? À DÉPOSER AVANT mardi 29 octobre 2024 à 10h

Devoir Maison n°5

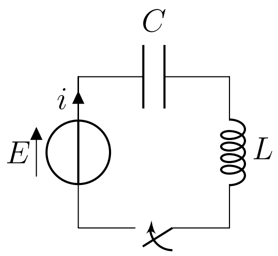
- Le DS ayant lieu le lundi de la rentrée, le DM est à RENDRE PENDANT LES VACANCES, afin que je puisse le corriger avant le DS, vous annoter vos copies, et vous donner le corrigé.
- Ainsi, vous devez ABSOLUMENT déposer votre copie sur `https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-vernet/transferts?phys` AVANT MARDI 29 octobre à 9h00.
- Consignes à respecter obligatoirement :
  - votre copie doit être en UN UNIQUE fichier PDF (vous pouvez utiliser les applications pour smartphones suivantes : Adobe Scan, ou Cam Scanner ou ... qui permettent de scanner convenablement des documents et les regrouper facilement en un seul fichier pdf),
  - les pages doivent être dans l'ordre,
  - les photos doivent être de qualité convenables (droites, pas trop sombres, pas trop claires,..., dans le sens normal d'une copie,...),
  - vous rendez une copie, elle doit être présentée comme toute copie !
- Tout manquement au respect des consignes (date et heure de dépôt, présentation de la copie, du fichier,...) entraînera la note de 0.
- Pour toute question, n'hésitez pas à me contacter par mail : `nvalade.pcsi@gmail.com` ou par `cahier-de-prepa`.

Travail à faire :

- Exercice n°1 : obligatoire pour tous
- Exercice n°2 ou n°3 au choix :
  - Exercice n°2 (plus facile) : obligatoire pour Rayhanna, Kévin, Florian, Keita, Gabriel, Yoann, Tom
  - Exercice n°3 (plus difficile) : obligatoire pour Sokhna, Thibault, Abderrahman.
- Exercice n°4 : facultatif.

Exercice n°1 Étude du circuit LC

On étudie le circuit ci-contre. Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le générateur idéal de fem E constante au condensateur et à la bobine.



Q1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i qui circule dans le circuit.

Q2. Identifier la pulsation propre du circuit.

Q3. Déterminer <u>proprement</u> les valeurs de $i(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

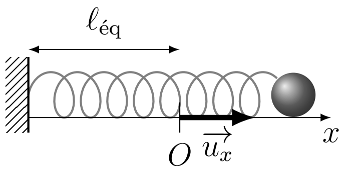
Q4. Résoudre complètement l'équation différentielle.

Q5. En déduire l'expression de la tension aux bornes de la bobine au cours du temps.

Q6. Représenter les allures de $i(t)$ et $u_L(t)$.

Exercice n°2 Analyse de données expérimentales

On étudie le mouvement d'une masse m accrochée à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Il est astreint à se déplacer horizontalement. La position de la masse m est repérée par x à partir de la position d'équilibre.



Q1. Déterminer l'expression de la longueur du ressort à l'équilibre $\ell_{éq}$.

Q2. Exprimer la force de rappel élastique en fonction de k, x et $\overrightarrow{u_x}$.

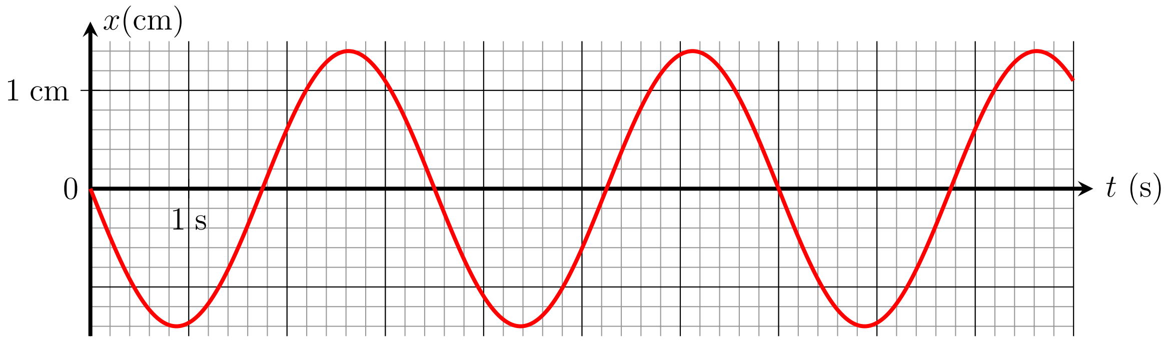
Q3. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Comment s'appelle un système régit par une telle équation ? Identifier l'expression de ω_0. Comment s'appelle cette grandeur ? Quelle est son unité ?

Q4. Donner la solution générale de l'équation différentielle précédente.

On a mesuré x en fonction du temps, et on obtient le graphique ci-dessous.



Q5. D'où part la masse m à l'instant $t = 0$? Que peut-on dire de la vitesse initiale $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$? On n'attend pas une valeur numérique mais si elle est nulle, positive ou négative.

Q6. Résoudre complètement l'équation différentielle à l'aide des conditions initiales précédentes. On commencera par exprimer $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)$ en fonction de $v_0 = \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)\right|$, en faisant attention aux signes.

Q7. Déterminer graphiquement la valeur de la période propre. En déduire la valeur de la pulsation propre.

Q8. L'objet au bout du ressort possède une masse $m = 50$ g.
En déduire la valeur de la constante de raideur k du ressort.

Q9. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique en fonction de m, v_0, ω_0 et t.

Q10. En déduire l'expression de l'énergie mécanique en fonction de m et v_0 uniquement. Commenter.

Q11. Représenter $\mathscr{E}_c$, $\mathscr{E}_{p,\text{él}}$, $\mathscr{E}_m$ en fonction du temps.

Exercice n°3 Modes propres de deux oscillteurs mécaniques couplés

On étudie maintenant le système suivant, représenté figure 1. Deux masses ponctuelles identiques M_1 et M_2, de masse $m = 100$ g, sont reliées d'un côté à deux parois fixes par deux ressorts identiques de raideur k et entre elles par un ressort de couplage de raideur k'.

L'axe Ox est horizontal et la distance entre les parois fixes est telle qu'à l'équilibre les ressorts ont une longueur correspondant à leur longueur à vide.

Les masses sont assujetties à glisser sans frottement le long de l'axe Ox. On note $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les déplacements des masses **par rapport à leur position d'équilibre.**

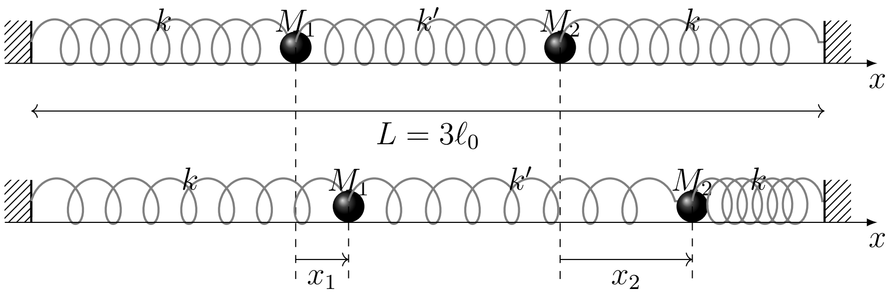


Figure 1 – Système étudié

Q1. Montrer que la force exercée par le ressort de raideur k' sur la masse M_1 s'écrit : $\overrightarrow{F_1'} = -k'(x_1 - x_2)\overrightarrow{u_x}$, où $\overrightarrow{u_x}$ désigne le vecteur unitaire correspondant à l'axe Ox orienté vers les x croissants. On justifiera soigneusement le signe et la dépendance en $(x_1 - x_2)$.

Q2. Écrire de même, en la justifiant, l'expression de la force $\overrightarrow{F_2'}$ exercée par le ressort de raideur k' sur la masse M_2.

Q3. Montrer que les déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ qui décrivent le mouvement des masses sont solutions du système d'équations couplées :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k+k'}{m}x_1 = \frac{k'}{m}x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k+k'}{m}x_2 = \frac{k'}{m}x_1$$

Q4. On effectue le changement de variables : $S(t) = x_1(t) + x_2(t)$ et $D(t) = x_1(t) - x_2(t)$.
Montrer que les deux équations différentielles satisfaites par s et d sont celles d'oscillateurs harmoniques de pulsations propres Ω_s et $\Omega_a > \Omega_s$ dont on donnera les expressions en fonction de m, k et k'.

Q5. Donner la forme générale des solutions en (s, d). On fera en particulier apparaître deux pulsations caractéristiques Ω_s et $\Omega_a > \Omega_s$ dont on donnera les expressions en fonction de m, k et k'.
On ne cherchera pas à exprimer les constantes d'intégration figurant dans les expressions de $s(t)$ et $d(t)$.

Q6. En déduire les expressions générales des déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

On choisit des conditions initiales symétriques pour x_1 et x_2 :

$$x_1(0) = x_2(0) = x_0$$
$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

Q7. En déduire les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
Le mouvement correspondant est appelé mode symétrique.

Q8. Décrire qualitativement dans ce cas le mouvement relatif des deux masses. On illustrera le propos par un schéma.

Q9. Commenter le fait que Ω_s ne dépende pas de k'.

Q10. Exprimer l'énergie mécanique du système composé de M_1 et M_2 (il faut sommer les énergies mécaniques de M_1 et M_2). Commenter.

La figure 2 donne les chronogrammes des positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour le mode symétrique qui vibre à Ω_s, et le mode antisymétrique qui vibre à Ω_a.

Q11. Quelles sont les conditions initiales utilisées pour le mode antisymétrique ?

Q12. Calculer, en utilisant les chronogrammes, les valeurs numériques des pulsations propres Ω_s et Ω_a, et en déduire les constantes de raideur k et k'.

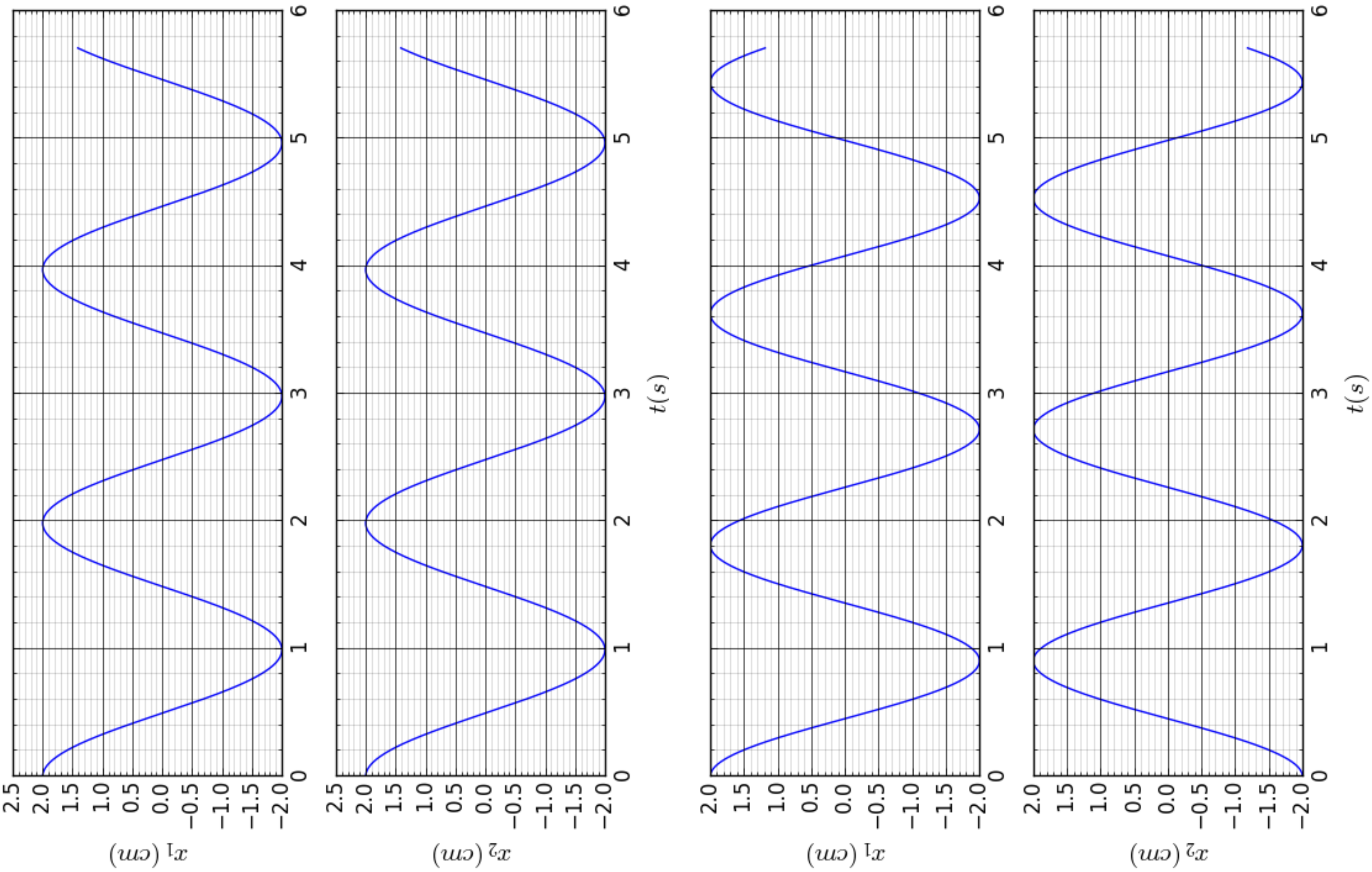


FIGURE 2 – Chronogrammes

Exercice n°4 Train

En bout de voie, on dispose des heurtoirs équipés de tampons dans lesquels se trouvent des ressorts afin de repousser les trains n'ayant pas freiné assez tôt.

Le heurtoir considéré ici est équipé de deux tampons montés côte à côte et équipés de ressorts de longueur à vide $\ell_0 = 10$ cm et de constante de raideur $k = 5.9 \times 10^7$ N · m^{-1}.

Q1. Un train de masse $m = 100$ tonnes arrive au bout de la voie avec une vitesse de $v_0 = 10$ km · h^{-1}. Les tampons sont-ils suffisants pour le repousser ?

Q2. Déterminer la vitesse $v_{\max}$ maximale à laquelle peut arriver un train de masse $m = 100$ tonnes contre le heurtoir sans le détruire.