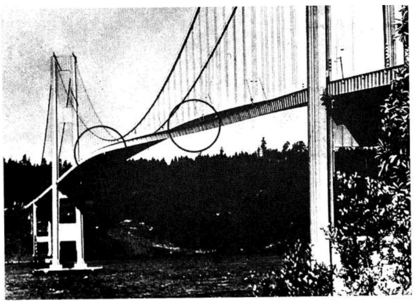
Thème I. Ondes et signaux (Oscillateurs)

Chapitre n°7 Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé

Résonance d'une balançoire : l'amplitude des oscillations est maximale lorsque les parents poussent « à la bonne fréquence » la balançoire.

Résonance d'un verre : lorsqu'il est soumis à une onde sonore de fréquence égale à sa fréquence propre, l'amplitude des oscillations du verre augmente, il peut alors éclater.
Vidéo : « breaking a wine glass using resonance »
https://www.youtube.com/watch?v=17tqXgvCN0E



Le pont de Tacoma était un pont suspendu au-dessus du détroit de Tacoma mis en service le 1er juillet 1940, dès la construction on s'est rendu compte que le pont était très flexible. Le 7 novembre 1940 un vent important a fait osciller le pont avec une amplitude dépassant 1m. L'un des câbles a lâché et l'oscillation verticale s'est transformée en torsion, ce qui a causé l'écroulement du pont. Plusieurs explications ont été proposées : rafales de fréquence égale à la fréquence de résonance, création de tourbillons. Il semblerait que la combinaison des deux phénomènes soit à l'origine de l'écroulement.
Vidéo « Pont Tacoma – Résonance mécanique »
https://www.youtube.com/watch?v=uhWQ5zr5_xc

Pré-requis

- Terminale : Thème Mouvement et interactions
  - Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point : définition et expression en coordonnées cartésiennes.
  - Deuxième loi de Newton.
- PCSI : Thème Ondes et signaux.
  - Chapitre n°3. Signaux électriques dans l'ARQS.
  - Chapitre n°6. Oscillateurs libres amortis

Objectifs du chapitre

- Introduire la représentation complexe des signaux sinusoïdaux.
- Introduire les notions nécessaires à l'étude des circuits linéaires alimentés en régime sinusoïdal.
- Résoudre, en régime forcé, et en utilisant la représentation complexe les équations différentielles du type :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = A_m \cos(\omega t)$$

- Étudier le phénomène de résonance des deux systèmes étudiés dans le chapitre précédent.

Plan du cours

I Oscillateur mécanique en RSF — 2
- I.1 Observations expérimentales 2
- I.2 Équation du mouvement 3
- I.3 RT et RSF 3
- I.4 Représentation complexe 5
  - I.4.a) Définition 5
  - I.4.b) Opérations 6
- I.5 Résonance en élongation 6
- I.6 Exploitation graphique de Z_m et φ . . . 8

II Étude de circuits linéaires en RSF — 8
- II.1 Impédances 9
- II.2 Lois des nœuds et des mailles en RSF . . 11
- II.3 Associations d'impédances 11
- II.4 Étudier un circuit linéaire en RSF 12

III Résonances dans un circuit RLC série — 12
- III.1 Résonance en tension aux bornes de C . 12
- III.2 Analogie 13
- III.3 Résonance en intensité 14

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – ☺ – ☹ – Définir la représentation complexe d'un signal sinusoïdal.

2 – ☺ – ☹ – Donner l'expression de la dérivée et de la primitive de la représentation complexe d'un signal sinusoïdal.

3 – ☺ – ☹ – Établir l'équation du mouvement d'une masse suspendue à un ressort, dont le point d'attache est animé d'un mouvement sinusoïdal.

4 – ☺ – ☹ – Déterminer, à partir de l'équation différentielle, l'expression de l'amplitude complexe de la réponse à l'excitation sinusoïdale.

5 – ☺ – ☹ – Déterminer la pulsation de résonance de la réponse en élongation.

6 – ☺ – ☹ – Établir les expressions des impédances complexes des dipôles R, L et C.

7 – ☺ – ☹ – Donner les expressions des impédances complexes des dipôles R, L et C.

8 – ☺ – ☹ – Donner les comportements asymptotiques (à basse et haute fréquences) du condensateur et de la bobine.

9 – ☺ – ☹ – Donner l'expression de l'impédance complexe équivalente d'une association série ou parallèle de deux impédances.

10 – ☺ – ☹ – Donner les relations du pont diviseur de tension pour deux impédances en série et de courant pour deux impédances en parallèle.

11 – ☺ – ☹ – Établir les expressions des amplitudes complexes de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant dans le RLC série.

12 – ☺ – ☹ – Déterminer les pulsations de résonance en tension et en intensité dans le RLC série.

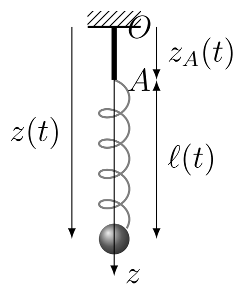
I Oscillateur mécanique en RSF

I.1 Observations expérimentales

Expérience

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php

On étudie le dispositif ci-contre, constitué d'une masse m accrochée à un ressort vertical de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k et dont l'autre extrémité est mise en oscillation par un dispositif extérieur.
Le point A d'attache du ressort oscille à la pulsation ω avec $\overrightarrow{OA}(t) = z_A(t)\overrightarrow{e_z} = Z_{Am}\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$.
Les frottements exercés par l'air sur le système sont modélisés par la force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, avec α une constante positive qui dépend du fluide.
Qu'observez-vous ? Noter ce qu'il se passe à basse fréquence, pour des fréquences intermédiaires et à haute fréquence.



Définition : phénomène de résonance

On dit qu'un système excité périodiquement présente une **résonance** pour une grandeur physique lorsque l'**amplitude** de celle-ci admet un **maximum** pour une fréquence particulière de l'excitation appelée **fréquence de résonance**.

I.2 Équation du mouvement

À maîtriser : Équation du mouvement

Q1. On étudie l'équilibre de $M(m)$, en l'absence d'excitation sinusoïdale tel que $\forall\ t,\ z_A(t) = 0$.
Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre $\ell_{\text{éq}}$.

Q2. Exprimer la force de rappel élastique en fonction de k, z_A, z, ℓ_0 et $\overrightarrow{u_z}$.

Q3. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $z(t)$.

On repère la position de la masse M à partir de sa position d'équilibre en utilisant la variable Z telle que $Z(t) = z(t) - z_{\text{éq}}$.

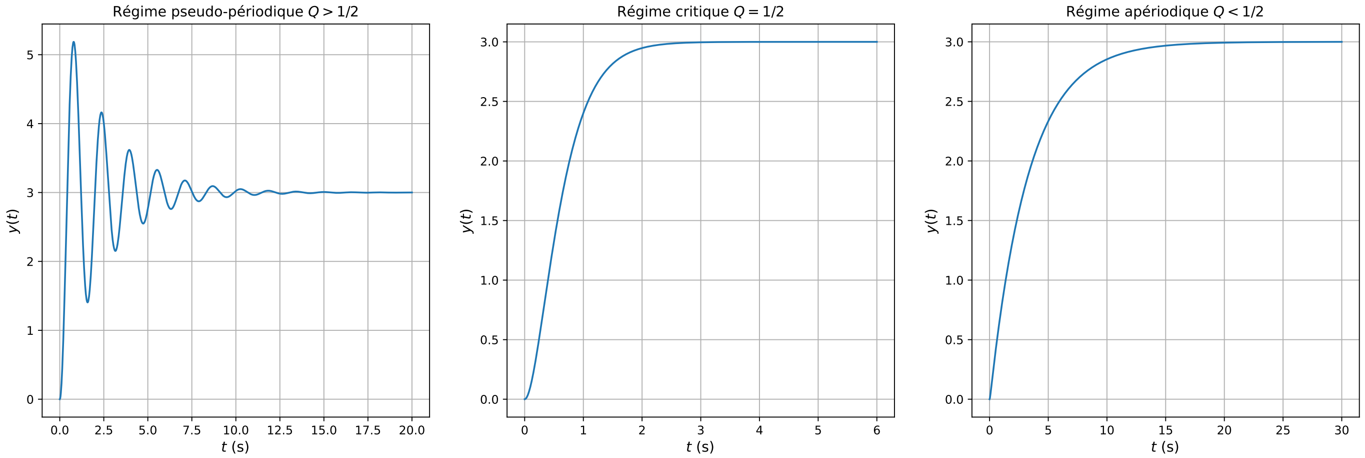
Q4. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$.
La mettre sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 Z(t) = \omega_0^2 z_A(t)$$

identifier les expressions de ω_0 et Q.

I.3 Régime transitoire et régime sinusoïdal forcé

AVANT (chapitre précédent) … Nous avons étudié l'évolution des oscillateurs amortis soumis à un **régime permanent constant**, dont l'équation différentielle s'écrivait $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = A_0$, avec un second membre A_0 constant (nul ou non nul). Nous avons observé un régime transitoire (qui correspond à la solution de l'équation homogène) qui peut être pseudo-périodique, apériodique ou critique, suivant la valeur du facteur de qualité :



Ce régime transitoire disparait plus ou moins rapidement (au bout de quelques τ le temps de relaxation) pour finalement laisser place au régime établi permanent (constant), puisque le second membre était constant.

MAINTENANT …Nous allons soumettre les oscillateurs à une excitation sinusoïdale de pulsation ω :

- Pour l'oscillateur mécanique, son point d'attache est mis en mouvement sinusoïdalement : § I.
- Pour l'oscillateur électrique, le dipôle (R,L,C) série est alimenté par un générateur délivrant une tension $e(t)$ sinusoïdale : § III.

Nous venons d'obtenir la même équation différentielle qu'au chapitre précédent, à part que le second membre est maintenant une fonction sinusoïdale : $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2y(t)=A_m\cos(\omega t)$

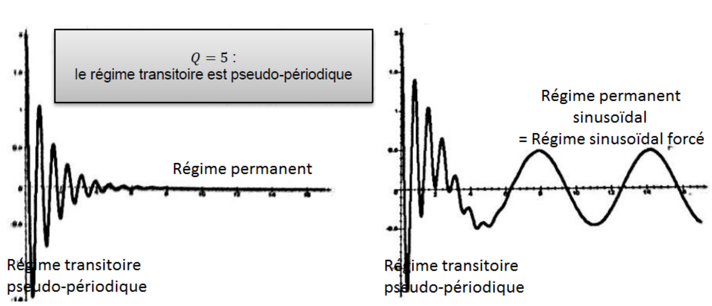
La solution générale s'écrit :

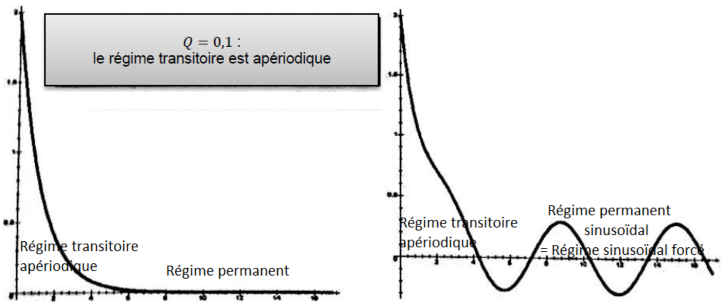
$$\boxed{y(t)=y_H(t)+y_P(t)}$$

avec :

- $y_H(t)$ la **solution générale de l'équation homogène**.
  Cette solution a déjà été déterminée au chapitre précédent. Elle correspond au **régime transitoire** qui disparaît au bout d'un certain laps de temps : $\lim\limits_{t>\text{qq }\tau}y_H(t)=0$.
- $y_P(t)$ la **solution particulière**, qui correspond au régime établi. On la cherche sous la même forme que le second membre, donc sous la forme d'une fonction sinusoïdale : $\boxed{y_P(t)=Y_m\cos(\omega t+\varphi)}$

$\boxed{\text{En régime permanent (pour } t>\text{qq }\tau\text{), } y_H(t)\approx 0\text{, et donc : } y(t)\approx y_P(t)=Y_m\cos(\omega t+\varphi)}$





Dans ce chapitre, nous ne nous intéresserons pas au régime transitoire, mais uniquement au régime permanent sinusoïdal, appelé « régime sinusoïdal forcé ».
Dans le cas de l'oscillateur mécanique, la réponse en régime établi s'écrit $\boxed{Z(t)=Z_p(t)=Z_m\cos(\omega t+\varphi)}$ et comporte **deux inconnues** : $\boxed{\text{l'amplitude } Z_m \text{ et la phase à l'origine } \varphi}$.
On pourrait déterminer Z_P de la même façon que lorsque le second membre est constant : injecter $Z_P(t)$ dans l'équation différentielle et déterminer les inconnues (Z_m et φ). Contrairement au cas du second membre constant, le calcul serait ici long et compliqué.

But de la résolution : déterminer l'amplitude $Z_m(\omega)$ **et la phase à l'origine** $\varphi(\omega)$ qui dépendent de la pulsation de l'excitation.

♥ À retenir : Système linéaire en régime sinusoïdal forcé

Un système est en régime sinusoïdal forcé lorsque son « entrée » $e(t)$ est imposée (« forcée »), et du type sinusoïdal : $e(t)=e_0\cos(\omega t+\varphi_e)$.
Les systèmes étudiés sont linéaires, donc si le signal d'entrée est sinusoïdal, alors le signal de sortie l'est également et à la même pulsation, mais avec une amplitude et une phase à l'origine des temps différentes :

$$e(t)=E_m\cos(\omega t+\varphi_e)\xrightarrow{\text{système linéaire}}s(t)=S_m\cos(\omega t+\varphi_s)$$

L'objectif du chapitre est de déterminer S_m et φ_s.

I.4 Représentation complexe

I.4.a) Définition

À retenir : Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

À tout signal sinusoïdal

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

on associe la **représentation complexe** :

$$\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Le signal complexe n'a pas de réalité physique, c'est uniquement un outil

$$s(t) = \Re\left(\underline{s}\right)$$

$$\begin{aligned} s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{s} &= S_m e^{j(\omega t+\varphi)} \\ \underline{s} &= S_m e^{j\omega t + j\varphi} \\ \underline{s} &= S_m e^{j\omega t} \times e^{j\varphi} \\ \underline{s} &= \Big(\underbrace{S_m e^{j\varphi}}_{=\underline{S_m}}\Big) \times e^{j\omega t} \end{aligned}$$

À retenir : Amplitude et phase à l'origine des temps

- On introduit l'**amplitude complexe**, notée $\underline{S_m}$ telle que

$$\underline{s}(t) = \underline{S_m} e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{S_m} = S_m e^{j\varphi}$$

- L'**amplitude S_m de $s(t)$** est le **module de** $\underline{S_m}$:

$$S_m = \left|\underline{s}(t)\right| = \left|\underline{S_m}\right|$$

- La **phase à l'origine $\varphi \in [-\pi, \pi]$ de $s(t)$** est **l'argument de** $\underline{S_m}$:

$$\varphi = \arg(\underline{S_m})$$

Ainsi la connaissance de l'amplitude complexe $\underline{S_m}$ donne accès aux deux grandeurs inconnues du signal $s(t)$: l'amplitude S_m et la phase à l'origine des temps φ.

Exercice de cours A — Représentation complexe de signaux sinusoïdaux

E, ω, τ, ω_0, Q sont des réels positifs.

Q1. Donner le signal complexe associé aux signaux suivants et identifier l'amplitude complexe.

(a) $e(t) = E\cos(\omega t + \pi/3)$ (b) $u(t) = \dfrac{U_0 R}{R+r}\sin\Big(\omega(t-t_0)\Big)$ (c) $i(t) = -I_m\sqrt{2}\cos(\omega t)$

Q2. Donner le module des complexes ci-dessous.

(a) $\underline{U_m} = \dfrac{E}{1+j\omega\tau}$ (b) $\underline{u} = \dfrac{Ej\omega\tau}{1+j\omega\tau}e^{j\omega t}$ (c) $\underline{U_m} = \dfrac{-E\omega_0^2}{-\omega^2 + j\omega\omega_0/Q + \omega_0^2}$

Q3. Donner l'expression de $\tan(\varphi)$ avec φ l'argument de $\underline{U_m}$.

(a) $\underline{U_m} = \dfrac{E}{1+j\omega\tau}$ (b) $\underline{U_m} = \dfrac{Ej\omega\tau}{1+j\omega\tau}$ (c) $\underline{U_m} = \dfrac{-E\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \dfrac{j\omega\omega_0}{Q}}$ (d) $\underline{U_m} = \dfrac{E}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

I.4.b) Opérations

Soit $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, de représentation complexe $\underline{s} = \underline{S_m} e^{j\omega t}$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(\underline{S_m} e^{j\omega t})}{\mathrm{d}t} \\ &= \underline{S_m} \times j\omega e^{j\omega t} \\ &= j\omega \times \underline{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \underline{s}\ \mathrm{d}t &= \int \underline{S_m} e^{j\omega t}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{\underline{S_m}}{j\omega} e^{j\omega t} \\ &= \frac{\underline{s}}{j\omega} \end{aligned}$$

À retenir : Opérations à l'aide de la représentation complexe

- **Dériver** un signal complexe revient à le multiplier par $j\omega$.

$$\frac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t} = j\omega \times \underline{s}$$

- **Primitiver** un signal complexe revient à le diviser par $j\omega$.

$$\int \underline{s}\ \mathrm{d}t = \frac{\underline{s}}{j\omega}$$

- La **somme** de $s_1(t) = S_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ est d'amplitude complexe

$$\underline{S_m} = \underline{S_{1m}} + \underline{S_{2m}} = S_{1m} e^{j\varphi_1} + S_{2m} e^{j\varphi_2}$$

L'amplitude de $s_1(t) + s_2(t)$ s'obtient avec $S_m = |\underline{S_m}| = |\underline{S_{1m}} + \underline{S_{2m}}|$

Attention

Il est formellement interdit d'utiliser la représentation complexe pour les équations non-linéaires. Notamment, il est interdit d'utiliser la représentation complexe pour les grandeurs énergétiques qui sont toutes non-linéaires. Pour toute étude énergétique il faut donc revenir à la notation réelle.

I.5 Résonance en élongation

Capacité exigible : Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.

À maîtriser : Amplitude complexe

On étudie la réponse de l'oscillateur mécanique régit par l'équation différentielle

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 z_A \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 Z_{Am}\cos(\omega t)$$

Q1. Proposer une expression de la solution $Z(t)$ en régime sinusoïdal forcé.

Q2. Donner les représentations complexes de z_A et de Z et introduire l'amplitude complexe $\underline{Z_m}$ de $\underline{Z}$.

Q3. Passer l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$ en représentation complexe et en déduire l'expression de $\underline{Z_m}$ en fonction de ω_0, Q, ω et Z_{Am} sous la forme :

$$\underline{Z_m} = \frac{Z_{Am}}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}} \quad \text{où} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Q4. Pour mener l'étude de la phase $\varphi = \arg(\underline{Z_m})$, il est nécessaire de connaître l'intervalle de $[-\pi, \pi]$, auquel φ appartient. Quel est le signe de la partie imaginaire de $\underline{Z_m}$? Que peut-on en déduire sur φ ? Quel est le signe de la partie réelle de $\underline{Z_m}$ pour $x < 1$ $(\omega < \omega_0)$? pour $x > 1$ $(\omega > \omega_0)$? Que peut-on en déduire sur φ ?

Méthode maths : les équivalents

L'équivalent entre deux fonctions en a se note : $f \underset{a}{\sim} g$.

f est équivalente à g si $(f-g)$ est négligeable devant g.

- Un équivalent en $\pm\infty$ d'une fonction polynomiale est son monôme de plus haut degré : $a+bx+cx^2 \underset{\infty}{\sim} cx^2$
- $a+bx+cx^2 \underset{0}{\sim} a$
- $ax+\dfrac{b}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{b}{x}$ et $ax+\dfrac{b}{x} \underset{\infty}{\sim} ax$

À maîtriser : Étude de l'amplitude et de la phase

Étude des situations limites

Q1. Exprimer l'équivalent de $\underline{Z_m}$ pour $x \ll 1$ ($\omega \ll \omega_0$).
En déduire les limites de Z_m et φ à basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$). Commenter physiquement.

Q2. Exprimer l'équivalent de $\underline{Z_m}$ pour $x \gg 1$ ($\omega \gg \omega_0$).
En déduire les limites de $Z_m(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$ à haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$). Commenter physiquement.

Q3. Exprimer $\underline{Z_m}(\omega_0)$. En déduire $Z_m(\omega_0)$ et $\varphi(\omega_0)$. Commenter.

Résonance en élongation

Q4. Exprimer l'amplitude $Z_m(\omega)$ de l'élongation. Introduire la fonction g telle que $Z_m(x) = \dfrac{Z_{Am}}{\sqrt{g(x)}}$.

Q5. Montrer que g admet un minimum si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

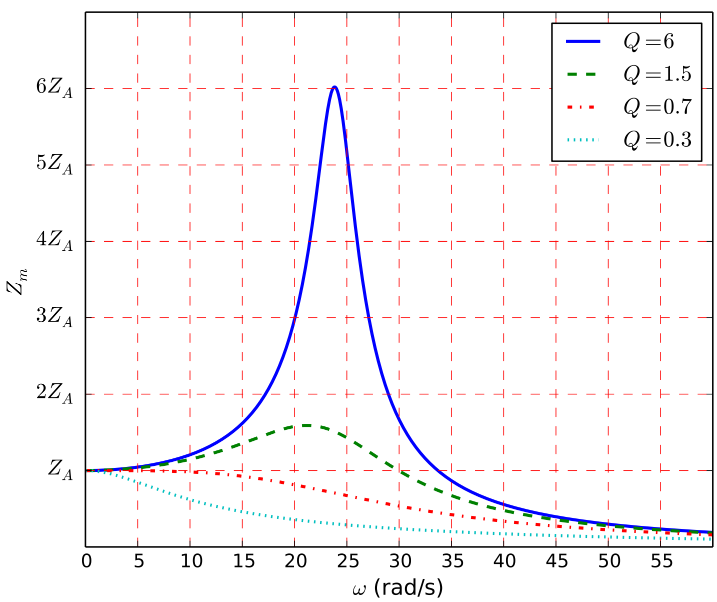
Q6. En déduire qu'il se produit une résonance pour une pulsation ω_r que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q, à condition que Q vérifie une certaine inégalité.

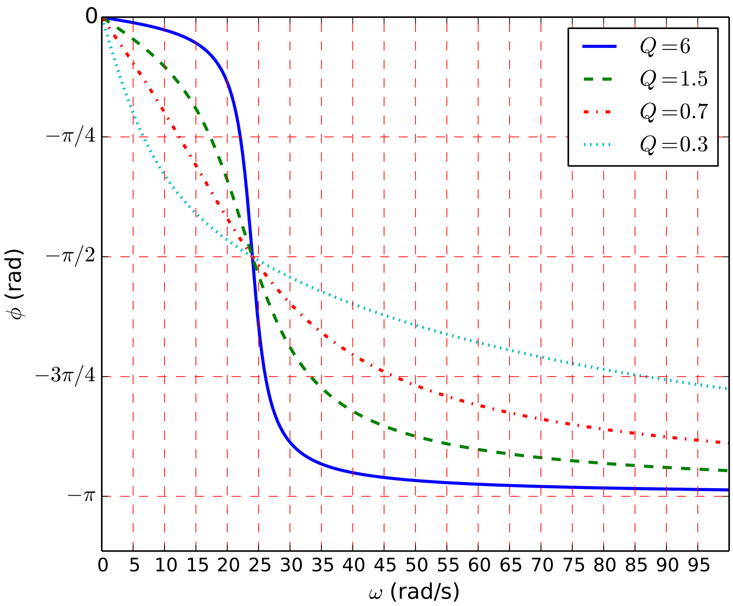
Q7. Tracer l'allure de $Z_m(\omega)$ pour différentes valeurs de Q.

Q8. Quelle est l'influence du facteur de qualité sur la résonance d'élongation ?

Allure de la phase

Q9. Tracer l'allure de $\varphi(\omega)$.





I.6 Exploitation graphique de Z_m et φ

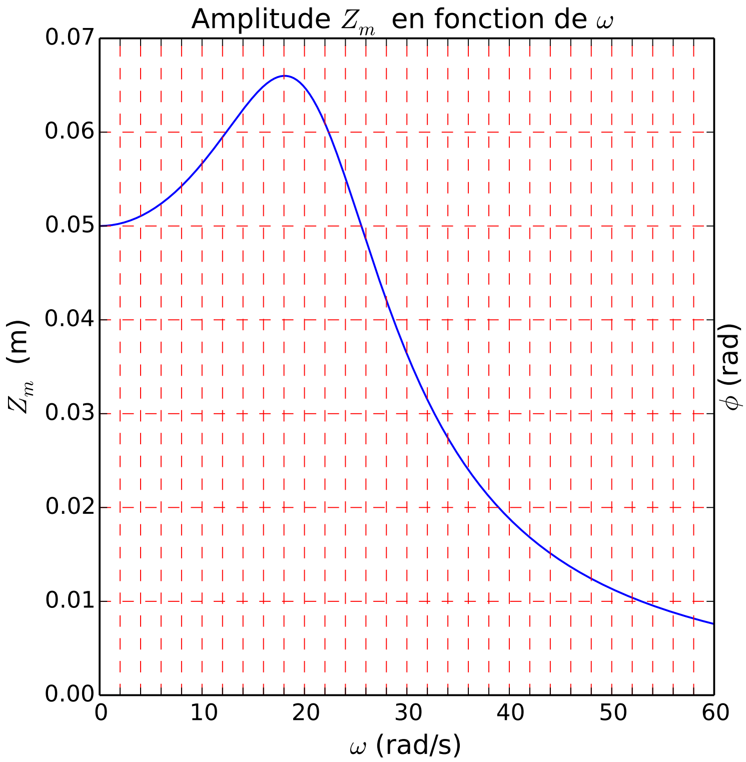
<u>Capacité exigible</u> : **Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.**

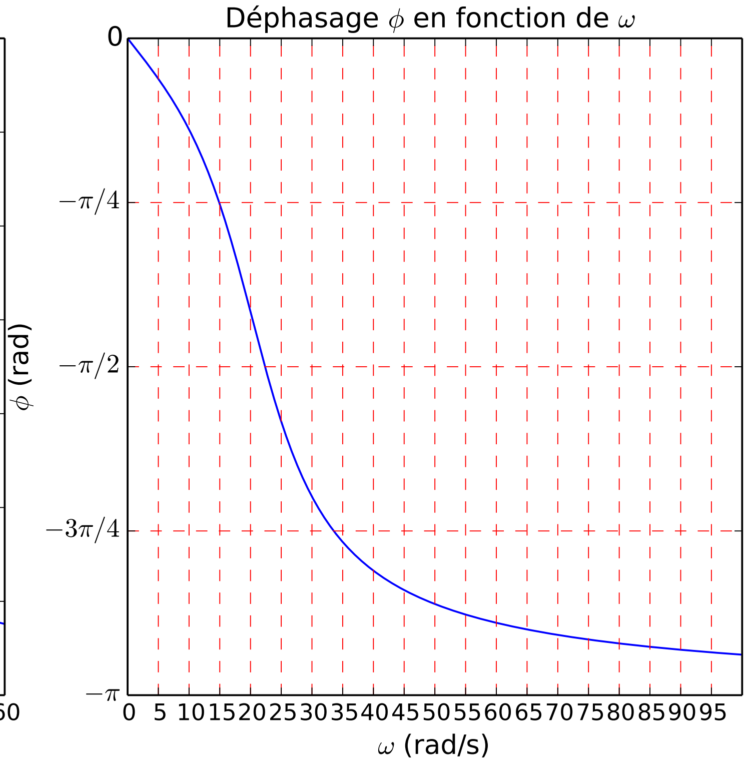
Méthode : Comment déterminer graphiquement ω_0 et Q ?

En présence d'une résonance du type de celle en élongation pour un facteur de qualité modéré :

- Lire ω_0 sur la courbe de phase $\varphi(\omega)$: ω_0 est la pulsation pour laquelle $\varphi(\omega_0) = -\dfrac{\pi}{2}$
- Deux méthodes sont possibles pour déterminer Q :
  - 1ère méthode (possible si Q n'est pas trop élevé, et que ω_r et ω_0 sont « éloignés ») :
    - Lire la pulsation ω_r de résonance sur la courbe de $Z_m(\omega)$: ω_r est la pulsation à laquelle Z_m est maximale.
    - En déduire le facteur de qualité Q grâce à la relation $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$.
  - 2ème méthode (nécessaire si $Q \gg 1$, et donc $\omega_r \approx \omega_0$) :
    - Lire l'amplitude $Z_m(\omega_0)$ en ω_0 et l'amplitude $Z_m(0)$ en $\omega = 0$.
    - Utiliser la relation $Z_m(\omega_0) = Q \times Z_m(0)$ pour en déduire Q.

Exercice de cours B Déterminer les valeurs de la pulsation propre et le facteur de qualité.





II Étude de circuits linéaires en RSF

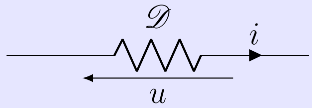
Dans le chapitre précédent nous avons établi l'analogie entre le système masse-ressort et le circuit RLC série. Nous pouvons toujours utiliser cette analogie, et avoir l'intuition que nous observerons également des résonances selon les paramètres du circuit. L'étude des circuits électriques en régime sinusoïdal ne nécessite pas d'établir une équation différentielle, puis de la passer en représentation complexe, comme nous venons de le faire pour l'oscillateur mécanique, ce qui peut s'avérer un peu long pour des circuits contenant plusieurs mailles. **L'objectif de cette partie est d'introduire de nouvelles grandeurs qui pourront rendre l'étude des circuits en régime sinusoïdal très facile.**

II.1 Impédances

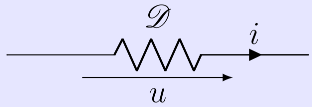
Définitions : Impédance complexe

On considère un **dipôle $\mathscr{D}$ linéaire passif**, dont la tension à ses bornes s'écrit $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ et traversé par un courant d'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$.
En régime sinusoïdal forcé et en utilisant la représentation complexe, on définit l'**impédance complexe** $\underline{Z}$ du dipôle $\mathscr{D}$ telle que :

- En **convention récepteur**, la relation entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$ s'écrit $\boxed{\underline{u} = \underline{Z}\ \underline{i}}$



- En **convention générateur**, la relation entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$ s'écrit : $\boxed{\underline{u} = -\underline{Z}\ \underline{i}}$



Définition : Admittance complexe

L'**admittance complexe** est l'inverse de l'impédance complexe $\boxed{\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}}$

L'**admittance** $Y = \dfrac{1}{Z}$ s'exprime en Siemens (S) ou en Ω^{-1}

À retenir : Caractéristiques de l'impédance complexe

- Le **module de l'impédance complexe** relie les amplitudes de l'intensité et de la tension :
$\boxed{Z = \left|\underline{Z}\right| = \dfrac{U_m}{I_m}}$ et s'exprime en Ohm (Ω).
- L'**argument de l'impédance complexe** est le **déphasage de la tension aux bornes du dipôles par rapport à l'intensité du courant** qui le traverse : $\boxed{\arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i}$

REMARQUES

Soit un dipôle linéaire passif d'impédance complexe $\underline{Z}$.

- D'après les définitions ci-dessus, $Z = |\underline{Z}|$ et $\Delta\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{Z})$.
On écrit alors l'impédance complexe sous la forme $\underline{Z} = Z e^{j\Delta\varphi_{u/i}} = Z\cos(\Delta\varphi_{u/i}) + j\ Z\sin(\Delta\varphi_{u/i})$
Ainsi $\Re(\underline{Z}) = Z\cos(\Delta\varphi_{u/i})$ et $\Im(\underline{Z}) = Z\sin(\Delta\varphi_{u/i})$
- La relation entre impédance et admittance complexes est $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$, ce qui donne la relation entre les arguments : $\arg(\underline{Y}) = -\arg(\underline{Z})$.

Capacité exigible : **Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.**

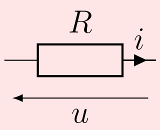
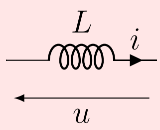
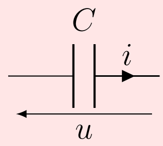
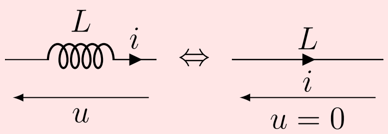
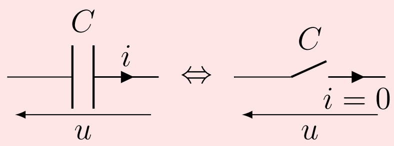
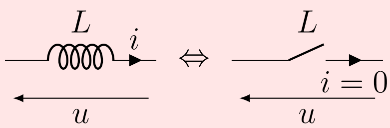
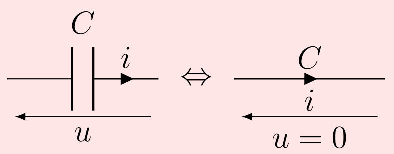
Impédances des dipôles linéaires

Pour la résistance, la bobine et le condensateur,

— établir les expressions de l'impédance complexe, de l'admittance complexe, ainsi que de l'impédance et de l'admittance ;

— déterminer les comportements des dipôles à basse et haute fréquence.

À retenir

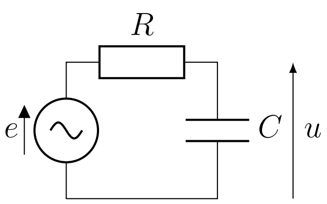
Dipôle	Résistance	Bobine	Condensateur
Schéma			
Impédance complexe	$\underline{Z_R} = R$	$\underline{Z_L} = Lj\omega$	$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{Cj\omega}$
$\omega \longrightarrow 0$	$Z_R \to R$	$Z_L \to 0$ 	$Z_C \to \infty$ 
$\omega \longrightarrow \infty$	$Z_R \to R$	$Z_L \to \infty$ 	$Z_C \to 0$ 

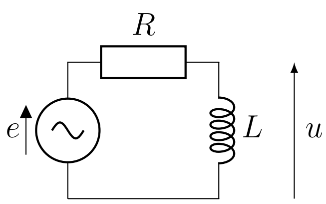
Attention

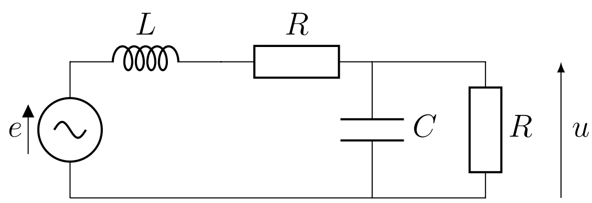
	interrupteur ouvert	fil
Tension aux bornes d'un …	QUELCONQUE	NULLE
Intensité à travers d'un …	NULLE	QUELCONQUE

Exercice de cours C Comportement basse et haute fréquences de circuits

Déterminer la tension u dans les circuits ci-dessous à basse et haute fréquences. Tous les circuits sont alimentés par un générateur idéal de tension de fem $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

Q1.


Q2.


Q3.


II.2 Lois des nœuds et des mailles en RSF

À retenir : Lois des nœuds et des mailles en RSF

Les loi des nœuds et loi des mailles s'écrivent en RSF comme en régime permanent, tant que l'on se trouve dans le cadre de l'ARQS. Dans les circuits linéaires, l'ensemble des signaux sont de même pulsation, et on peut utiliser la représentation complexe.

- Dans une maille, préalablement orientée, la somme algébrique des tensions est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k u_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{u_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{U_{m,k}} = 0$$

  avec $\varepsilon_k = +1$ si la flèche de u_k est dans le sens d'orientation de la maille, et $\varepsilon_k = -1$ si la flèche de u_k est en sens opposé au sens d'orientation de la maille.

- En un nœud, la somme algébrique des intensités est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k i_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{i_k} = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{I_{m,k}} = 0$$

  avec $\varepsilon_k = +1$ si le courant i_k arrive dans le nœud et $\varepsilon_k = -1$ si le courant i_k part du nœud.

Attention – Erreur à ne pas commettre

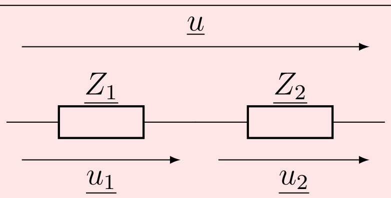
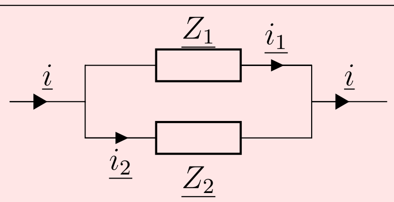
Les lois des mailles et des nœuds DOIVENT être écrites avec les AMPLITUDES COMPLEXES ou les SIGNAUX COMPLEXES, mais ne doivent pas être écrites à l'aide des amplitudes des signaux.
On ne sommera JAMAIS des amplitudes, seulement des amplitudes complexes.

II.3 Associations d'impédances

<u>Capacité exigible</u> : Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.

En RSF, en utilisant la représentation complexe, on associe les impédances et on écrit les relations des PDT et PDC comme pour les résistances.

À retenir

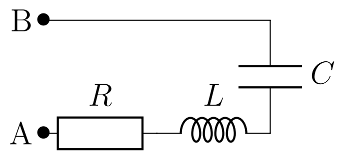
	Série	Dérivation
Schéma		
Expression de $\underline{Z_{éq}}$	$\underline{Z_{éq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$	$\dfrac{1}{\underline{Z_{éq}}} = \dfrac{1}{\underline{Z_1}} + \dfrac{1}{\underline{Z_2}} \Leftrightarrow \underline{Z_{éq}} = \dfrac{\underline{Z_1}\,\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$
Pont diviseur	de tension : $\underline{u_1} = \dfrac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{u}$	de courant : $\underline{i_1} = \dfrac{\frac{1}{\underline{Z_1}}}{\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}}\underline{i}$

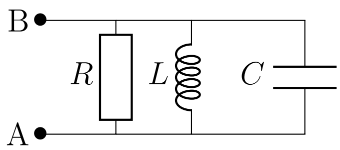
Attention – Erreurs à ne pas commettre

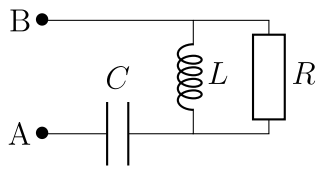
Avant d'utiliser les formules d'association et de ponts diviseurs, il faut s'assurer que les dipôles sont bien en série ou en parallèle.
Lors de l'utilisation des relations des ponts diviseurs, faire attention aux sens des tensions ou des courants.

Exercice de cours D Impédances équivalentes

Pour chacun des circuits suivants, exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_{AB}}$ équivalente au dipôle AB. On notera ω la pulsation des grandeurs électriques.

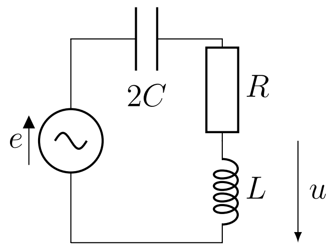
Q1. 

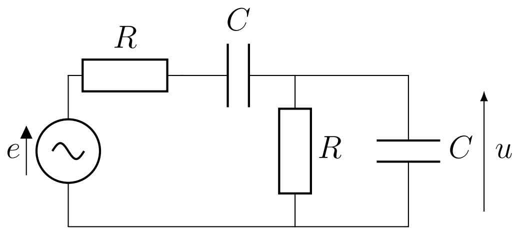
Q2. 

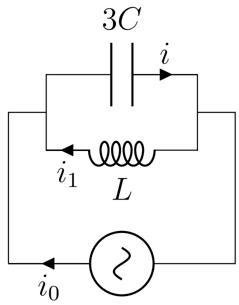
Q3. 

Exercice de cours E Ponts diviseurs

Établir les expressions, en utilisant la représentation complexe, de $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$ ou de $\underline{i}$ et $\underline{i_1}$ en fonction de $\underline{i_0}$ pour les circuits ci-dessous.

Q1. 

Q2. 

Q3. 

II.4 Étudier un circuit linéaire en RSF

Méthode : Comment étudier un circuit linéaire en RSF ?

Dans le cadre du régime sinusoïdal forcé, la représentation complexe peut (et doit !) être utilisée.

1. Écrire l'impédance de chaque dipôle linéaire passif présent dans le circuit.
2. Introduire sur le schéma du circuit, toutes les tensions et intensités nécessaires : positionner les flèches et les nommer.
3. Associer les impédances entre elles dès que possible (en série ou en parallèle), *qui ne font pas disparaître les grandeurs électriques recherchées.*
4. Écrire les lois des mailles et/ou lois des nœuds nécessaires **en représentation complexe**.
5. Ne pas oublier les PONTS DIVISEURS de tension et de courant **en représentation complexe**, bien utiles, qui remplacent des lois des mailles/des nœuds.

III Résonances dans un circuit RLC série

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Alternatif/transfert2RLC.php

Expérience : Cf TP Résonances du circuit RLC série

Relire/reprendre le compte rendu de ce TP.

III.1 Résonance en tension aux bornes de C

<u>Capacité exigible</u> : **Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité.**

Étude de la résonance en tension du RLC série

On souhaite déterminer les caractéristiques en RSF de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t) = U_{Cm}\cos(\omega t + \varphi_u)$ dans le circuit RLC série alimenté par un générateur de fem $e(t) = E_m\cos(\omega t)$.

<u>Comportement asymptotique</u>

Q1. Déterminer le comportement asymptotique de U_{Cm}, sans calculs.

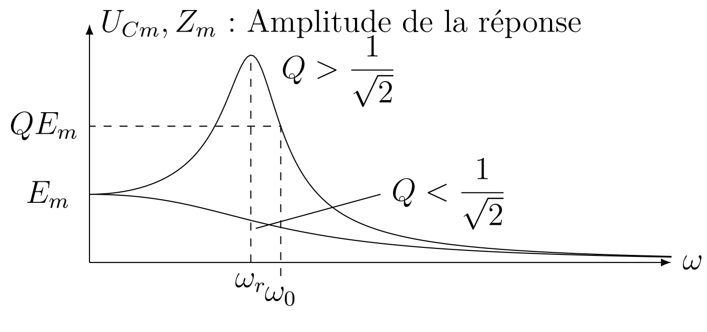
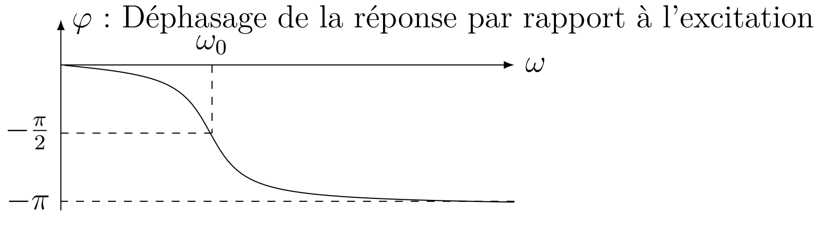
<u>Amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur</u>

Q2. Établir l'expression de $\underline{U_{Cm}}$ en fonction de E_m, ω, L, C, R.

Mettre $\underline{U_{Cm}}$ sous la forme : $\underline{U_{Cm}}(\omega) = \dfrac{E_m}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$, et identifier les expressions de ω_0 et Q.

Q3. Commenter. Quelle situation reconnaissez-vous ? Que pourra-t-on dire du comportement de la tension aux bornes du condensateur ?

III.2 Analogie résonance en élongation / en tension

	Résonance en élongation	Circuit RLC série aux bornes de C
Excitation	$z_A(t) = Z_{Am}\cos(\omega t)$	$e(t) = E_m\cos(\omega t)$
Équation différentielle	$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ(t) = kz_A(t)$	$L\dfrac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}u_c = \dfrac{1}{C}e(t)$
Réponse de l'oscillateur en RSF, une fois le régime transitoire terminé	$Z(t) = Z_m\cos(\omega t + \varphi)$	$u_c(t) = U_{Cm}\cos(\omega t + \varphi)$
Amplitude complexe	$\underline{Z_m}(\omega) = \dfrac{Z_{Am}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$	$\underline{U_{Cm}}(\omega) = \dfrac{E_m}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$
Pulsation propre [rad/s]	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité [sans unité]	$Q = \dfrac{\sqrt{mk}}{\alpha}$	$Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
Paramètres de l'oscillateur	α	R
	m	L
	k	$\dfrac{1}{C}$
Graphe de l'amplitude		
Graphe de la phase		

III.3 Résonance en intensité

<u>Capacité exigible</u> : **Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.**

Définition : Bande passante et pulsation de coupure

- Les **pulsations de coupure** sont les pulsations ω_c telles que

$$I_m(\omega_c) = \frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$$

- La **<u>bande passante</u>**, est l'intervalle de pulsation $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$ telle que pour toute pulsation $\omega \in [\omega_{c1}, \omega_{c2}]$

$$I_m(\omega) \geq \frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$$

avec $I_{m,\max}$ la valeur maximale prise par l'amplitude de l'intensité (=valeur de l'amplitude de l'intensité à la résonance).

Définition : Acuité de la résonance

On définit l'acuité de la résonance, la grandeur sans dimension, notée A_c par :

$$A_c = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$$

où ω_r est la pulsation de résonance et $\Delta\omega$ est la largeur de la bande passante.
Elle est d'autant plus élevée que la largeur de la bande passant est faible devant la pulsation de résonance.
Graphiquement, l'acuité est d'autant plus élevée que le « pic de résonance est étroit ».

Étude de la résonance en intensité dans le RLC série

On étudie l'intensité, une fois le régime transitoire terminé, dans le circuit RLC série alimenté par un générateur idéal de fem $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. On écrit l'intensité sous la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$, avec I_m l'amplitude de $i(t)$ et φ_i le déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$.

<u>Comportement asymptotique</u>

Q1. Déterminer, à l'aide des comportements asymptotiques des dipôles, la valeur de I_m à basse et haute fréquences.

<u>Amplitude complexe de l'intensité</u>

Q2. Déterminer, en représentation complexe, l'amplitude complexe $\underline{I_m}$ de l'intensité du courant.
La mettre sous la forme : $\underline{I_m}(\omega) = \dfrac{A}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ et identifier les trois constantes A, ω_0 et Q.

Q3. Déterminer les équivalents de l'amplitude $\underline{I_m}$ pour $\omega \ll \omega_0$ et pour $\omega \gg \omega_0$.

Q4. En déduire les valeurs limites de l'amplitude I_m de l'intensité, et du déphasage entre i et e à basse et haute fréquence.

<u>Étude de l'amplitude I_m</u>

Q5. Déterminer l'expression de $I_m(\omega)$.

Q6. Étudier l'existence d'une résonance.

Q7. Tracer l'allure de $I_m(\omega)$.

Q8. Déterminer les expressions des pulsations de coupure en fonction de ω_0 et Q.

Q9. En déduire que la largeur de la bande passante $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ est reliée à Q par : $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$.

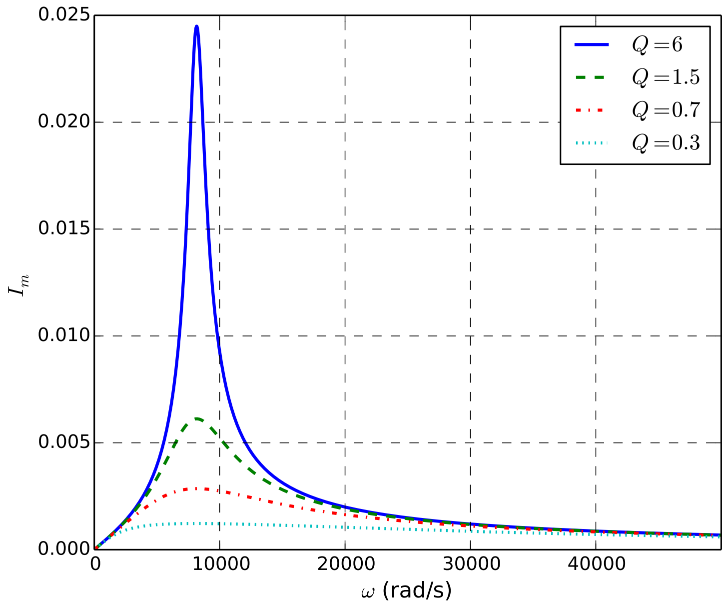
Que dire de la dépendance de l'acuité de la résonance avec le facteur de qualité ?

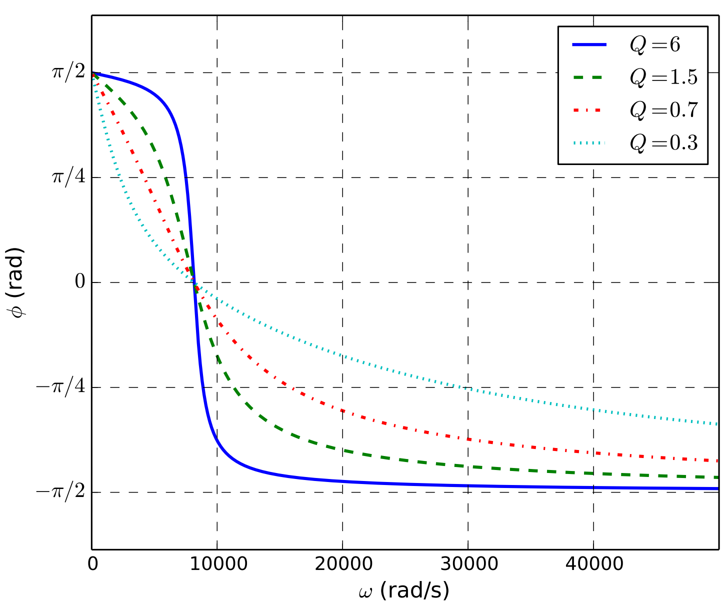
Étude du déphasage φ_i entre i et e

Q10. Que vaut le déphasage à la résonance ? Comment sont $e(t)$ et $i(t)$ à la résonance ?

Q11. Tracer l'allure de $\varphi_i(\omega)$.

Ci-dessous, les courbes de $I_m(\omega)$ et $\varphi_i(\omega)$ pour différentes valeurs de R, à L et C fixées.





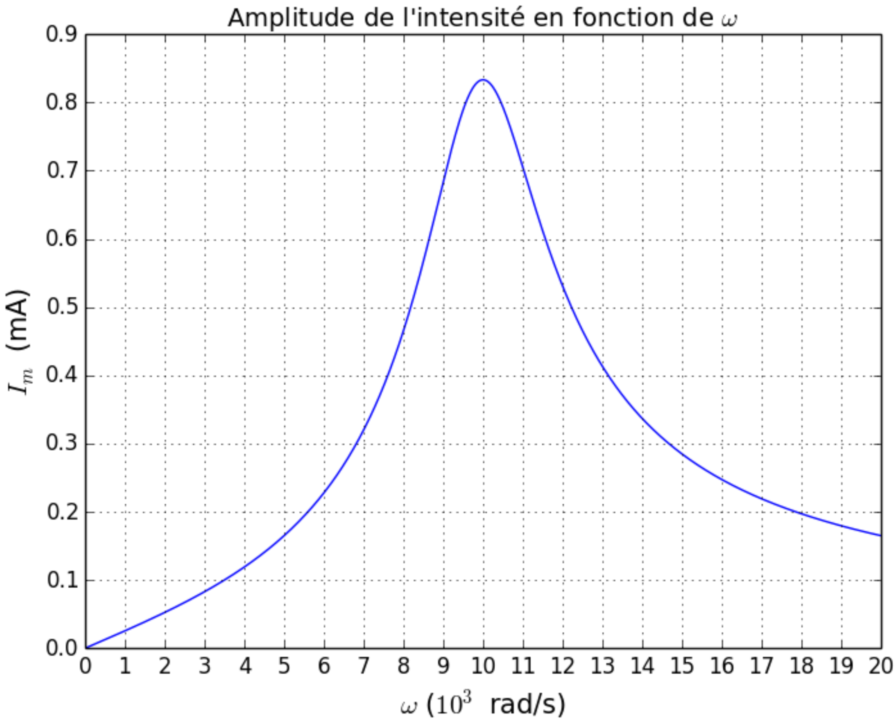
Capacité exigible : **Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.**

Méthode : Déterminer graphiquement ω_0 et Q

Quand sont fournies les courbes d'amplitude I_m et de phase φ en présence d'une résonance du type de la résonance en intensité d'un RLC série :

- Lire ω_0 sur la courbe d'amplitude : ω_0 est la pulsation pour laquelle l'amplitude est maximale (ou sur la courbe de phase : $\varphi_i(\omega_0) = 0$).
- Déterminer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$:
  - Lire la valeur maximale de l'amplitude $I_{m,\max} = I_m(\omega_0)$;
  - Calculer $\dfrac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$;
  - Lire les abscisses ω_{c1} et ω_{c2} pour lesquelles l'amplitude vaut $\dfrac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$;
  - En déduire $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$.
- En déduire le facteur de qualité $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Exercice de cours F Déterminer ω_0 et Q sur le graphique ci-dessous.



Méthode générale de l'étude d'une résonance

Méthode : Déterminer étudier l'existence d'une résonance ?

Nous souhaitons déterminer l'existence d'une résonance à partir de l'expression de l'amplitude $X_m = \dfrac{N(\omega)}{D(\omega)}$ où N et D sont des polynômes de ω.

1. Étudier l'**existence d'une résonance** revient à déterminer l'**existence d'un maximum de** X_m, et si ce maximum existe d'en déterminer la position (c'est-à-dire la pulsation ω_r qui rend X_m maximale), et éventuellement la condition sur Q de son existence.
2. Pour **étudier un maximum**, il faut tracer le **tableau de variation de** X_m, et donc pour cela le **tableau de signe de** $\frac{\mathrm{d}X_m}{\mathrm{d}\omega}$.
3. Si N ne dépend pas de ω, alors on **étudie uniquement le dénominateur** et on **trace le tableau de signe de** $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\omega}$, puis le **tableau de variation de** D **pour en déduire celui de** X_m.
4. Par exemple, si $X_m = \frac{A_m}{\sqrt{(1-x)^2+\frac{x^2}{Q^2}}}$. Il faut étudier $g : x \mapsto (1-x)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$.
   a) Exprimer $g'(x)$
   b) Chercher x_r telle que $g'(x_r) = 0$, soit après calcul : $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ qui existe à condition que $Q > 1/\sqrt{2}$
   c) Tracer le tableau de signe de g', puis le tableau de variation de g selon la valeur de Q.
   d) Conclure que g présente un minimum à condition que $Q > 1/\sqrt{2}$.
   e) Conclure sur l'existence de la résonance avec sa condition sur Q, et sur la pulsation de résonance.
5. Si N ne dépend pas de ω, et le dénominateur est de variation évidente. Par exemple, $X_m = \frac{A_m}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$
   a) Étudier l'existence du minimum de $1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$, identique à celui de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$
   b) Or $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$ et peut s'annuler, donc sa valeur minimale est 0, atteinte pour $x = 1$.
   c) Conclure sur l'existence de la résonance sans condition sur Q, et sur la pulsation de résonance.