n°6 Oscillateurs libres amortis

Suspension d'automobile : ensemble d'éléments qui assurent la liaison entre un véhicule et ses roues et qui permettent d'amortir les mouvements dus aux inégalités de la route. On peut repérer un ressort et un amortisseur.
Quand un véhicule monte sur un trottoir, il oscille verticalement sur sa suspension. Si celle-ci est usée ou mal ajustée, l'oscillation peut durer longtemps et/ou avoir une amplitude importante, ce qui est désagréable pour les passagers.
Sur quels facteurs faut-il agir pour que la suspension amortisse correctement les oscillations du véhicule ?
Ces amortisseurs assurent également une adhérence convenable du véhicule sur la route.

`https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/suspension.php`

Pré-requis

- Terminale : Thème Mouvement et interactions
  - Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point : définition et expression en coordonnées cartésiennes.
  - Deuxième loi de Newton.
- PCSI : Thème Ondes et signaux.
  - Chapitre n°3. Signaux électriques dans l'ARQS.
  - Chapitre n°4. Circuit linéaire du 1$^{\text{er}}$ ordre.
  - Chapitre n°5. Oscillateurs libres harmoniques.

Objectifs du chapitre

- Étudier deux oscillateurs libres amortis, correspondants aux systèmes étudiés au chapitre précédent pour lesquels on tient compte des phénomènes dissipatifs (frottements, résistance)
- Étudier les propriétés des oscillateurs selon les valeurs des paramètres de l'oscillateur.
- Outils mathématiques : résoudre les équations différentielles $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2y(t)=B$

Plan du cours

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – 🙂 – ☹ – Établir l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse accrochée à un ressort vertical. L'écrire sous forme canonique en identifiant les expressions du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0.

2 – 🙂 – ☹ – Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur dans le circuit RLC série alimenté (ou non) par un générateur idéal de fem E constante. L'écrire sous forme canonique en identifiant les expressions du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0.

3 – 🙂 – ☹ – Donner la forme canonique de l'équation différentielle qui régit l'évolution d'un oscillateur amorti.

4 – 🙂 – ☹ – Quel est le régime transitoire observé selon la valeur du facteur de qualité : pour quelle valeur de Q le régime transitoire est-il pseudo-périodique/apériodique/critique ?

5 – 🙂 – ☹ – La valeur finale atteinte une fois le régime transitoire terminé, c'est-à-dire une fois le régime permanent atteint, dépend-elle de la nature du régime transitoire ?

6 – 🙂 – ☹ – Déterminer les conditions initiales du circuit RLC série en réponse à un échelon de tension (condensateur initialement déchargé) ou en régime libre (condensateur chargé initialement).

7 – 🙂 – ☹ – Résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur amorti selon la valeur du facteur de qualité.

8 – 🙂 – ☹ – Quelle est l'ordre de grandeur de la durée de chacun des trois régimes transitoires en fonction de Q et ω_0 selon la nature du régime ?

9 – 🙂 – ☹ – Énoncer le théorème de l'énergie mécanique. Comment évolue l'énergie mécanique au cours du régime transitoire ?

10 – 🙂 – ☹ – Effectuer un bilan d'énergie du circuit RLC série lors de la réponse à un échelon de tension :

- a) Calculer l'énergie fournie par le générateur sur la durée du régime transitoire.
- b) Calculer l'énergie reçue, et stockée par le condensateur.
- c) Calculer l'énergie reçue par la bobine. Que peut-on en dire ?
- d) En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.

11 – 🙂 – ☹ – Effectuer un bilan d'énergie du circuit RLC série lors du régime libre :

- a) Calculer l'énergie initialement stockée par le condensateur, et perdue au cours du régime transitoire.
- b) Calculer l'énergie reçue par la bobine. Que peut-on en dire ?
- c) En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.

I Étude de l'oscillateur mécanique amorti

I.1 Cadre de l'étude

On s'intéresse au mouvement d'une masse m assimilée à un point M accrochée à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.
L'axe vertical descendant est noté (Oz), avec O situé au point d'attache du ressort.

On modélise les frottements visqueux, c'est-à-dire les frottements exercés par un fluide (gaz ou liquide) visqueux, par une force $\overrightarrow{f}$ proportionnelle à la vitesse et opposée au mouvement :

$$\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$$

- $\alpha > 0$ et dépend du fluide et de la forme du système.
- $\left\|\overrightarrow{f}\right\|$ est proportionnelle à $\left\|\overrightarrow{v}\right\|$.
- $\overrightarrow{f}$ est opposée au vecteur vitesse : elle s'oppose au mouvement.

I.2 Observations

<u>Capacité exigible</u> : Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.

Simulations de l'oscillateur mécanique amorti

`http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort.php`

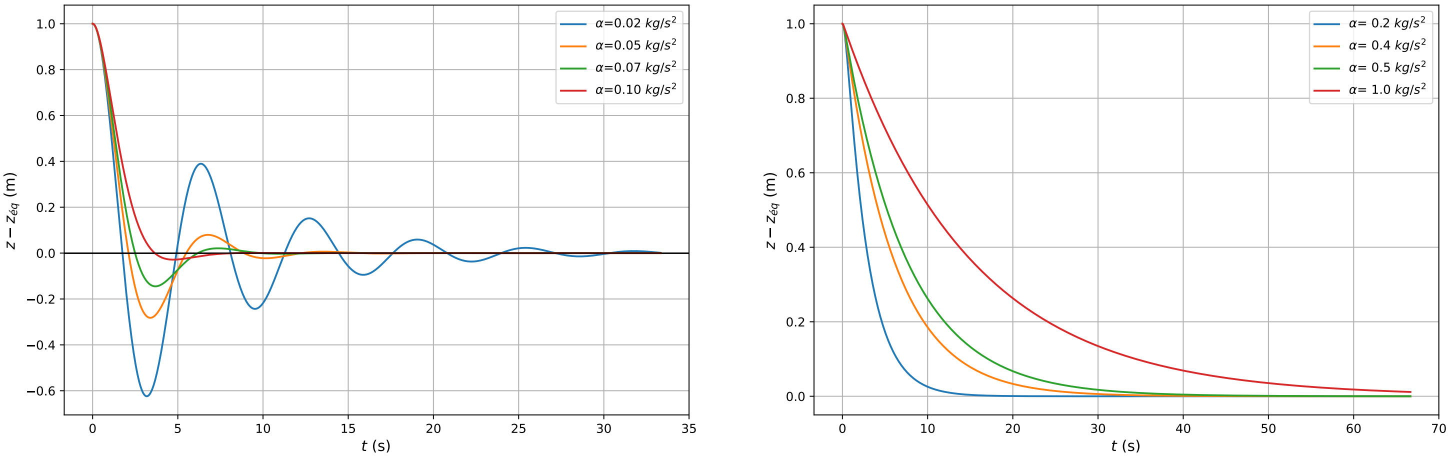


FIGURE 1 – Simulations d'évolutions de $z - z_{\text{éq}}$ pour différentes valeurs du coefficient de frottement (pour $m = 100$ g et $k = 0,225$ N · m^{-1})

R1. Comment peut-on décrire la nature du régime transitoire selon la valeur du coefficient de frottement ?

Solution:
Pour des coefficients de frottement « faibles », la masse $M(m)$ retourne à la position d'équilibre en oscillant. L'amplitude de ces oscillations diminue au cours de l'évolution.
On constate que pour des coefficients de frottement « élevés », la masse $M(m)$ retourne à la position d'équilibre sans oscillations.

R2. Comment évolue la durée du régime transitoire selon la valeur du coefficient de frottement ?

Solution:
Dans le cas des coefficients de frottement « faibles » , plus le coefficient de frottement est faible, plus le retour à l'équilibre est lent, c'est-à-dire plus la durée du régime transitoire est longue. Le cas limite est le cas de l'oscillateur harmonique pour lequel, en l'absence de frottement, le système oscille indéfiniment autour de la position d'équilibre.

Dans le cas des coefficients de frottement « élevés », plus le coefficient de frottement est élevé, plus le retour à l'équilibre est lent, c'est-à-dire plus la durée du régime transitoire est longue.

I.3 Équation différentielle du mouvement

Capacité exigible : **Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.**

Méthode : Comment établir l'équation différentielle du mouvement ?

1. Définir le système étudié.
2. Préciser le référentiel d'étude.
3. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le système étudié.
4. Faire un GRAND SCHÉMA COMPLET du dispositif étudié, sur lequel les forces seront représentées, ainsi que les axes cartésiens, l'origine des axes, . . .
5. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au système étudié et dans le référentiel choisi.
6. Projeter sur l'axe du mouvement.
7. En déduire l'équation différentielle de l'oscillateur amorti et la mettre sous la forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$$

et identifier les expressions de la **pulsation propre ω_0** [rad/s] et le **facteur de qualité Q** [sans unité].

REMARQUES

En SII, vous écrirez cette équation différentielle sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega_0\xi\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$$

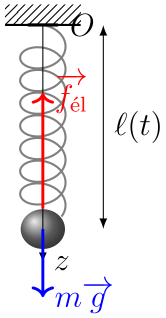
où ξ est le facteur d'amortissement [sans unité].

À maitriser : Établir l'équation du mouvement de l'oscillateur mécanique

R1. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre.

Solution: Commençons par la base !

- Système étudié : Masse m
- Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen sur la durée de l'expérience
- Bilan des actions mécaniques :
  - Poids $m\overrightarrow{g} = mg\overrightarrow{e_z}$
  - Force de rappel élastique : $\overrightarrow{f_{\text{élastique}}} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_z}$
  - Force de frottement fluide : $\overrightarrow{f_{\text{frott}}} = -h\overrightarrow{v} = -\alpha\dot{z}\overrightarrow{e_z}$



À l'équilibre $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et la somme des forces est nulle, donc $m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{\text{élastique}}} + \overrightarrow{f_{\text{frott}}} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left(mg - k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) - 0\right)\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$, ainsi $mg - k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} > \ell_0}$, avec ici $\ell_{\text{éq}} = z_{\text{éq}}$

R2. Établir l'équation différentielle vérifiée par z en fonction de m, ℓ_0, g et k.

Solution: Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la masse m dans le référentiel terrestre d'étude :
$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{\text{élastique}}} + \overrightarrow{f_{\text{frott}}}$
Le mouvement ayant uniquement lieu selon l'axe vertical (Oz) : $\overrightarrow{a} = \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$, ainsi : $m\ddot{z}\overrightarrow{e_z} = mg\overrightarrow{e_z} - k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_z} - \alpha\dot{z}\overrightarrow{e_z}$.
En factorisant par $\overrightarrow{e_z}$: $\left(m\ddot{z} - mg + k(\ell - \ell_0) + \alpha\dot{z}\right)\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow m\ddot{z} - mg + k(\ell - \ell_0) + \alpha\dot{z} = 0$
Or $\ell(t) = z(t) = z(t)$, ainsi $m\ddot{z} - mg - k\ell_0 + kz + \alpha\dot{z} = 0$, donc $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}\ell_0$, avec $g + \frac{k}{m}\ell_0 = \frac{k}{m}\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)$
Enfin : $\boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_{\text{éq}}}$

R3. La mettre sous forme canonique et identifier les expressions de ω_0 et Q.

Solution: Cette équation différentielle est de la forme $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$

On identifie la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

Et le facteur de qualité tel que $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$, soit $Q = \frac{m}{h}\sqrt{\frac{k}{m}}$, soit $\boxed{Q = \frac{\sqrt{mk}}{h}}$

R4. Justifier les unités de ω_0 et Q.

Solution: On peut le faire de deux façons :

- À partir de l'équation différentielle :
  $[\ddot{z}] = L.T^{-2}$, donc on en déduit que $[\omega_0^2 z] = L.T^{-2}$, donc $[\omega_0^2] = T^{-2}$, donc ω_0 est homogène à l'inverse d'un temps.
  De même $\left[\dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z}\right] = L.T^{-2}$, or $\omega_0 \dot{z} = T^{-1} \times L.T^{-1}$, donc $[Q] = 1$: Q n'a pas de dimension.
- À partir des expressions des constantes :
  En partant de $[m] = M$; $[k] = force/L = M.T^{-2}$; $[h] = force/(L.T^{-1}) = M.T^{-1}$
  Ainsi $\left[\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right] = \sqrt{\dfrac{M.T^{-2}}{M}} = T^{-1}$
  Et $\left[\dfrac{\sqrt{km}}{h}\right] = \dfrac{\sqrt{M.T^{-2} \times M}}{M.T^{-1}} = 1$

I.4 Résolution

__Capacité exigible__ : **Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.**

Méthode : Comment résoudre $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\textbf{éq}}$?

1. **Résolution de l'équation homogène sans second membre** : $\dfrac{\mathrm{d}^2 z_H}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}z_H}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z_H = 0$ (EH)
   a) Écrire le polynôme caractéristique (PC) : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$
   b) Calculer le discriminant de (PC) : $\Delta = 4\omega_0^2 \left(\dfrac{1}{4Q^2} - 1\right)$
   c) Étudier le signe de Δ, selon les valeurs numériques fournies.
   d) En déduire les racines r du polynôme caractéristique (PC).
      - Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \dfrac{1}{2}$, les racines sont complexes conjuguées : $r = -\underbrace{\dfrac{\omega_0}{2Q}}_{=\frac{1}{\tau}} \pm j\, \underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}_{=\Omega}$
      - Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \dfrac{1}{2}$, les racines sont réelles : $r = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$
      - Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \dfrac{1}{2}$, la racine est double : $r = -\omega_0$
   e) Écrire les solutions générales $z_H(t)$ de l'équation homogène (EH), en introduisant deux constantes d'intégration A et B :
      - Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \dfrac{1}{2}$, alors $z_H(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big)$
      - Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \dfrac{1}{2}$, alors $z_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
      - Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \dfrac{1}{2}$, alors $z_H(t) = (At + B)\exp(rt)$

2. **Déterminer la solution particulière z_P recherchée sous la même forme que le second membre**, c'est-à-dire sous la forme d'une constante dans ce chapitre : injecter z_P constante dans l'équation différentielle (E), et conclure sur z_P.
3. La **solution générale** est la **somme de la solution homogène et de la solution particulière** :
$$z(t) = z_H(t) + z_P$$
4. Déterminer les **constantes d'intégration** à l'aide des deux conditions initiales : position initiale $z(0)$ et vitesse initiale $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0)$.

À maitriser : Résolution de l'équation différentielle

Suivre la méthode précédente (1.a), 1.b), 1.c)) et relier le signe de Δ à la valeur du facteur de qualité.

Solution: La résolution d'une telle équation différentielle passe par la détermination de la solution générale de l'équation homogène, puis par la recherche d'une solution particulière.
Équation homogène (sans second membre) : $\ddot{z}_H + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z}_H + \omega_0^2 z_H = 0$.

- Équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$
- Discriminant : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$
- Il faut distinguer trois cas selon le signe de Δ :
  - Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4Q^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4Q^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} > Q^2 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$, alors l'EC possède deux racines réelles : $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$
  - Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$, alors l'EC possède une racine double : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ (puisque $Q = 1/2$).
  - Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$, alors l'EC possède deux racines complexes conjuguées : $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}j\sqrt{-\Delta} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

I.4.a) $Q > \frac{1}{2}$: Régime pseudo-périodique

À maitriser : Résolution de l'équation différentielle

On se place dans le cas où le facteur de qualité est supérieur à 1/2.

R1. En suivant scrupuleusement la suite de la méthode, déterminer la solution générale $z(t)$ et la mettre sous la forme $z(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) + z_{\text{éq}}$.
Identifier les expressions de τ et Ω en fonction de Q et ω_0. Quelles sont les dimensions de ces deux grandeurs ? À quoi correspondent-elles ?

Solution:

- **Étape 1.c)**

  On se place dans le cas $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$, alors l'EC possède deux racines complexes conjuguées :

  $$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2} j\sqrt{-\Delta} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

- **Étape 1.d)**

  La solution générale de l'EH s'écrit : $z_H(t) = \exp\left(\Re(r)t\right)\Big(A\cos(\Im(r)t) + B\sin(\Im(r)t)\Big)$, avec $\Re(r) = -\frac{\omega_0}{2Q}$ et $\Im(r) = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

  Soit : $z_H(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right) + B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right)$

  - $\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$ est homogène à une pulsation.

    On pose $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$, la **pseudo-pulsation**.

  - $\frac{\omega_0}{2Q}$ est homogène à l'inverse d'un temps, on introduit le **temps caractéristique** $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$

  On réécrit z_H : $\boxed{z_H(t) = e^{-t/\tau}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big)}$

- **Étape 3**

  On obtient la solution générale de l'équation différentielle (E) :

  $\boxed{z(t) = e^{-t/\tau}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big) + z_{\text{éq}}}$.

R2. Déterminer les constantes d'intégration si initialement la masse est écartée d'une distance a depuis la position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale.

Solution: Étape 4

L'équation différentielle est du 2$^{\text{e}}$ ordre, donc sa solution fait intervenir deux constantes d'intégration, ce qui nécessite deux conditions initiales pour les déterminer : c'est la position initiale $z(0)$ et la vitesse initiale $\dot{z}(0)$.

- Position initiale : $z(0) = z_{\text{éq}} + a$

  Or d'après l'expression de z : $z(0) = A + z_{\text{éq}}$

  En égalisant : $A = a$

- Vitesse initiale : $\dot{z}(0) = 0$

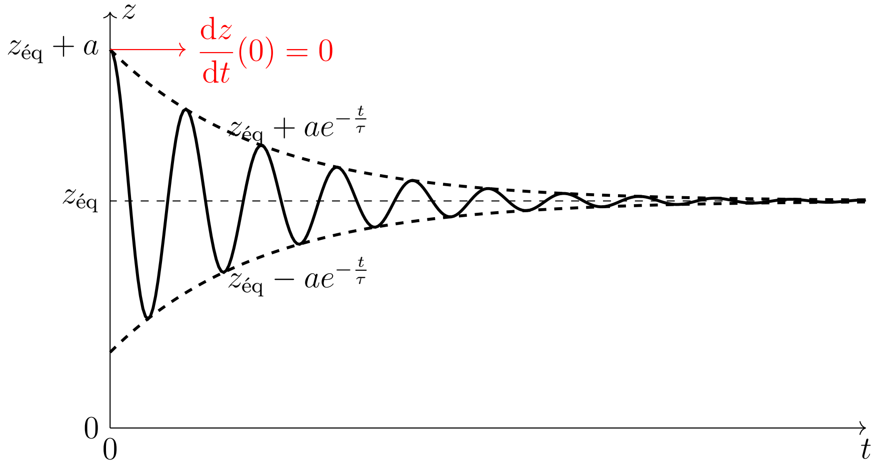
  Vitesse : $\dot{z} = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big) - A\omega\sin(\Omega t) + B\omega\cos(\Omega t)\right)$

  Donc à $t = 0$: $\dot{z}(0) = -\frac{1}{\tau}A + B\Omega$, or $\dot{z}(0) = 0$, d'où : $B = \frac{A}{\Omega\tau} = \frac{a}{\Omega\tau}$

Ainsi : $\boxed{z(t) = a\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(\cos(\Omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\Omega}\sin(\Omega t)\right) + z_{\text{éq}}}$

R3. Représenter l'évolution de $z(t)$.

Solution:



R4. Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire pseudo-périodique en fonction de ω_0 et Q ?

Solution:
L'expression de $z(t) - z_{\text{éq}}$ est le produit d'une fonction sinusoïdale de pulsation Ω et d'une fonction exponentielle décroissante $e^{-\frac{t}{\tau}}$, qui décroit sur une durée caractéristique de τ (cf circuit du 1^{er} ordre).

Le régime transitoire a donc une durée caractéristique de l'ordre de grandeur de quelques $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$: le régime transitoire pseudo-périodique est d'autant plus long que le facteur de qualité Q est élevé, et donc que les frottements sont faibles.

R5. Quelle forme prend la solution lorsque $Q \to +\infty$? Quelle est alors la durée du régime transitoire ?

Solution:
Pour $Q \ll 1$ ($Q > 3 - 4$), dans le cas des conditions initiales précédentes :

$$\begin{aligned} z(t) &\approx a \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_0}{2Q\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right) + z_{\text{éq}} \\ &\approx a \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2Q}\sin(\omega_0 t)\right) + z_{\text{éq}} \\ &\approx a \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\cos(\omega_0 t) + z_{\text{éq}} \end{aligned}$$

Si $Q \to \infty$, alors $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \to 1$, et on retrouve la situation de l'oscillateur harmonique (absence de frottement) : $z(t) \approx a\cos(\omega_0 t) + z_{\text{éq}}$

Le régime pseudo-périodique est d'une durée de l'ordre de $\boxed{\dfrac{Q}{\omega_0}}$.

La **durée du régime pseudo-périodique augmente lorsque le facteur de qualité augmente**, c'est-à-dire lorsque les frottements diminuent.

Le facteur de qualité est de l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations avant le régime permanent.

I.4.b) $Q < \dfrac{1}{2}$: Régime apériodique

On se place dans le cas où le facteur de qualité est inférieur à 1/2.

À maitriser : Résolution de l'équation différentielle

R1. Résoudre complètement l'équation différentielle si initialement la masse est écartée d'une distance a de la position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale.

Solution:

- **Étape 1.c)**

  On se place dans le cas $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \dfrac{1}{2}$, alors l'EC possède deux racines réelles :
  $$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

- **Étape 1.d)**

  La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :
  $$z_H(t) = A\exp\left(\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)t\right) + B\exp\left(\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)t\right)$$

- **Étape 3**

  La solution générale de l'équation différentielle s'écrit donc
  $$z(t) = A\exp\left(\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)t\right) + B\exp\left(\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)t\right) + z_{\text{éq}}$$
  A et B se déterminent à l'aide des conditions initiales $z(0)$ et $\dot{z}(0)$.

- **Étape 4**

  D'après l'expression de $z(t)$: $z(0) = A + B + z_{\text{éq}}$, or $z(0) = z_{\text{éq}} + a$, donc $A + B = a$

  On dérive : $\dot{z}(t) = Ar_1e^{r_1t} + Br_2e^{r_2t}$, or $\dot{z}(0) = 0$, soit $Ar_1 + Br_2 = 0$

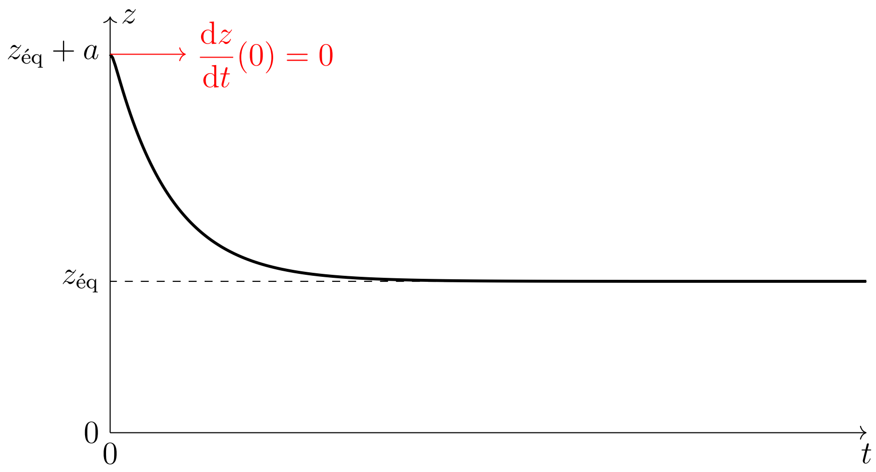
  En résolvant le système à deux inconnues précédent : $A = a\dfrac{r_2}{r_2 - r_1}$ et $B = a\dfrac{r_1}{r_1 - r_2}$

  La solution de l'équation différentielle s'écrit : $\boxed{z(t) = z_{\text{éq}} + \dfrac{a}{r_2 - r_1}\left(r_2 \times e^{r_1t} - r_1 \times e^{r_2t}\right)}$

  Au bout d'un temps long : $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = z_{\text{éq}}$, en effet $-\dfrac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1} < 0$ et $-\dfrac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$ également puisque $\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1} < \dfrac{1}{2Q}$.

R2. Représenter l'évolution $z(t)$.

Solution:



Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire apériodique ?
Les deux racines

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1} \\ &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2} \\ &= \frac{\omega_0}{2Q}\Big(-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\Big) \end{aligned}$$

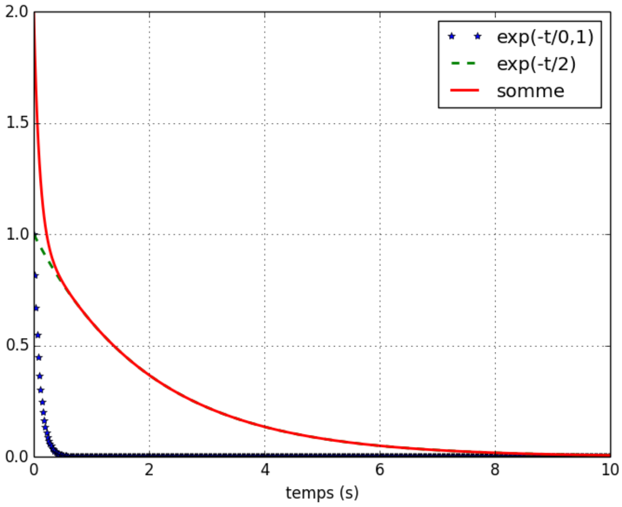
sont négatives.
On introduit les deux constantes de temps caractéristiques :

$$\tau_1 = \frac{1}{-r_1} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2Q}\left(1+\sqrt{1-4Q^2}\right)} \text{ et } \tau_2 = \frac{1}{-r_2} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2Q}\left(1-\sqrt{1-4Q^2}\right)} > \tau_1$$

La solution s'écrit sous la forme :

$$z(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}} + z_{\text{éq}}$$

L'exponentielle $e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ décroit plus rapidement (sur un temps plus court) que $e^{-\frac{t}{\tau_2}}$.
L'exponentielle qui décroit le plus lentement et qui impose donc la durée du régime transitoire est $e^{-\frac{t}{\tau_2}}$.
Pour déterminer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire apériodique, il est donc nécessaire de déterminer l'ordre de grandeur de τ_2.



On se place dans le cas $Q \ll 1$ (en pratique $Q < 0,1$ est une condition suffisamment contraignante) et on utilise l'approximation (pour $x \ll 1$) : $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$.

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{1}{\frac{\omega_0}{2Q}\left(1-\sqrt{1-4Q^2}\right)} \\ &\approx \frac{1}{\frac{\omega_0}{2Q}\left(1-\left(1-\frac{4Q^2}{2}\right)\right)} \\ &\approx \frac{2Q}{\omega_0 \times 2Q^2} \\ &\approx \frac{1}{Q\omega_0} \end{aligned}$$

Le régime apériodique est d'une durée de l'ordre de $\boxed{\frac{1}{Q\omega_0}}$.

La **durée du régime apériodique diminue lorsque le facteur de qualité augmente** (tout en restant inférieur à $1/2$), c'est-à-dire lorsque les frottements diminuent.

L'influence du facteur de qualité sur la durée du régime transitoire apériodique ($\tau_{\text{aper}} \propto 1/Q$) est inverse de celle sur la durée du régime pseudo-périodique ($\tau_{\text{pseudo-per}} \propto Q$).

I.4.c) $Q = \frac{1}{2}$: Régime critique

On se place dans le cas où le facteur de qualité est égal à $1/2$.

À maitriser : Résolution de l'équation différentielle

R1. Résoudre complètement l'équation différentielle si initialement la masse est écartée d'une distance a de la position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale.

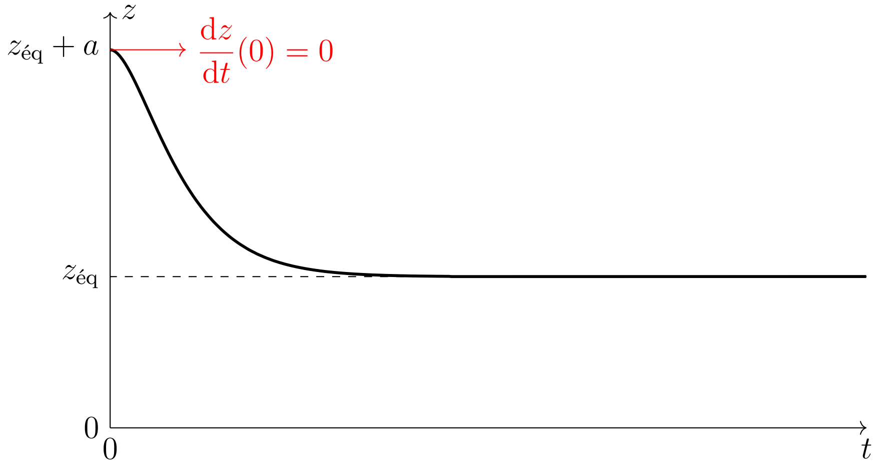
Solution:

- **Étape 1.c)**
  Lorsque le discriminant est nul, l'équation caractéristique possède une racine double : $r = -\frac{\omega_0}{2Q}$,
  or $Q = \frac{1}{2}$, d'où $r = -\omega_0$
- **Étape 1.d)**
  La solution de l'équation homogène s'écrit alors : $z_H(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$
- **Étape 2.**
  La solution particulière se recherche comme pour le régime pseudo-périodique, donc $z_P = z_{\text{éq}}$
- **Étape 3.**
  La solution générale s'écrit $z(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} + z_{\text{éq}}$
- **Étape 4**
  Les deux constantes d'intégration se déterminent à l'aide des conditions initiales $z(0)$ et $\dot{z}(0)$.
  $z(0) = B + z_{\text{éq}}$, or $z(0) = a + z_{\text{éq}}$, soit $B = a$
  Vitesse : $\dot{z} = e^{-\omega_0 t}\big(A - \omega_0(At + B)\big)$
  À $t = 0$: $\dot{z}(0) = 0 = A - B\omega_0$, soit $A = a\omega_0$

Ainsi $\boxed{z(t) = ae^{-\omega_0 t}(1 + \omega_0 t) + z_{\text{éq}}}$

R2. Représenter l'évolution $z(t)$.

Solution:



R3. Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire en fonction de ω_0 ?

Solution: On retrouve ici une fonction faisant intervenir une exponentielle décroissante, qui décroit donc sur une échelle de durée de $1/\omega_0$.

I.5 Aspect énergétique

Capacités exigibles : **Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.**

À maitriser : considérations énergétiques

L'équation différentielle du mouvement peut être établie à l'aide de considérations énergétiques.
Le **théorème de la puissance mécanique (TPM)** (cf chapitre 12) énonce que la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la somme des puissances des forces non conservatives, soit ici :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}\left(\overrightarrow{f_{\text{frott}}}\right)$$

avec $\mathscr{P}\left(\overrightarrow{f_{\text{frott}}}\right)$ la puissance de la force de frottement fluide définie par : $\mathscr{P}\left(\overrightarrow{f_{\text{frott}}}\right) = \overrightarrow{f_{\text{frott}}} \cdot \overrightarrow{v}$.

R1. Exprimer la puissance de la force de frottement en fonction de la norme du vecteur vitesse. Quel est son signe ? En déduire comment évolue l'énergie mécanique au cours du temps en utilisant le TPM.

> **Solution:** $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} = -\alpha\dot{z}^2 < 0$, donc $\mathscr{E}_m$ diminue au cours du temps, ce qui est cohérent avec la prise en compte des frottements.

R2. Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de k, m, ℓ_0, g, z, $\dot{z}$.

> **Solution:** L'énergie mécanique du système est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles de pesanteur et élastique : $\boxed{\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_{pp} + \mathscr{E}_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cste}}$

R3. Établir l'équation différentielle du mouvement par application du TPM.

> **Solution:** Appliquons la loi de la puissance mécanique :
> $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} = m\ddot{z}\dot{z} - mg\dot{z} + k\dot{z}(z - \ell_0)$
> $\mathscr{P}\left(\overrightarrow{f_{\text{frott}}}\right) = -\alpha\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = -\alpha\dot{z}^2$
> Ainsi : $m\ddot{z}\dot{z} - mg\dot{z} + k\dot{z}(z - \ell_0) = -\alpha\dot{z}^2 \Leftrightarrow \dot{z}\left(m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz - mg - k\ell_0\right) = 0$, ce qui nous donne, $\dot{z} = 0$ (cas peu intéressant) ou $m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz - mg - k\ell_0 = 0$, ce qui nous donne l'équation différentielle du mouvement.

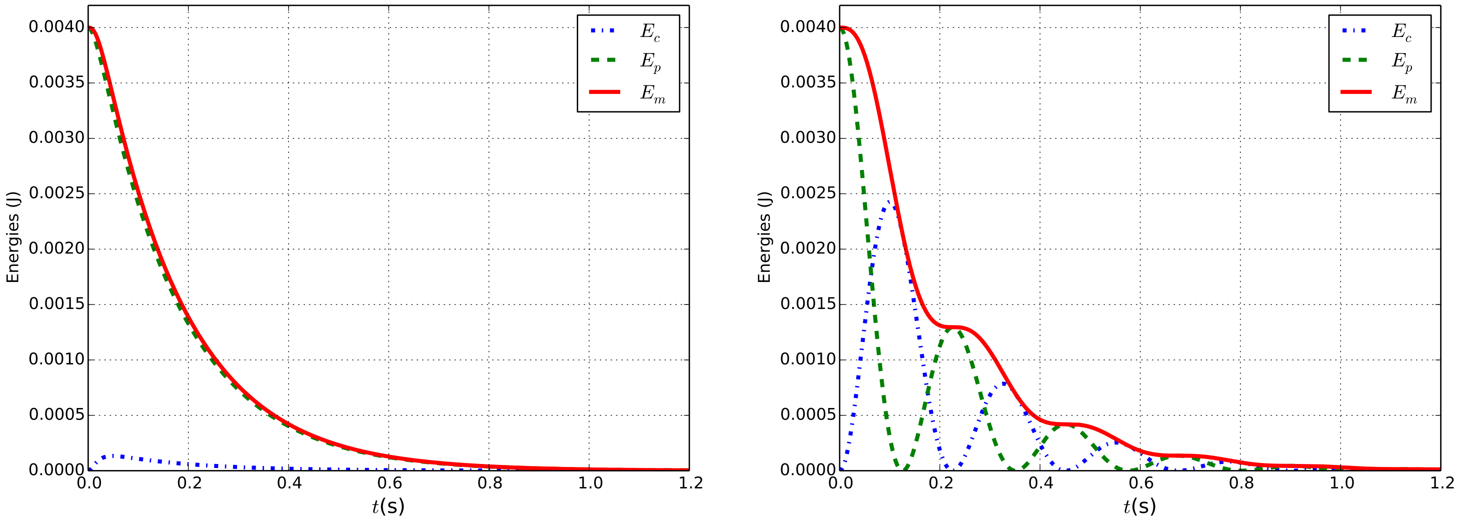


FIGURE 2 – Évolutions des énergies en fonction du temps.
À gauche : régime transitoire apériodique. À droite : régime transitoire pseudo-périodique

II Étude du circuit RLC série

II.1 Méthodes d'étude des oscillateurs électriques amortis

Capacité exigible : **Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.**

Méthode : Comment établir l'équation différentielle d'un oscillateur électrique ?

On souhaite établir l'équation différentielle vérifiée par une grandeur électrique s (u_c, i, q, ...) :

1. Représenter le circuit électrique étudié, en nommant et fléchant SUR le circuit toutes les tensions et intensités.
2. Lister les grandeurs électriques (tension, intensité) inconnues (qui ont du être représentées sur le circuit précédemment).
3. Écrire toutes les relations indépendantes possibles :
   - lois des mailles indépendantes (attention aux redondances) ;
   - lois des nœuds (attention aux redondances) ;
   - relations entre intensité et tension pour tous les dipôles.
4. Combiner ces relations entre elles pour ne conserver que la grandeur qui nous intéresse.
5. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)$$

   et identifier les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q en fonction des résistances, inductances et capacités présentes dans le circuit.

Capacité exigible : **Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine.**

Méthode : Comment déterminer les conditions initiales ?

On a obtenu une équation différentielle du 2^e^ ordre vérifiée par s (tension, intensité, charge, ...), pour la résoudre, il faut déterminer les deux conditions initiales $s(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$:

1. Déterminer les valeurs des intensités et tensions AVANT la fermeture de l'interrupteur.
2. Utiliser la continuité de la charge du condensateur (ou de la tension aux bornes du condensateur) et de l'intensité du courant à travers une bobine, pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).
3. Les autres grandeurs électriques à $t = 0^+$ se déterminent en appliquant les relations intensité/tension à $t = 0^+$ et les lois des mailles et des nœuds à $t = 0^+$. En déduire les valeurs de $s(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

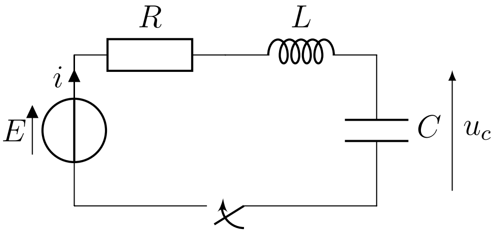
Attention – Erreur à ne pas commettre

La notation $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$ signifie qu'on évalue la dérivée de s par rapport au temps en 0^+ : on commence par exprimer la dérivée $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, puis on l'évalue en 0^+.

Attention, la connaissance de la valeur prise par s en 0^+ ne donne aucune information sur la valeur de $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$: $\xcancel{s(0^+) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0}$.

II.2 Étude de la réponse à un échelon de tension

II.2.a) Position du problème



On s'intéresse ici à la réponse d'un circuit constitué d'une résistance, d'une bobine idéale et d'un condensateur en série, soumis à un **échelon de tension** :
Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert et le condensateur est déchargé.
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le générateur idéal de fem E, en série, avec le RLC.
Pour $t > 0$, on étudie la réponse du système à cet échelon de tension et en particulier la charge du condensateur.

II.2.b) Observations

<u>Capacité exigible</u> : Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.

Observations expérimentales du circuit RLC série

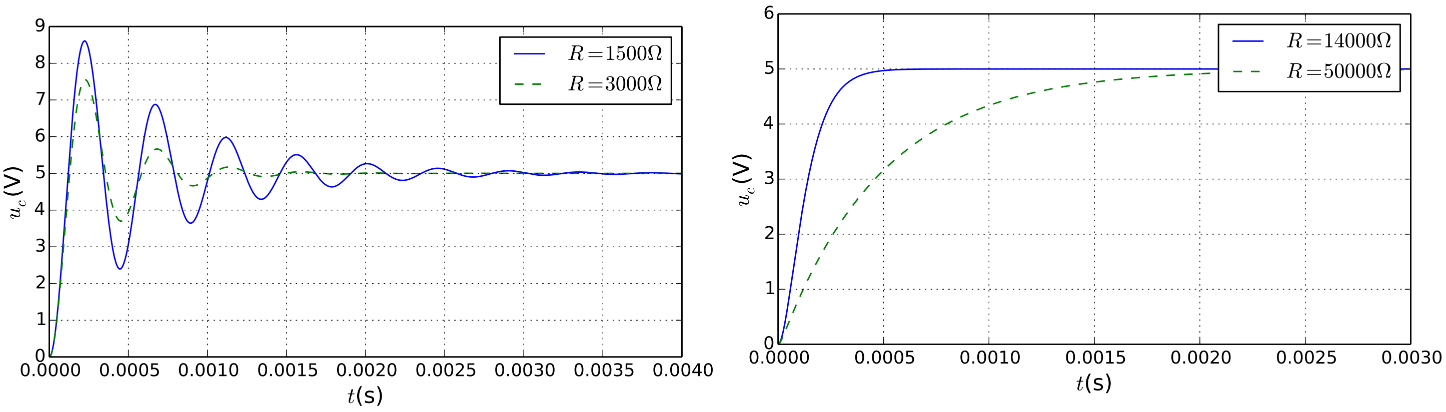


FIGURE 3 – Simulations d'évolutions de la tension aux bornes du condensateur, pour différentes valeurs de résistance, avec $C = 10$ nF et $L = 0,5$ H.

R1. Comment peut-on décrire la nature du régime transitoire selon la valeur de la résistance ?

> **Solution:** On peut faire les mêmes conclusions que précédemment, en faisant l'analogie entre le coefficient de frottement et la résistance.
>
> On constate que pour des résistances « faibles », la tension aux bornes du condensateur tend vers sa valeur en régime permanent en oscillant. L'amplitude de ces oscillations diminue au cours de l'évolution.
>
> On constate que pour des résistances « élevées », la tension aux bornes du condensateur tend vers sa valeur en régime permanent sans oscillations.

R2. Comment évolue la durée du régime transitoire selon la valeur de la résistance ?

Solution: On peut faire les mêmes conclusions que précédemment, en faisant l'analogie entre le coefficient de frottement et la résistance.

Dans le cas des résistances « faibles » , plus la résistance est faible, plus les oscillations sont nombreuses, et plus le régime transitoire est long avant d'atteindre le régime permanent. Le cas limite est le cas de l'oscillateur harmonique LC pour lequel, en l'absence de résistance, le système oscille indéfiniment autour de la valeur en régime permanent.

Dans le cas des résistances « élevées », plus la résistance est élevée, plus le régime transitoire est long.

II.2.c) Résolution

À maitriser : Étude du circuit RLC série en réponse à un échelon de tension

R1. **État final**

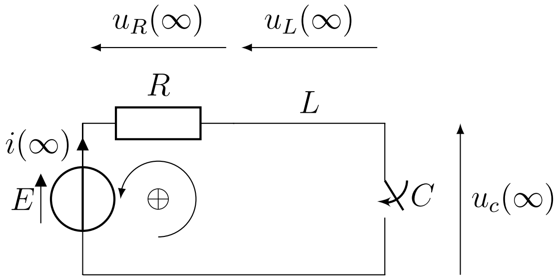
Déterminer, par une étude du circuit en régime permanent, $u_c(\infty)$ et $i(\infty)$ à la fin du régime transitoire (cf méthode vue au chapitre 4).

Solution:

Une fois le régime permanent atteint, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

On déduit immédiatement de ces comportements : $i(\infty) = 0\,;\ u_R(\infty) = 0\,;\ u_L(\infty) = 0$

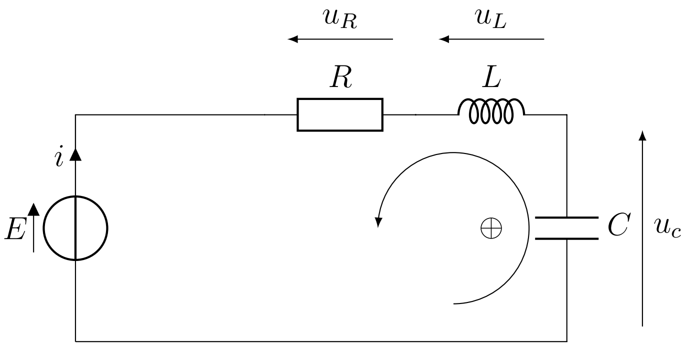
La loi des mailles donne $u_c(\infty) = E$



R2. **Équations différentielles**

(a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.

Solution: On étudie la réponse à un échelon de tension :



On applique la loi des mailles : $u_c + u_L + u_R - E = 0$

- Pour établir l'équation différentielle vérifiée par u_c, il faut tout exprimer en fonction de u_c :
  - Intensité du courant à travers le condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$
  - Tension aux bornes de la bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, d'où : $u_L = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2}$
  - Tension aux bornes de R : $u_R = Ri = RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$

  Ainsi $u_c + LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = E \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{LC} = \dfrac{E}{LC}}$, que l'on écrit sous forme canonique

  $$\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2u_c = \omega_0^2E$$

Solution:

- Pour établir l'équation différentielle vérifiée par i, il faut tout exprimer en fonction de i :
  - Intensité du courant à travers le condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$
  - Tension aux bornes de la bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$,
  - Tension aux bornes de R : $u_R = Ri$

  D'où : $u_c + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E$.
  Pour exprimer u_c en fonction de i, il est nécessaire de dériver par rapport au temps l'équation précédente : $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, avec $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i}{C}$, d'où $\dfrac{i}{C} + L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$
- Pour établir l'équation différentielle vérifiée par u_L, il faut tout exprimer en fonction de u_L :
  - Intensité du courant à travers le condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$
  - Tension aux bornes de la bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$,
  - Tension aux bornes de R : $u_R = Ri$

  Il faut dériver la loi des mailles deux fois : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}^2 Ri}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}^2 u_L}{\mathrm{d}t^2} = 0$
  avec $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{1}{C}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u_L}{LC}$
  $R\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$
  Ainsi $\dfrac{u_L}{LC} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}^2 u_L}{\mathrm{d}t^2} = 0$

(b) Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier les expressions de la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.

Solution:

Prenons le cas de la charge du condensateur, on a obtenu $\dfrac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{q}{LC} = \dfrac{E}{L}$

Que l'on peut écrire sous forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = \dfrac{E}{L}$

On identifie : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L} \Leftrightarrow \boxed{Q = \dfrac{L}{R}\omega_0 = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

R3. Conditions initiales

Déterminer les valeurs de $u_c(0^+)$, $i(0^+)$, $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$, $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+)$, $u_L(0^+)$, $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

Solution:
Le condensateur est initialement déchargé avant la fermeture de l'interrupteur, donc $u_c(0^-) = 0$, donc $q(0^-) = 0$.
Avant la fermeture de l'interrupteur, l'intensité du courant est nulle, $i(0^-) = 0$, donc $u_R(0^-) = 0$ et $u_L(0^-) = 0$.
La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-)$, d'où $u_c(0^+) = 0$
L'intensité du courant à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i(0^+) = i(0^-)$, d'où $i(0^+) = 0$

- Pour $u_c(t)$, on aura besoin de $u_c(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+)$
  D'après la relation du condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = 0$
- Pour $i(t)$, on aura besoin de $i(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$
  La loi des mailles à $t = 0^+$ donne $E = u_c(0^+) + u_R(0^+) + u_L(0^+)$, soit $u_L(0^+) = E$
  Or d'après la relation de la bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{u_L(0^+)}{L} = \dfrac{E}{L}$
- Pour $u_L(t)$, on aura besoin de $u_L(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+)$
  La loi des mailles à $t = 0^+$ donne $E = u_c(0^+) + u_R(0^+) + u_L(0^+)$, soit $u_L(0^+) = E$
  Pour déterminer la dérivée de u_L, il est nécessaire de dériver la loi des mailles (écrite en t quelconque) : $0 = \dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$
  Soit $0 = \dfrac{i}{C} + \dfrac{R}{L}u_L + \dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$
  Que l'on évalue à $t = 0^+$: $0 = \dfrac{i(0^+)}{C} + \dfrac{R}{L}u_L(0^+) + \dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+)$, soit $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\dfrac{R}{L}E$

R4. **Résolution**
Elle se fait avec exactement la même méthode que celle mise en œuvre pour l'oscillateur mécanique.

R5. **Aspect énergétique**
(a) Exprimer l'énergie reçue par le condensateur sur la durée du régime transitoire.
(b) Exprimer l'énergie fournie par le générateur sur la durée du régime transitoire.
(c) Exprimer l'énergie reçue par la bobine sur la durée du régime transitoire.
(d) Conclure.

II.3 Étude du régime libre

On étudie le régime libre du circuit RLC série : le condensateur a été préalablement chargé sous la tension U_0 (pour $t < 0$).

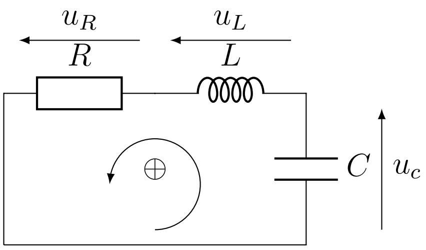
À $t = 0$ on connecte le condensateur en série avec une résistance et une bobine supposée idéale (autrement dit, on ferme l'interrupteur), et on étudie l'évolution des grandeurs électriques du circuit pour $t > 0$.

À maitriser : Étude du circuit RLC série en régime libre

R1. **Équations différentielles**
Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant électrique, et l'écrire sous forme canonique.

Solution: Calculs strictement identiques au cas de la réponse à un échelon de tension « en enlevant le E ».

On obtient des équations différentielles strictement identiques, mais sans 2^e membre.



On applique la loi des mailles : $u_c + u_L + u_R - 0 = 0$

- Pour établir l'équation différentielle vérifiée par u_c, il faut tout exprimer en fonction de u_c :
  - Intensité du courant à travers le condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$
  - Tension aux bornes de la bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, d'où : $u_L = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2}$
  - Tension aux bornes de R : $u_R = Ri = RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$

  Ainsi $u_c + LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = E \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{LC} = 0}$, que l'on écrit sous forme canonique

  $$\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_c = 0$$

Solution:

- Pour établir l'équation différentielle vérifiée par i, il faut tout exprimer en fonction de i :
  - Intensité du courant à travers le condensateur : $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$
  - Tension aux bornes de la bobine : $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$,
  - Tension aux bornes de R : $u_R = Ri$

  D'où : $u_c + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0$.

  Pour exprimer u_c en fonction de i, il est nécessaire de dériver par rapport au temps l'équation précédente : $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, avec $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C}$, d'où $\frac{i}{C} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$
- Pour établir l'équation différentielle vérifiée par u_L, il faut tout exprimer en fonction de u_L :
  - Intensité du courant à travers le condensateur : $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$
  - Tension aux bornes de la bobine : $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$,
  - Tension aux bornes de R : $u_R = Ri$

  Il faut dériver la loi des mailles deux fois : $\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2 Ri}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2 u_L}{\mathrm{d}t^2} = 0$

  avec $\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u_L}{LC}$

  $R\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$

  Ainsi $\frac{u_L}{LC} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2 u_L}{\mathrm{d}t^2} = 0$

Prenons le cas de la charge du condensateur, on a obtenu $\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{LC} = 0$

Que l'on peut écrire sous forme canonique : $\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = 0$

On identifie : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{L}{R}\omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

R2. **Conditions initiales**

Déterminer les valeurs de $u_c(0^+)$, $i(0^+)$, $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$, $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+)$, $u_L(0^+)$, $\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

Solution:

Pour $t < 0$: $u_c = U_0$; $q = CU_0$; $i = 0$; $u_R = 0$; $u_L = 0$

La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-)$, d'où $u_c(0^+) = U_0$

L'intensité du courant à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i(0^+) = i(0^-)$, d'où $i(0^+) = 0$

- Pour $u_c(t)$, on aura besoin de $u_c(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+)$

  D'après la relation du condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = 0$

- Pour $i(t)$, on aura besoin de $i(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$

  La loi des mailles à $t = 0^+$ donne $0 = u_c(0^+) + u_R(0^+) + u_L(0^+)$, soit $u_L(0^+) = -U_0$

  Or d'après la relation de la bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{u_L(0^+)}{L} = -\dfrac{U_0}{L}$

- Pour $u_L(t)$, on aura besoin de $u_L(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+)$

  La loi des mailles à $t = 0^+$ donne $0 = u_c(0^+) + u_R(0^+) + u_L(0^+)$, soit $u_L(0^+) = -U_0$

  Pour déterminer la dérivée de u_L, il est nécessaire de dériver la loi des mailles (écrite en t quelconque) : $0 = \dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$

  Soit $0 = \dfrac{i}{C} + \dfrac{R}{L}u_L + \dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$

  Que l'on évalue à $t = 0^+$: $0 = \dfrac{i(0^+)}{C} + \dfrac{R}{L}u_L(0^+) + \dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+)$, soit $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{R}{L}U_0$

R3. **Résolution**

Elle se fait avec exactement la même méthode que celle mise en œuvre pour l'oscillateur mécanique.

R4. **Aspect énergétique**

(a) Exprimer l'énergie fournie par le condensateur sur la durée du régime transitoire.
(b) Exprimer l'énergie reçue par la bobine sur la durée du régime transitoire.
(c) Conclure.

III Bilan

Capacité exigible : Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.

	Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique RLC série
	position $z(t)$	Charge du condensateur $q(t)$
	vitesse $\dot{z}(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$	Intensité du courant $i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$
Équation différentielle	$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = kz_{\text{éq}}$	$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = \frac{q(\infty)}{C}$
	Coefficient de frottement α	Résistance R
	Constante de raideur du ressort k	$1/C$
	Masse m	Inductance L
Facteur de qualité	$Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

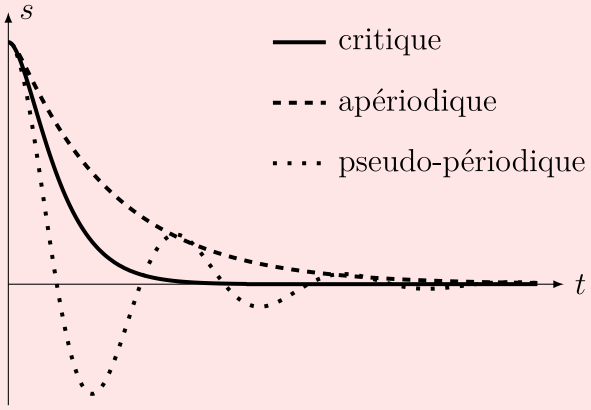
♥Bilan

- Un **oscillateur amorti** (mécanique ou électrique) en régime libre, ou en réponse à un échelon, est caractérisé par une grandeur s (position, intensité, tension, ...) qui vérifie l'**équation différentielle** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)}$$

  - la **pulsation propre** ω_0 (en rad/s), c'est la pulsation des oscillations en l'absence d'amortissement ;
  - le **facteur de qualité** Q (sans unité), **nombre positif** ;
  - et $s(\infty)$ la valeur finale atteinte par s à la fin du régime transitoire (après quelques τ).

- **Différents régimes transitoires** :



	Δ	Q	τ
Régime apériodique	$\Delta > 0$	$Q < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\omega_0 Q}$
Régime critique	$\Delta = 0$	$Q = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\omega_0}$
Régime pseudo-périodique	$\Delta < 0$	$Q > \frac{1}{2}$	$\frac{2Q}{\omega_0}$

- **Durée du régime transitoire :**

$\tau \searrow$ — $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ — $\tau \nearrow$ — Q

La durée du régime transitoire apériodique diminue si le facteur de qualité augmente. — $Q = \frac{1}{2}$ — La durée du régime transitoire pseudo-périodique augmente si le facteur de qualité augmente.

  - À ω_0 fixé, le régime transitoire le plus rapide est le régime critique.
  - Pour un système très faiblement amorti tel que $Q \gg 1$, de nombreuses oscillations sont visibles et la durée du régime transitoire est très élevée, et $\Omega \approx \omega_0$.

IV Article de Pour la Science sur les amortisseurs de voiture

LES AUTEURS

JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

ROULER SANS ÊTRE SECOUÉ

Assurer une bonne tenue de route et le confort des passagers: tel est le rôle des suspensions et amortisseurs dans une voiture. Des suspensions dont les fréquences d'oscillation doivent éviter celles qui sont propres au corps humain.

Les roues des véhicules sont équipées d'une suspension (un ressort) et d'un amortisseur, afin d'atténuer les effets des irrégularités de la chaussée.

© Dessins de Bruno Vacaro

Les routes ne sont pas parfaitement planes. Lorsque les revêtements sont dégradés, les creux et bosses de la chaussée provoquent un mouvement vertical des roues, qui se transmet à la caisse du véhicule et aux passagers. Les conséquences sont multiples: risque de perte de contact entre la roue et le sol, donc d'une mauvaise tenue de route, usure de la structure et des équipements, inconfort des passagers. Pour éviter ces désagréments, la suspension du véhicule joue un rôle essentiel. Mais comment choisir ses caractéristiques?

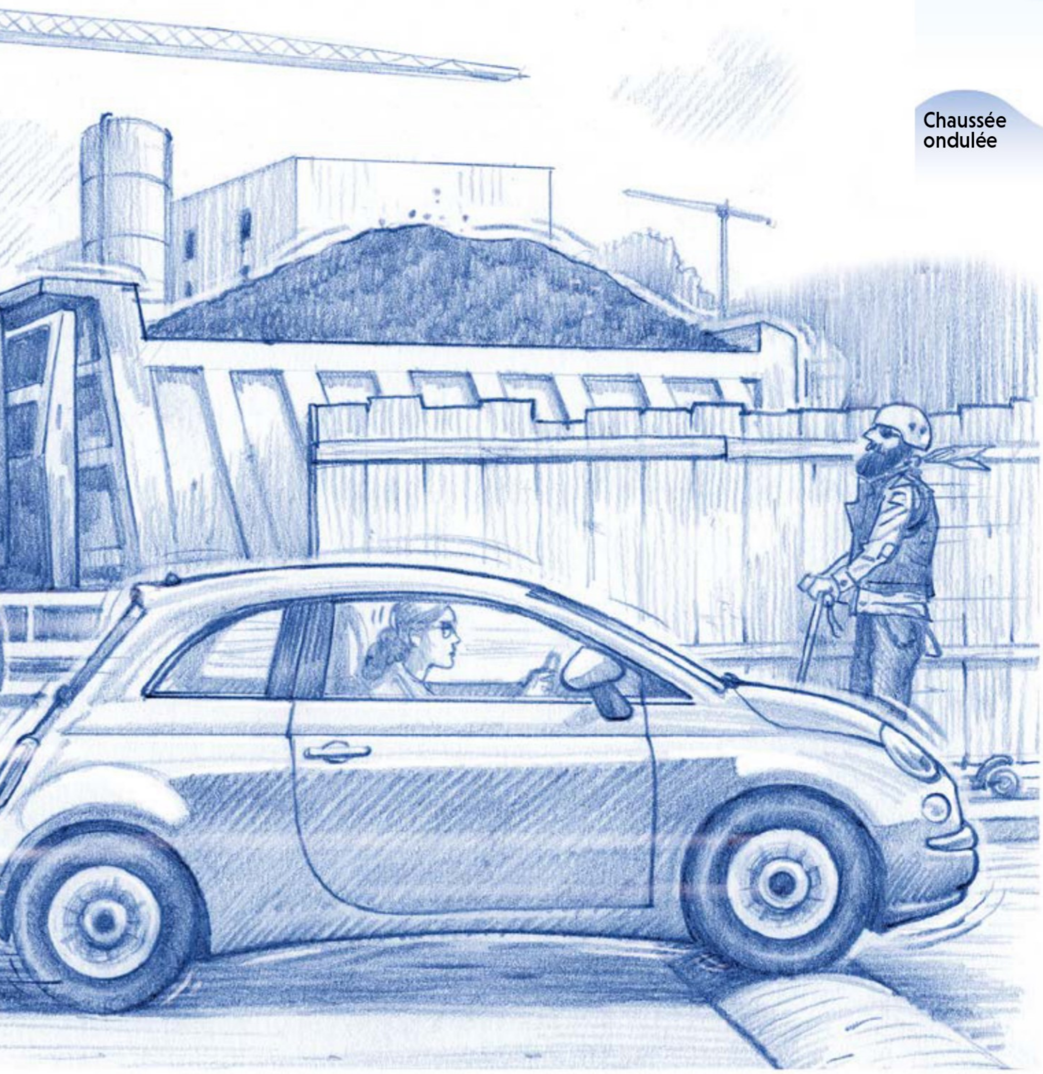
DES SUSPENSIONS…

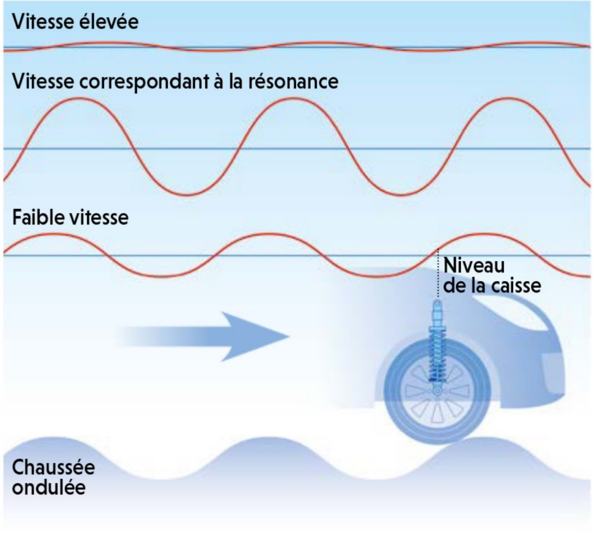
L'analyse des mouvements de la caisse d'un véhicule et de sa tenue de route peut vite devenir complexe. Nous allons donc nous restreindre aux mouvements verticaux d'une automobile roulant en ligne droite. Jouons les naïfs et imaginons un véhicule sans suspension, c'est-à-dire avec des essieux liés rigidement au châssis.

Tant que la route est plate, pas de soucis. Mais qu'une irrégularité se présente, et la roue subit une accélération verticale. En effet, les pneus, bien que légèrement compressibles, ne peuvent épouser la déformation et transmettent à la caisse, par exemple lors de la montée d'une bosse, une accélération verticale, donc une vitesse verticale.

Considérons un tel véhicule se déplaçant à 36 kilomètres par heure, soit 10 mètres par seconde, et qui passe sur un ralentisseur. Lorsque les roues avant roulent sur la pente montante, que l'on suppose inclinée de 10%, elles sont animées d'une vitesse vers le haut de 1 mètre par seconde. Après que le train avant a dépassé le sommet de la bosse, les roues avant perdent le contact avec le sol, donc l'adhérence, et la voiture décolle: malgré la gravité, elle conserve une vitesse ascendante pendant 0,2 seconde et aura donc parcouru au moins 2 mètres avant de retomber.

Pour éviter cela, il faut empêcher que le mouvement vertical des roues soit transmis instantanément et totalement à la caisse, afin que celle-ci reste horizontale malgré la bosse. Cela implique une suspension compressible: c'est le rôle des ressorts hélicoïdaux de suspension, bien visibles sur la plupart des voitures. Dans leur régime habituel de fonctionnement, leur variation de longueur (étirement ou compression) est proportionnelle à la force subie à leurs extrémités. L'inverse





ONDULATIONS

Le mouvement vertical de la caisse d'un véhicule dont les roues sont équipées d'une suspension et qui roule sur une chaussée ondulée dépend de sa vitesse. À faible vitesse, la caisse suit la déformation de la chaussée. À vitesse élevée, l'amplitude du mouvement est faible. À vitesse moyenne, où la fréquence des bosses rencontrées est voisine de la fréquence propre d'oscillation des suspensions (situation de résonance), le mouvement est légèrement amplifié. Un déphasage est également à noter, sauf à faible vitesse.

de la constante de proportionnalité est la «raideur»: plus cette caractéristique du ressort est élevée, plus la déformation est faible, pour une force donnée.

Surgit alors une nouvelle difficulté. Une masse m (la caisse) posée sur des ressorts (la suspension) oscille verticalement dès qu'on lui donne une impulsion. La fréquence de ces oscillations, appelée fréquence propre, ne dépend pas de l'amplitude du mouvement: elle est proportionnelle à la racine carrée de k/m, où k désigne la raideur du ressort. Ainsi, lors du passage d'un ralentisseur, les ressorts se compriment, ce qui réduit fortement le mouvement de la caisse du véhicule vers le haut, mais au prix d'un nouvel inconvénient: une fois le ralentisseur franchi, la caisse de la voiture se met à osciller verticalement!

... QUI OSCILLENT PARFOIS INCONFORTABLEMENT

Et ce n'est pas tout, car les routes sont toujours quelque peu ondulées. En pratique, on tolère des ondulations d'amplitude comprise entre 2 et 20 millimètres pour des distances crête-crête allant de 1 à 50 mètres. Ce qui, avec des vitesses variant entre 1 et 35 mètres par seconde, engendre des fréquences de vibration comprises entre 0,02 et 35 hertz (Hz).

Si la voiture roule lentement, la fréquence des oscillations verticales imposées par la chaussée est plus faible que la fréquence propre d'oscillation du véhicule. Celui-ci suit alors le mouvement vertical des roues, mais, comme ce mouvement est lent, ce n'est pas vraiment un problème.

Si la voiture roule vite, les oscillations sont plus rapides que la fréquence propre;

>

Les auteurs ont récemment publié : **En avant la physique !**, une sélection de leurs chroniques (Belin, 2017).

dans ce cas, la caisse bouge à peine selon la verticale et la suspension joue parfaitement son rôle.

Mais si la fréquence des oscillations est proche de la fréquence propre du véhicule, il y a résonance: les ondulations de la chaussée sont amplifiées, et la caisse bouge verticalement avec des amplitudes bien supérieures aux irrégularités de la chaussée!

DES AMORTISSEURS ADÉQUATS

Que faire? D'abord, limiter fortement les oscillations libres de notre système masse-ressort. C'est le rôle des amortisseurs, ces dispositifs encastrés selon l'axe des ressorts de suspension. Encore faut-il convenablement régler l'amortissement: trop faible, il n'empêchera pas de nombreux rebonds; trop élevé, il n'y aura plus de rebond, mais le temps de retour à l'équilibre sera très long, ce qui nuira au confort des passagers si les irrégularités se succèdent à un rythme plus élevé.

On choisit ainsi le coefficient d'amortissement pour que le système de suspension-amortissement soit à peu près dans son régime «critique», où les rebonds ont tout juste disparu et où le retour à l'équilibre est le plus rapide (pour un amortissement donné, le régime critique dépend de la fréquence propre, donc de la masse du véhicule et de sa charge). Un autre avantage de ce choix est que l'amplification du mouvement, quand la fréquence excitatrice atteint une fréquence de résonance, proche de la fréquence propre du système non amorti, est peu marquée.

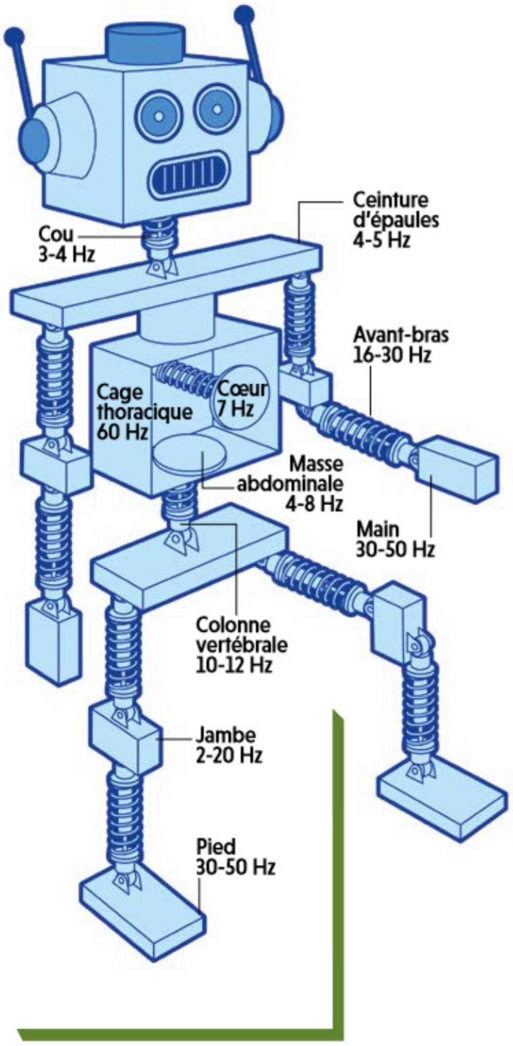
Reste une question épineuse. Comment choisir la raideur des ressorts de suspension? On devine qu'ils doivent être mous pour le confort, mais pas trop pour limiter l'amplitude du mouvement de la suspension, c'est-à-dire son débattement. Au-delà de ce minimum à respecter, c'est en fait le confort des passagers qui va déterminer la raideur des ressorts, de telle façon que la fréquence de résonance de l'oscillateur caisse-suspension ait la valeur la moins gênante pour le corps humain.

Il faut tout d'abord éviter le mal des transports, qui apparaît lorsque notre oreille interne est sollicitée à des fréquences inférieures à 1 Hz. De façon plus générale, le corps humain est très sensible aux vibrations de fréquences inférieures à 20 Hz, précisément les fréquences qu'il subit dans une voiture.

L'étude biomécanique est délicate, mais il est possible de modéliser les différentes parties du corps comme des ensembles masse-ressort amortis et de déterminer les fréquences propres de ces oscillateurs (*voir l'encadré ci-dessus*).

LE CORPS ASSIMILÉ À DES MASSES ET DES RESSORTS

Sur le plan biomécanique, on peut modéliser le corps humain de façon simplifiée comme un assemblage de masses reliées par des ressorts amortis, comme représenté ci-contre. Cela s'applique aux membres comme aux principaux organes internes. Chacun de ces systèmes masse-ressort se caractérise par une fréquence propre d'oscillation, qui détermine son comportement lors d'oscillations imposées de l'extérieur. La conception des suspensions d'un véhicule doit en tenir compte. En particulier, il faut éviter que le véhicule oscille à des fréquences qui soient trop proches des fréquences propres des parties du corps humain, ce qui donnerait lieu à une amplification par effet de résonance. Les suspensions sont, de ce fait, conçues pour que leur fréquence de résonance soit voisine de 1 hertz.



Outre les vibrations de la tête, de la colonne vertébrale ou des membres, cette analyse révèle que nos organes internes peuvent aussi bouger par rapport au reste du corps. Et si nous sommes agités à un rythme proche de leurs fréquences propres (environ 7 Hz pour le cœur, entre 4 et 8 Hz pour le foie, entre 6 et 12 Hz pour les reins...), des troubles et des douleurs variés peuvent s'ensuivre.

RÉGLER LA FRÉQUENCE PROPRE SUR ENVIRON 1 HERTZ

La conclusion est que la sensibilité de l'organisme humain aux vibrations verticales est minime aux environs de 1 Hz. C'est cette fréquence qui nous permet de dimensionner les suspensions: avec une masse de 1 tonne, donc 250 kilogrammes par roue, on trouve des raideurs de 10 kilonewtons par mètre et un temps de relaxation (retour à l'équilibre) de l'ordre de quelques dixièmes de seconde. Des chiffres similaires aux valeurs réelles, malgré la simplicité et les limites de notre approche, qui omet les vibrations des pneus ou des sièges et qui suppose des suspensions purement passives... ■

BIBLIOGRAPHIE

A. Létévé, **Étude de l'influence des suspensions de véhicule de tourisme sur le confort vibratoire, le comportement routier et les limites de fonctionnement**, thèse de doctorat de l'université de Bordeaux, 2014 (www.theses.fr/2014BORD0346/document).

K. Fritsch, **Fun with automobile springs**, *The Physics Teacher*, vol. 44(7), pp. 451-454, 2006.

A. G. Piersol et T. L. Paez, **Harris' Shock and Vibration Handbook**, chapitre 42 : « Effects of shock and vibration on humans », McGraw-Hill, 6e édition, 2009.