



Thème I. Ondes et signaux (Oscillateurs)

Chapitre n°7 Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé



Résonance d'une balançoire : l'amplitude des oscillations est maximale lorsque les parents poussent « à la bonne fréquence » la balançoire.



Résonance d'un verre : lorsqu'il est soumis à une onde sonore de fréquence égale à sa fréquence propre, l'amplitude des oscillations du verre augmente, il peut alors éclater.

Vidéo : « Rupture par résonance d'un verre »
<https://www.youtube.com/watch?v=47cPhhywv0o>



Les vibrations et le phénomène de résonance sont également étudiés dans les structures comme les immeubles, les ponts afin d'éviter leur effondrement.

Le 10 juin 2000, le Millenium Bridge à Londres était inauguré. Lorsque la foule a traversé ce pont, le pont s'est mis à osciller, avec une amplitude de plusieurs centimètres, et les passants ont du se tenir aux balustrades. Après étude du phénomène, il s'avère que la fréquence des pas des passants coïncidait avec celle de résonance du pont. Des travaux ont eu lieu afin de déplacer la fréquence de résonance du pont par l'installation d'amortisseurs hydrauliques et de masse pour contrôler les oscillations horizontales et latérales.

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=59615772>

Pré-requis

- Terminale : Thème Mouvement et interactions
 - Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point : définition et expression en coordonnées cartésiennes.
 - Deuxième loi de Newton.
- PCSI : Thème Ondes et signaux.
 - Chapitre n°3. Signaux électriques dans l'ARQS.
 - Chapitre n°6. Oscillateurs libres amortis

Objectifs du chapitre

- Introduire la représentation complexe des signaux sinusoïdaux.
- Introduire les notions nécessaires à l'étude des circuits linéaires alimentés en régime sinusoïdal.
- Résoudre, en régime forcé, et en utilisant la représentation complexe les équations différentielles du type :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = A_m \cos(\omega t)$$

- Étudier le phénomène de résonance des deux systèmes étudiés dans le chapitre précédent.

Plan du cours

I Oscillateur mécanique en RSF	3
I.1 Observations expérimentales	3
I.2 Équation du mouvement	3
I.3 RT et RSF	3
I.4 Représentation complexe	4
I.4.a) Définition	4
I.4.b) Opérations	5
I.5 Résonance en élongation	6
I.5.a) Résolution : Amplitude complexe	6
I.5.b) Résonance	6
I.6 Exploitation graphique de Z_m et φ	7

II Étude de circuits linéaires en RSF	8
II.1 Impédances	8
II.2 Lois des noeuds et des mailles en RSF	10
II.3 Associations d'impédances	11
II.4 Étudier un circuit linéaire en RSF	12
III Résonances dans un circuit RLC série	12
III.1 Résonance en tension aux bornes de C	12
III.2 Analogie	13
III.3 Résonance en intensité	13
III.3.a) Bande passante à -3 dB	13
III.3.b) Étude de la résonance	14
III.3.c) Exploitation graphique	15

Ai-je bien appris mon cours ?

- 1 – 😊 – 😟 – Définir la représentation complexe d'un signal sinusoïdal.
- 2 – 😊 – 😟 – Donner l'expression de la dérivée et de la primitive de la représentation complexe d'un signal sinusoïdal.
- 3 – 😊 – 😟 – Établir l'équation du mouvement d'une masse suspendue à un ressort, dont le point d'attache est animé d'un mouvement sinusoïdal.
- 4 – 😊 – 😟 – Déterminer, à partir de l'équation différentielle, l'expression de l'amplitude complexe de la réponse à l'excitation sinusoïdale.
- 5 – 😊 – 😟 – Déterminer la pulsation de résonance de la réponse en élongation.
- 6 – 😊 – 😟 – Établir les expressions des impédances complexes des dipôles R , L et C .
- 7 – 😊 – 😟 – Donner les expressions des impédances complexes des dipôles R , L et C .
- 8 – 😊 – 😟 – Donner les comportements asymptotiques (à basse et haute fréquences) du condensateur et de la bobine.
- 9 – 😊 – 😟 – Donner l'expression de l'impédance complexe équivalente d'une association série ou parallèle de deux impédances.
- 10 – 😊 – 😟 – Donner les relations du pont diviseur de tension pour deux impédances en série et de courant pour deux impédances en parallèle.
- 11 – 😊 – 😟 – Établir les expressions des amplitudes complexes de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant dans le RLC série.
- 12 – 😊 – 😟 – Déterminer les pulsations de résonance en tension et en intensité dans le RLC série.



I Oscillateur mécanique en RSF

I.1 Observations expérimentales

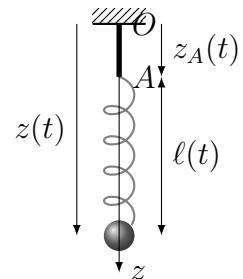
Expérience

Animation : Résonance d'un oscillateur mécanique

On étudie le dispositif ci-contre, constitué d'une masse m accrochée à un ressort vertical de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k et dont l'autre extrémité est mise en oscillation par un dispositif extérieur.

Le point A d'attache du ressort oscille sinusoïdalement à la pulsation ω :

$$\overrightarrow{OA} = z_A(t) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad z_A(t) = Z_{Am} \cos(\omega t)$$



Les frottements exercés par l'air sur le système sont modélisés par la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, avec α une constante positive qui dépend du fluide.

Qu'observez-vous ? Noter vos observations selon la fréquence (la pulsation) de l'excitation (c'est-à-dire du mouvement de A).

Définition : phénomène de résonance

On dit qu'un système excité périodiquement présente une **résonance** pour une grandeur physique lorsque l'**amplitude** de celle-ci admet un **maximum** pour une fréquence particulière de l'excitation appelée **fréquence de résonance**.

I.2 Équation du mouvement

Exercice à maîtriser n°1 – Équation du mouvement

Q1. On étudie l'équilibre de $M(m)$, en l'absence d'excitation sinusoïdale tel que $\forall t, z_A(t) = 0$.

Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre $\ell_{\text{éq}}$.

Q2. Exprimer la force de rappel élastique en fonction de k , z_A , z , ℓ_0 et \vec{u}_z .

Q3. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $z(t)$.

On repère la position de la masse M à partir de sa position d'équilibre en utilisant la variable Z telle que $Z(t) = z(t) - z_{\text{éq}}$.

Q4. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$.

La mettre sous forme canonique

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z(t) = \omega_0^2 Z_{Am} \cos(\omega t)$$

identifier les expressions de ω_0 et Q .

I.3 Régime transitoire et régime sinusoïdal forcé

La solution générale de l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$Z(t) = Z_H(t) + Z_P(t)$$

avec :

- $Z_H(t)$ la **solution générale de l'équation homogène** : elle caractérise le **régime transitoire** qui disparaît au bout de quelques fois la constante de temps caractéristique d'évolution : $\lim_{t \rightarrow \infty} Z_H(t) = 0$.
 - $Z_P(t)$ un **solution particulière**, que l'on recherche **sous la même forme que le second membre**, donc sous la forme d'une fonction sinusoïdale de même pulsation ω que le 2nd membre : $Z_P(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$
- Elle caractérise le **régime établi**.

Au bout de quelques τ : $Z(t) \approx Z_P(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$

Dans ce chapitre, nous n'étudierons pas le régime transitoire, mais uniquement le régime permanent sinusoïdal, appelé « régime sinusoïdal forcé », une fois le régime transitoire terminé. Dans le cas de l'oscillateur mécanique, la réponse en régime établi s'écrit $Z(t) = Z_p(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$ et comporte deux inconnues : l'amplitude Z_m et la phase à l'origine φ .

À retenir : Système linéaire en régime sinusoïdal forcé

La réponse d'un système linéaire soumis à une excitation sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ régi par une équation différentielle

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e$$

est, après le régime transitoire, de la forme $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$

But de la résolution : déterminer l'amplitude $Z_m(\omega)$ et la phase à l'origine $\varphi(\omega)$ qui dépendent de la pulsation de l'excitation.

Pour cela, on pourrait procéder comme dans les chapitres précédents quand le 2nd membre était constant, à savoir injecter $Z_P(t)$ dans l'équation différentielle et déterminer les inconnues (Z_m et φ). Mais les calculs s'avèrent ici très longs et fastidieux. On opte pour l'utilisation de la représentation complexe.

I.4 Représentation complexe

I.4.a) Définition

À retenir : Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

À tout signal sinusoïdal

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

on associe la représentation complexe :

Le signal complexe \underline{s} n'a pas de réalité physique, c'est uniquement un outil, c'est s qui en a : $s(t) = \Re(\underline{s})$

Introduction de l'amplitude complexe

À retenir : Amplitude et phase à l'origine des temps

■ On introduit l'amplitude complexe, notée \underline{S}_m telle que

■ L'amplitude S_m de $s(t)$ est le module de \underline{S}_m :

■ La phase à l'origine $\varphi \in [-\pi, \pi]$ de $s(t)$ est l'argument de \underline{S}_m :

Ainsi la connaissance de l'amplitude complexe \underline{S}_m donne accès aux deux grandeurs inconnues du signal $s(t)$: l'amplitude S_m et la phase à l'origine des temps φ .

Activité n°2 – Représentation complexe de signaux sinusoïdaux

$E, \omega, \tau, \omega_0, Q$ sont des réels positifs.

Q1. Donner le signal complexe associé aux signaux suivants et identifier l'amplitude complexe.

(a) $e(t) = E \cos(\omega t + \pi/3)$

(b) $i(t) = I_m \sqrt{2} \cos(\omega t)$

Q2. Donner le module des complexes ci-dessous.

(a) $\underline{U_m} = \frac{E}{1 + j\omega\tau}$

(b) $\underline{u} = \frac{E j \omega \tau}{1 + j\omega\tau} e^{j\omega t}$

(c) $\underline{U_m} = \frac{-E \omega_0^2}{-\omega^2 + j\omega\omega_0/Q + \omega_0^2}$

Q3. Comment exprime-t-on l'argument d'un nombre complexe $\underline{z} = a + ib$, si $a > 0$? si $a < 0$ et $b > 0$? si $a < 0$ et $b < 0$?

Q4. Déterminer l'expression de l'argument de $\underline{U_m}$.

(a) $\underline{U_m} = \frac{E j \omega \tau}{1 + j\omega\tau}$

(b) $\underline{U_m} = \frac{E}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$

(c) $\underline{U_m} = \frac{E \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q}}$

I.4.b) Opérations

Soit $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, de représentation complexe $\underline{s} = \underline{S_m} e^{j\omega t}$

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{s}}{dt} &= \frac{d(S_m e^{j\omega t})}{dt} & \int \underline{s} dt &= \int \underline{S_m} e^{j\omega t} dt \\ &= \underline{S_m} \times j\omega e^{j\omega t} & &= \frac{\underline{S_m}}{j\omega} e^{j\omega t} \\ &= j\omega \times \underline{s} & &= \frac{\underline{s}}{j\omega} \end{aligned}$$

À retenir : Opérations à l'aide de la représentation complexe

■ Dériver un signal complexe revient à le multiplier par $j\omega$.

$$\frac{d\underline{s}}{dt} =$$

■ Primitiver un signal complexe revient à le diviser par $j\omega$.

$$\int \underline{s} dt =$$

■ La somme de $s_1(t) = S_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ est d'amplitude complexe

$$\underline{S_m} = \underline{S_{1m}} + \underline{S_{2m}} = S_{1m} e^{j\varphi_1} + S_{2m} e^{j\varphi_2}$$

L'amplitude de $s_1(t) + s_2(t)$ s'obtient avec $S_m = |\underline{S_m}| = |\underline{S_{1m}} + \underline{S_{2m}}|$

Attention

Il est formellement interdit d'utiliser la représentation complexe pour les équations non-linéaires.

Notamment, il est interdit d'utiliser la représentation complexe pour les grandeurs énergétiques qui sont toutes non-linéaires. Pour toute étude énergétique il faut donc revenir à la notation réelle.

I.5 Résonance en élongation

Capacité exigible : Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.

I.5.a) Résolution : Amplitude complexe

Exercice à maîtriser n°3 – Amplitude complexe

On étudie la réponse de l'oscillateur mécanique régit par l'équation différentielle

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 z_A \Leftrightarrow \ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 Z_{Am} \cos(\omega t)$$

Q1. Proposer une expression de la solution $Z(t)$ en régime sinusoïdal forcé.

Q2. Donner les représentations complexes de z_A et de Z et introduire l'amplitude complexe \underline{Z}_m de \underline{Z} .

Q3. Passer l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$ en représentation complexe et en déduire l'expression de \underline{Z}_m en fonction de ω_0 , Q , ω et Z_{Am} sous la forme :

$$\underline{Z}_m = \frac{Z_{Am}}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} \quad \text{où} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Q4. Exprimer l'amplitude Z_m de $Z(t)$.

Q5. Pour mener l'étude de la phase $\varphi = \arg(\underline{Z}_m)$, il est nécessaire de connaître l'intervalle de $[-\pi, \pi]$, auquel φ appartient.

Quel est le signe de la partie imaginaire de \underline{Z}_m ? Que peut-on en déduire sur l'intervalle de φ ?

Quel est le signe de la partie réelle de \underline{Z}_m pour $x < 1$ ($\omega < \omega_0$)? pour $x > 1$ ($\omega > \omega_0$)? Que peut-on en déduire sur φ ?

I.5.b) Étude de l'amplitude : Existence d'une résonance ?

Méthode maths : les équivalents

Définition : f est équivalente à g si $(f - g)$ est négligeable devant g .

Notation : L'équivalent entre deux fonctions en a se note : $f \underset{a}{\sim} g$.

- Un équivalent en $\pm\infty$ d'une fonction polynomiale est son monôme de plus haut degré : $a + bx + cx^2 \underset{\infty}{\sim} cx^2$
- On retiendra les équivalents suivants :

$$a + bx + cx^2 \underset{0}{\sim} a \quad ax + \frac{b}{x} \underset{0}{\sim} \frac{b}{x} \quad ax + \frac{b}{x} \underset{\infty}{\sim} ax$$

Exercice à maîtriser n°4 – Étude de l'amplitude et de la phase

Étude des situations limites

Q1. Exprimer l'équivalent de \underline{Z}_m à basse fréquence (c'est-à-dire pour $x \ll 1$, soit $\omega \ll \omega_0$).

En déduire les limites de Z_m et φ à basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$). Commenter physiquement.

Q2. Exprimer l'équivalent de \underline{Z}_m à haute fréquence, (c'est-à-dire pour $x \gg 1$ soit $\omega \gg \omega_0$).

En déduire les limites de $Z_m(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$ à haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$). Commenter physiquement.

Q3. Exprimer $Z_m(\omega_0)$. En déduire $Z_m(\omega_0)$ et $\varphi(\omega_0)$. Commenter.

Résonance en élongation

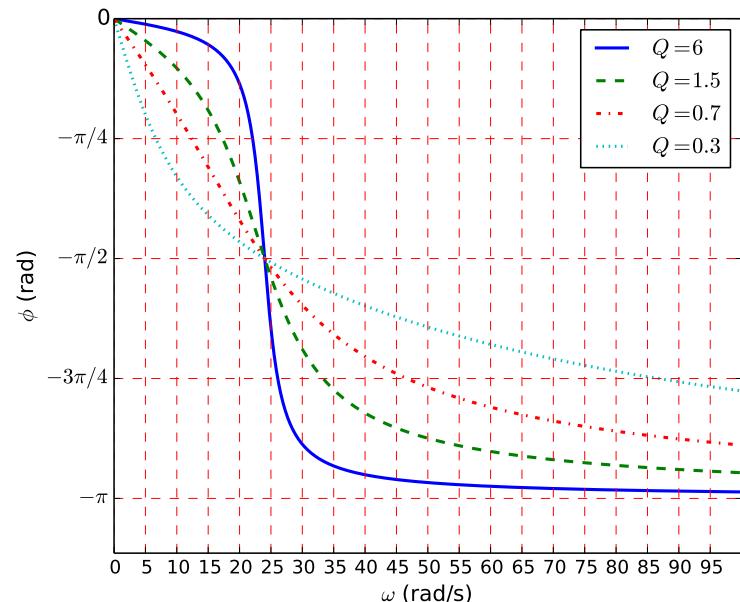
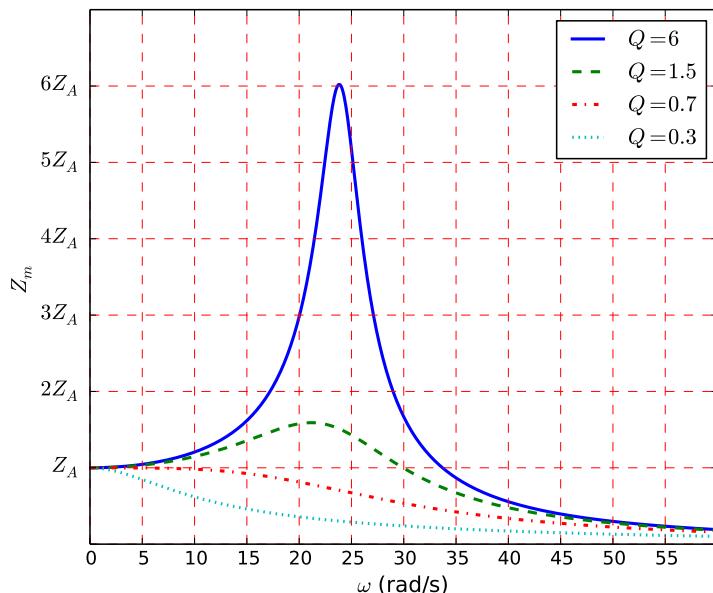
L'amplitude s'écrit : $Z_m = \frac{Z_{Am}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$. Pour mener son étude on définit la fonction $g : x \mapsto (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$.

Q4. Montrer que g admet un minimum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Exprimer x_r où g est minimale.

- Q5. En déduire qu'il se produit une résonance pour une pulsation ω_r que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q , à condition que Q vérifie une certaine inégalité.
- Q6. Tracer l'allure de $Z_m(\omega)$ pour différentes valeurs de Q .
- Q7. Quelle est l'influence du facteur de qualité sur la résonance d'elongation ?

Allure de la phase

- Q8. Tracer l'allure de $\varphi(\omega)$.



I.6 Exploitation graphique de Z_m et φ

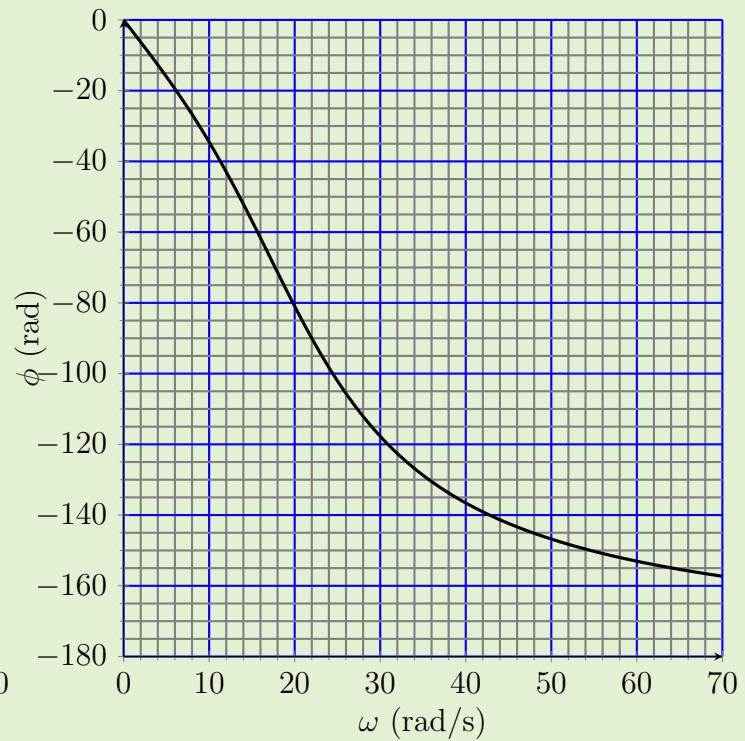
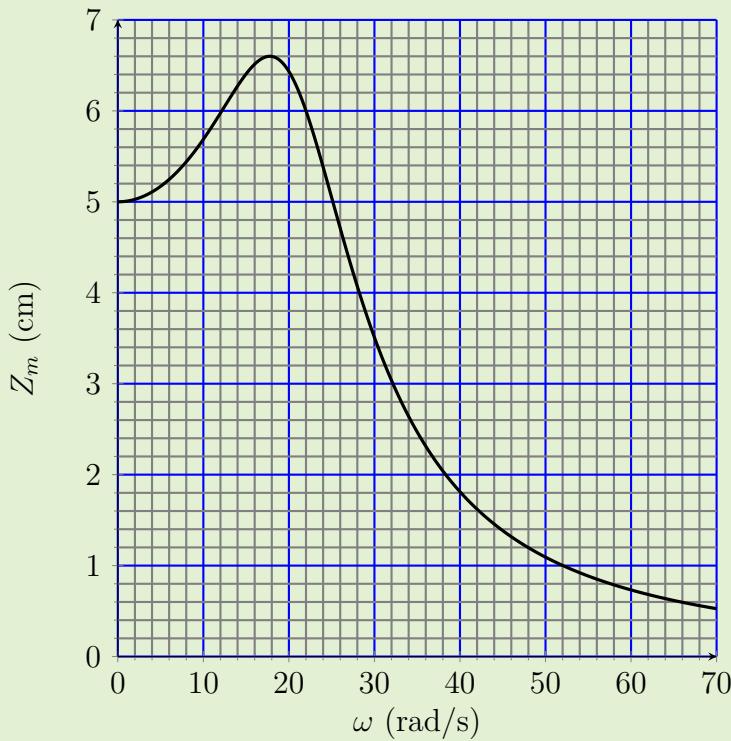
Capacité exigible : Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

Méthode : Comment déterminer graphiquement ω_0 et Q ?

En présence d'une résonance du type de celle en elongation pour un facteur de qualité modéré :

- Lire ω_0 sur la courbe de phase $\varphi(\omega)$: ω_0 est la pulsation pour laquelle $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$
- Deux méthodes sont possibles pour déterminer Q :
 - 1^{ère} méthode (possible si Q n'est pas trop élevé, et que ω_r et ω_0 sont « éloignés ») :
 - Lire la pulsation ω_r de résonance sur la courbe de $Z_m(\omega)$: ω_r est la pulsation à laquelle Z_m est maximale.
 - En déduire le facteur de qualité Q grâce à la relation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.
 - 2^{ème} méthode (nécessaire si $Q \gg 1$, et donc $\omega_r \approx \omega_0$) :
 - Lire l'amplitude $Z_m(\omega_0)$ en ω_0 et l'amplitude $Z_m(0)$ en $\omega = 0$.
 - Utiliser la relation $Z_m(\omega_0) = Q \times Z_m(0)$ pour en déduire Q .

Activité n°5 – Déterminer les valeurs de la pulsation propre et le facteur de qualité.



II Étude de circuits linéaires en RSF

Dans le chapitre précédent nous avons établi l'analogie entre le système masse-ressort et le circuit RLC série. Nous pouvons toujours utiliser cette analogie, et avoir l'intuition que nous observerons également des résonances selon les paramètres du circuit. L'étude des circuits électriques en régime sinusoïdal ne nécessite pas d'établir une équation différentielle, puis de la passer en représentation complexe, comme nous venons de le faire pour l'oscillateur mécanique, ce qui peut s'avérer un peu long pour des circuits contenant plusieurs mailles. **L'objectif de cette partie est d'introduire de nouvelles grandeurs qui pourront rendre l'étude des circuits en régime sinusoïdal très facile.**

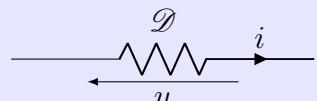
II.1 Impédances

Définitions : Impédance complexe

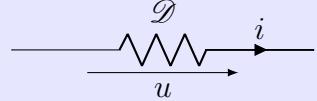
On considère un **dipôle** \mathcal{D} linéaire passif, dont la tension à ses bornes s'écrit $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ et traversé par un courant d'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$.

En régime sinusoïdal forcé et en utilisant la représentation complexe, on définit l'impédance complexe \underline{Z} du dipôle \mathcal{D} telle que :

■ En **convention récepteur**, la relation entre \underline{u} et \underline{i} s'écrit $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$



■ En **convention générateur**, la relation entre \underline{u} et \underline{i} s'écrit : $\underline{u} = -\underline{Z} \underline{i}$



Définition : Admittance complexe

L'admittance complexe est l'inverse de l'impédance complexe $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ en Siemens (S) ou en Ω^{-1}

À retenir : Caractéristiques de l'impédance complexe

■ Le module de l'impédance complexe relie les amplitudes de l'intensité et de la tension :

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} \text{ et s'exprime en Ohm } (\Omega).$$

■ L'argument de l'impédance complexe est le déphasage de la tension aux bornes du dipôle par rapport à l'intensité du courant qui le traverse : $\arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$

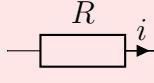
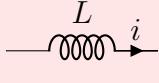
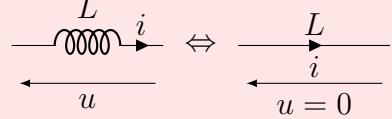
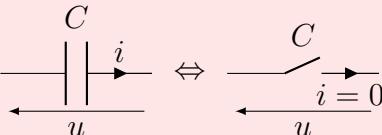
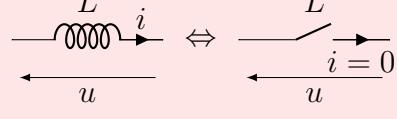
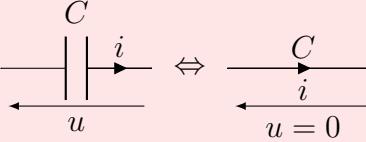
Capacité exigible : Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.

↗ Démonstration à maîtriser n°6 – Impédances des dipôles linéaires

Pour la résistance, la bobine et le condensateur,

- établir les expressions de l'impédance complexe, de l'admittance complexe, ainsi que de l'impédance et de l'admittance ;
- déterminer les comportements des dipôles à basse et haute fréquence.

À retenir

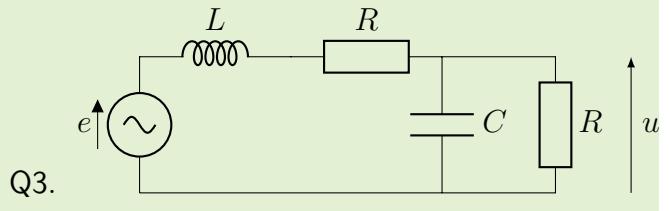
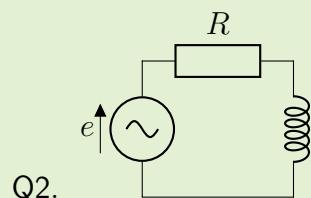
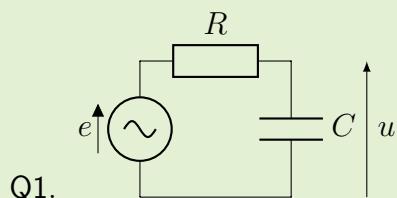
Dipôle	Résistance	Bobine	Condensateur
Schéma			
Impédance complexe	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = Lj\omega$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{Cj\omega}$
$\omega \rightarrow 0$	$Z_R \rightarrow R$	$Z_L \rightarrow 0$ 	$Z_C \rightarrow \infty$ 
$\omega \rightarrow \infty$	$Z_R \rightarrow R$	$Z_L \rightarrow \infty$ 	$Z_C \rightarrow 0$ 

⚠ Attention

Tension aux bornes d'un ...	interruuteur ouvert	fil
Intensité à travers d'un ...	NULLE	QUELCONQUE

Activité n°7 – Comportement basse et haute fréquences de circuits

Déterminer la tension u dans les circuits ci-dessous à basse et haute fréquences. Tous les circuits sont alimentés par un générateur idéal de tension de fem $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



REMARQUES

Soit un dipôle linéaire passif d'impédance complexe \underline{Z} .

- D'après les définitions ci-dessus, $Z = |\underline{Z}|$ et $\Delta\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{Z})$.
On écrit alors l'impédance complexe sous la forme $\underline{Z} = Z e^{j\Delta\varphi_{u/i}} = Z \cos(\Delta\varphi_{u/i}) + j Z \sin(\Delta\varphi_{u/i})$
Ainsi $\Re(\underline{Z}) = Z \cos(\Delta\varphi_{u/i})$ et $\Im(\underline{Z}) = Z \sin(\Delta\varphi_{u/i})$
- La relation entre impédance et admittance complexes est $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$, ce qui donne la relation entre les arguments : $\arg(\underline{Y}) = -\arg(\underline{Z})$.

II.2 Lois des nœuds et des mailles en RSF

À retenir : Lois des nœuds et des mailles en RSF

Les loi des nœuds et loi des mailles s'écrivent en RSF comme en régime permanent, tant que l'on se trouve dans le cadre de l'ARQS. Dans les circuits linéaires, l'ensemble des signaux sont de même pulsation, et on peut utiliser la représentation complexe.

- Dans une maille, préalablement orientée, la somme algébrique des tensions est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k u_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{u}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{U}_{m,k} = 0$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si la flèche de u_k est dans le sens d'orientation de la maille, et $\varepsilon_k = -1$ si la flèche de u_k est en sens opposé au sens d'orientation de la maille.

- En un nœud, la somme algébrique des intensités est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k i_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{i}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{I}_{m,k} = 0$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si le courant i_k arrive dans le nœud et $\varepsilon_k = -1$ si le courant i_k part du nœud.

Attention – Erreur à ne pas commettre

Les lois des mailles et des nœuds DOIVENT être écrites avec les AMPLITUDES COMPLEXES ou les SIGNAUX COMPLEXES, mais ne doivent pas être écrites à l'aide des amplitudes des signaux.
On ne sommera JAMAIS des amplitudes, seulement des amplitudes complexes.

II.3 Associations d'impédances

Capacité exigible : Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.

En RSF, en utilisant la représentation complexe, on associe les impédances et on écrit les relations des PDT et PDC comme pour les résistances.

À retenir

	Série	Dérivation
Schéma		
Expression de Z_eq	$Z_{\text{eq}} = Z_1 + Z_2$	$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \Leftrightarrow Z_{\text{eq}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$
Pont diviseur	de tension : $u_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} u$	de courant : $i_1 = \frac{\frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} i$

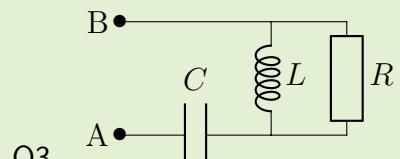
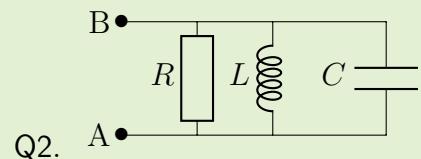
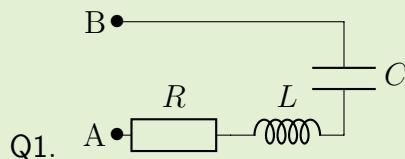
Attention – Erreurs à ne pas commettre

Avant d'utiliser les formules d'association et de ponts diviseurs, il faut s'assurer que les dipôles sont bien en série ou en parallèle.

Lors de l'utilisation des relations des ponts diviseurs, faire attention aux sens des tensions ou des courants.

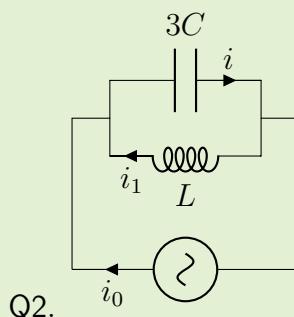
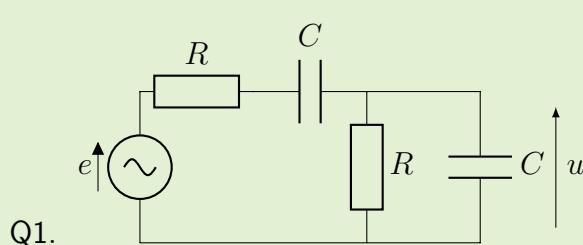
Activité n°8 – Impédances équivalentes

Pour chacun des circuits suivants, exprimer l'impédance complexe Z_{AB} équivalente au dipôle AB. On notera ω la pulsation des grandeurs électriques.



Activité n°9 – Ponts diviseurs

Établir les expressions, en utilisant la représentation complexe, de u en fonction de e ou de i et i_1 en fonction de i_0 pour les circuits ci-dessous.



II.4 Étudier un circuit linéaire en RSF

💡 Méthode : Comment étudier un circuit linéaire en RSF ?

Dans le cadre du régime sinusoïdal forcé, la représentation complexe peut (et doit !) être utilisée.

1. Écrire l'impédance de chaque dipôle linéaire passif présent dans le circuit.
2. Introduire sur le schéma du circuit, toutes les tensions et intensités nécessaires : positionner les flèches et les nommer.
3. Associer les impédances entre elles dès que possible (en série ou en parallèle), *qui ne font pas disparaître les grandeurs électriques recherchées*.
4. Écrire les lois des mailles et/ou lois des noeuds nécessaires **en représentation complexe**.
5. Ne pas oublier les PONTS DIVISEURS de tension et de courant **en représentation complexe**, bien utiles, qui remplacent des lois des mailles/des noeuds.

III Résonances dans un circuit RLC série

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Alternatif/transfert2RLC.php

⌚ Expérience : Cf TP Résonances du circuit RLC série

⌘ Relire/reprendre le compte rendu de ce TP.

III.1 Résonance en tension aux bornes de C

Capacité exigible : Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité.

✍ Exercice à maîtriser n°10 – Étude de la résonance en tension du RLC série

On souhaite déterminer les caractéristiques en RSF de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_u)$ dans le circuit RLC série alimenté par un générateur de fem $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

Comportement asymptotique

Q1. Déterminer le comportement asymptotique de U_{Cm} , sans calculs.

Amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur

Q2. Établir l'expression de U_{Cm} en fonction de E_m , ω , L , C , R .

Mettre U_{Cm} sous la forme :
$$\frac{E_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$
, et identifier les expressions de ω_0 et Q .

Q3. Commenter. Quelle situation reconnaisserez-vous ? Que pourra-t-on dire du comportement de la tension aux bornes du condensateur ?

III.2 Analogie résonance en élongation / en tension

	Résonance en élongation	Circuit RLC série aux bornes de C
Excitation	$z_A(t) = Z_{Am} \cos(\omega t)$	$e(t) = E_m \cos(\omega t)$
Équation différentielle	$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ(t) = kz_A(t)$	$L\frac{d^2u_c}{dt^2} + R\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{C}u_c = \frac{1}{C}e(t)$
Réponse de l'oscillateur en RSF, une fois le régime transitoire terminé	$Z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$	$u_c(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi)$
Amplitude complexe	$Z_m(\omega) = \frac{Z_{Am}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$	$U_{Cm}(\omega) = \frac{E_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$
Pulsation propre [rad/s]	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité [sans unité]	$Q = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}$	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Paramètres de l'oscillateur	α	R
	m	L
	k	$\frac{1}{C}$
Graphe de l'amplitude	<p>U_{Cm}, Z_m : Amplitude de la réponse</p> <p>QE_m</p> <p>E_m</p> <p>$\omega_r\omega_0$</p> <p>ω</p> <p>$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$</p> <p>$Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$</p>	
Graphe de la phase	<p>φ : Déphasage de la réponse par rapport à l'excitation</p> <p>ω_0</p> <p>ω</p> <p>$-\frac{\pi}{2}$</p> <p>$-\pi$</p>	

III.3 Résonance en intensité

III.3.a) Bande passante à -3 dB

Définition : Bande passante et pulsation de coupure

- Les **pulsations de coupure** sont les pulsations ω_c telles que

$$I_m(\omega_c) = \frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$$

- La **bande passante**, est l'intervalle de pulsation $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$ telle que pour toute pulsation $\omega \in [\omega_{c1}, \omega_{c2}]$

$$I_m(\omega) \geq \frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$$

avec $I_{m,\max}$ la valeur maximale prise par l'amplitude de l'intensité (=valeur de l'amplitude de l'intensité à la résonance).

III.3.b) Étude de la résonance

Capacité exigible : Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.

Exercice à maîtriser n°11 – Étude de la résonance en intensité dans le RLC série

On étudie l'intensité, une fois le régime transitoire terminé, dans le circuit RLC série alimenté par un générateur idéal de fem $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. On écrit l'intensité sous la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$, avec I_m l'amplitude de $i(t)$ et φ_i le déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$.

Comportement asymptotique

Q1. Déterminer, à l'aide des comportements asymptotiques des dipôles, la valeur de I_m à basse et haute fréquences.

Amplitude complexe de l'intensité

Q2. Déterminer, en représentation complexe, l'amplitude complexe I_m de l'intensité du courant.

La mettre sous la forme : $I_m(\omega) = \frac{A}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$ et identifier les trois constantes A , ω_0 et Q .

Q3. Déterminer les équivalents de l'amplitude I_m pour $\omega \ll \omega_0$ et pour $\omega \gg \omega_0$.

Q4. En déduire les valeurs limites de l'amplitude I_m de l'intensité, et du déphasage entre i et e à basse et haute fréquence.

Étude de l'amplitude I_m

Q5. Déterminer l'expression de $I_m(\omega)$.

Q6. Étudier l'existence d'une résonance.

Q7. Tracer l'allure de $I_m(\omega)$.

Q8. Déterminer les expressions des pulsations de coupure en fonction de ω_0 et Q .

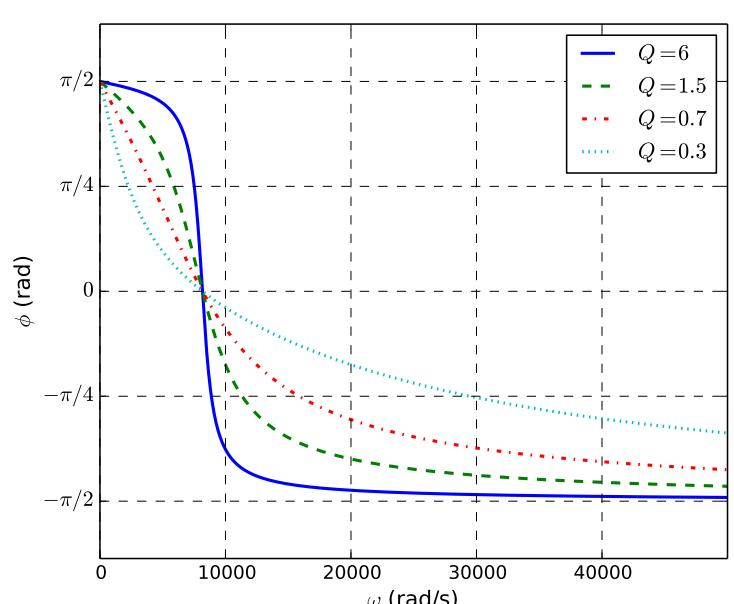
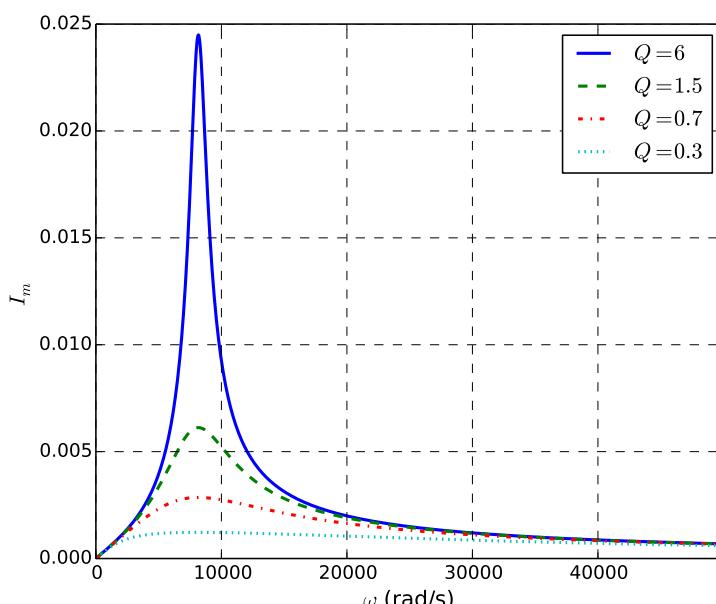
Q9. En déduire que la largeur de la bande passante $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ est reliée à Q par : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

Que dire de la dépendance de l'acuité de la résonance avec le facteur de qualité ?

Étude du déphasage φ_i entre i et e

Q10. Que vaut le déphasage à la résonance ? Comment sont $e(t)$ et $i(t)$ à la résonance ?

Q11. Tracer l'allure de $\varphi_i(\omega)$.



$I_m(\omega)$ et $\varphi_i(\omega)$ pour différentes valeurs de R , à L et C fixées.

♥ À retenir : Largeur de la bande passante et facteur de qualité

La largeur de la bande passante est reliée au facteur de qualité par :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Plus le facteur de qualité est élevée, plus la bande passante est faible, plus la résonance est aigüe.

III.3.c) Exploitation graphique

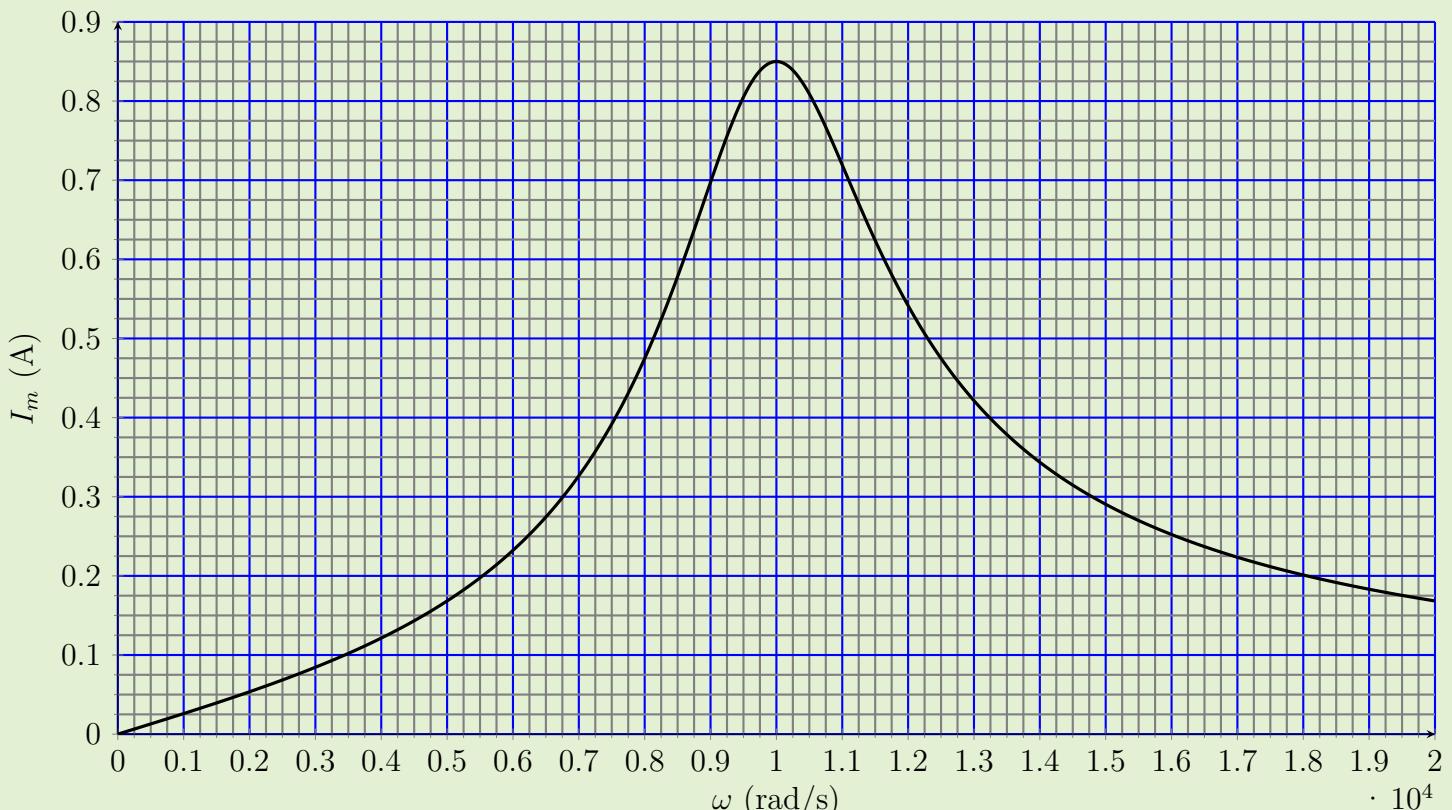
Capacité exigible : Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

💡 Méthode : Déterminer graphiquement ω_0 et Q

Quand sont fournies les courbes d'amplitude I_m et de phase φ en présence d'une résonance du type de la résonance en intensité d'un RLC série :

- Lire ω_0 sur la courbe d'amplitude : ω_0 est la pulsation pour laquelle l'amplitude est maximale (ou sur la courbe de phase : $\varphi_i(\omega_0) = 0$).
- Déterminer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$:
 - Lire la valeur maximale de l'amplitude $I_{m,\max} = I_m(\omega_0)$;
 - Calculer $\frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$;
 - Lire les abscisses ω_{c1} et ω_{c2} pour lesquelles l'amplitude vaut $\frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$;
 - En déduire $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$.
- En déduire le facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

❖ Activité n°12 – Déterminer ω_0 et Q sur le graphique ci-dessous.



Comment déterminer graphiquement ω_0 et Q ?

Nous avons rencontré deux types de résonance, de natures très différentes. La lecture graphique de ω_0 et Q est différente dans les deux cas.

On considère un système linéaire excité par une excitation sinusoïdale $x_{\text{exc},m} = X_{\text{exc},m} \cos(\omega t)$ dont on étudie la réponse d'une grandeur physique (tension, intensité, position, vitesse,...) exprimée selon $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Type élongation / tension aux bornes du condensateur dans le RLC série

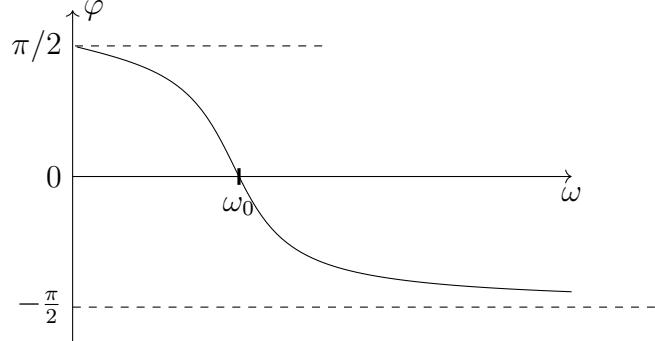
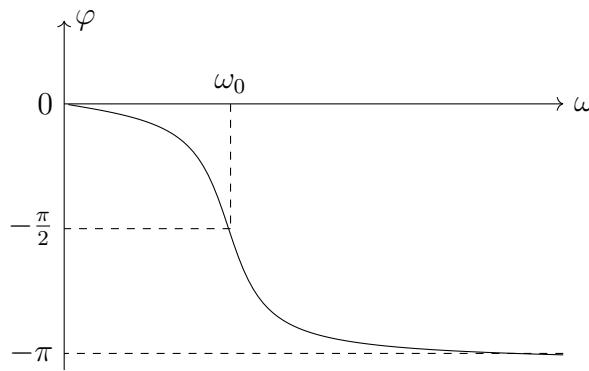
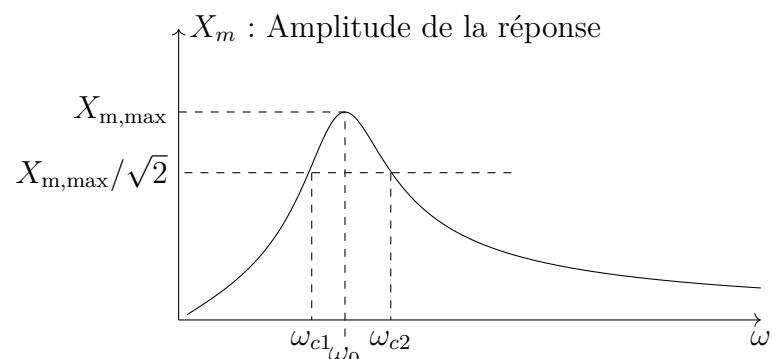
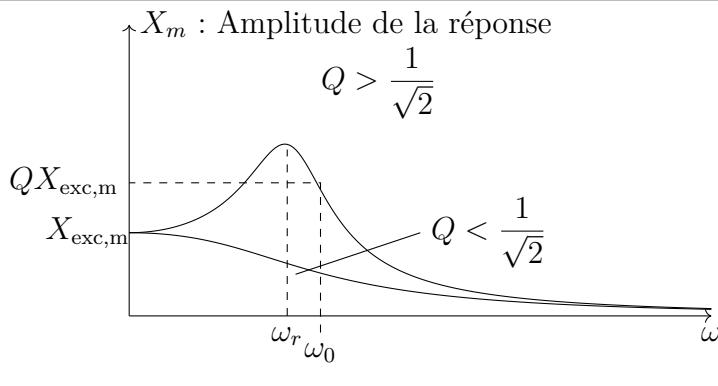
Type intensité dans le RLC série

Expressions

$$X_m = \frac{X_{\text{exc},m}}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}}$$

$$X_m = \frac{X_{\text{m,max}}}{1 + jQ \left(u - \frac{1}{u} \right)}$$

Courbes



Pulsation propre ω_0 ?

ω_0 est l'antécédent de $-\frac{\pi}{2}$, à lire sur la courbe de phase

ω_0 est l'antécédent de la phase $\varphi = 0$, à lire sur la courbe de phase ou ω_0 est l'antécédent du maximum de la courbe de X_m .

Facteur de qualité Q ?

Résonance pour la pulsation : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$
Lire ω_r c'est l'antécédent du maximum de X_m .
En déduire $Q = \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \right)}}$

Lire les pulsations de coupure ω_c (les antécédents) telles que $X_m(\omega_c) = \frac{X_{\text{m,max}}}{\sqrt{2}}$
 $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ avec $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

QUAND LE PONT BALANCE, LES PIÉTONS DANSSENT

On croyait tout savoir sur la conception des ponts.
En fait, on avait oublié l'effet de leurs vibrations
sur la marche des piétons qui les franchissent.

Le 10 juin 2000, le Millennium Bridge (la «passerelle du millénaire»), à Londres, était inauguré. Alors qu'une foule compacte le traversait, le pont s'est mis à osciller d'un côté à l'autre. L'amplitude du mouvement a atteint plusieurs centimètres, au point que les personnes étaient obligées de se tenir aux balustrades pour ne pas tomber. Les autorités fermeront la passerelle au public deux jours plus tard. Et il faudra 18 mois et 5 millions de livres de travaux sur la structure pour empêcher que la situation se reproduise.

Pourquoi les ingénieurs n'avaient-ils pas prévu une oscillation aussi forte? En fait, un mécanisme original avait échappé à toutes les modélisations antérieures: lorsque les piétons sont assez nombreux, leur marche se synchronise spontanément avec les oscillations de la passerelle.

Pour comprendre les oscillations du Millennium Bridge, deux catastrophes datant du xix^e siècle sont riches d'enseignements. La première s'est produite en 1831 avec le pont de Broughton, au Royaume-Uni: il s'est effondré lorsqu'une troupe de 60 militaires marchant au pas le franchissait. Pourquoi? À cause d'un effet de résonance bien connu, dû à la coïncidence entre la fréquence du pas des soldats avec l'une des fréquences naturelles de vibration du pont.

RÉSONNANCE SUR PONT OU SUR BALANÇOIRE

Le phénomène est le même que celui à l'œuvre lorsqu'on pousse un enfant sur une balançoire à chaque fois qu'il revient vers nous. Il n'est pas nécessaire que l'énergie fournie à chaque poussée soit importante pour que l'amplitude de l'oscillation augmente. Il suffit qu'elle soit

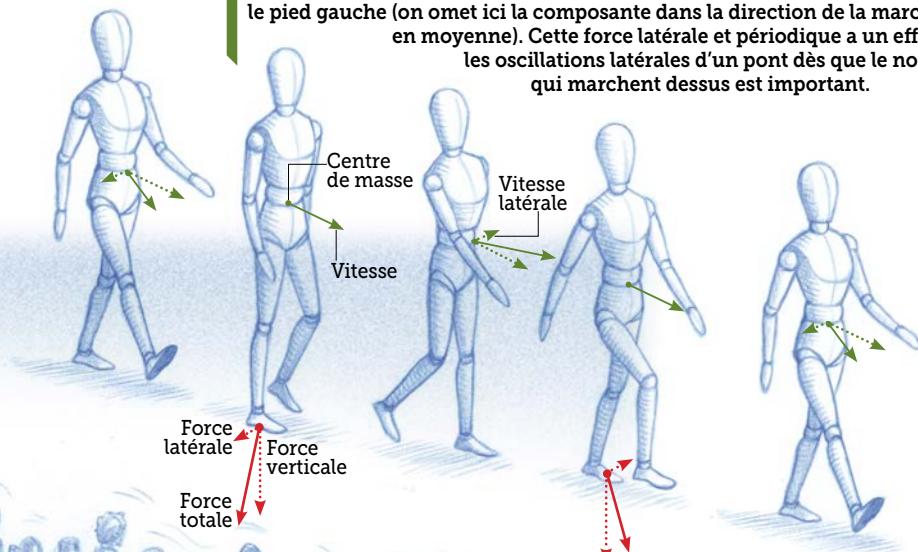


supérieure aux pertes subies par la balançoire lors d'une oscillation.

Dans le cas du pont de Broughton, l'effet d'un seul piéton marchant normalement était insuffisant pour le faire vibrer, car la dissipation l'emportait. Tel n'était plus le cas lorsque l'énergie était apportée par 60 gaillards marchant au pas; d'autant plus que, amusés par les oscillations naissantes, ils se sont mis à marcher au rythme exact des mouvements du pont. Ainsi, à chaque pas, l'effet de l'impulsion verticale des pieds s'ajoutait à celui des pas précédents. L'amplitude des vibrations - ici verticales - s'est alors amplifiée jusqu'à ce que le pont cède.

UNE FORCE QUI SE DANDINE

Lorsqu'une personne marche, son centre de masse fait des va-et-vient verticalement, mais aussi latéralement. Ce mouvement latéral a pour conséquence que le pied qui touche le sol exerce sur celui-ci une force ayant une petite composante latérale, vers la droite pour le pied droit et vers la gauche pour le pied gauche (on omet ici la composante dans la direction de la marche, qui est nulle en moyenne). Cette force latérale et périodique a un effet sensible sur les oscillations latérales d'un pont dès que le nombre de piétons qui marchent dessus est important.



Lors de son inauguration, le Millennium Bridge a oscillé latéralement de façon inquiétante, en relation avec une synchronisation des mouvements des nombreux piétons.

restent limités et ne nuisent pas au confort de la marche.

Ces contraintes sont bien connues depuis longtemps et parfaitement intégrées par les cabinets d'architecture. Alors que s'est-il passé sur le Millennium Bridge? Une autre catastrophe va nous orienter vers la réponse. Le 16 avril 1850, en France, 220 soldats du 11^e régiment d'infanterie légère et 3 civils ont trouvé la mort lors de l'effondrement du pont de la Basse-Chaîne à Angers, l'un des premiers >

Les auteurs ont récemment publié : **En avant la physique!**, une sélection de leurs chroniques (Belin, 2017).



Soyons un peu plus quantitatifs. Lorsque nous marchons, nous faisons, en gros, deux pas par seconde. Cela signifie que deux fois par seconde, c'est-à-dire à une fréquence de 2 hertz, nous appuyons sur le sol vers le bas avec une force dont l'amplitude moyenne est égale à notre poids. Et avec 60 piétons marchant au pas, l'ensemble de ces individus engendre une force périodique dont l'amplitude est 60 fois celle d'une personne.

Cependant, si les marcheurs ne se coordonnent pas, l'amplitude totale est bien plus faible, car certains vont par exemple marcher à contretemps. Les lois des phénomènes aléatoires montrent que la force augmente alors comme la racine

carrée du nombre de marcheurs. Autrement dit, la force exercée par une foule de 60 piétons sur un pont est près de 8 fois supérieure à celle exercée par 1 piéton, mais 8 fois plus faible que celle de 60 individus marchant au pas.

On comprend donc pourquoi, depuis la catastrophe de Broughton, les militaires ont pour consigne de rompre le pas sur les ponts. On comprend également pourquoi les ingénieurs conçoivent des ponts dont les fréquences naturelles de vibration diffèrent de 2 hertz. Ils font aussi en sorte que les vibrations du pont soient amorties au voisinage de cette fréquence, afin que les mouvements vitaux du pont engendrés par les marcheurs

► ponts suspendus. L'ordre avait pourtant été donné aux soldats de rompre le pas. Toutefois, sous l'effet de rafales de vent, le pont a commencé à s'agiter latéralement. Pour s'équilibrer, les soldats se sont portés d'un côté puis de l'autre; ces mouvements coordonnés ont alors amplifié les embardées horizontales du pont jusqu'à provoquer son effondrement. Ainsi, alors qu'en arrivant sur le pont, les soldats avaient cessé de coordonner leurs pas, les oscillations de la structure ont resynchronisé ces derniers!

UNE SYNCHRONISATION INATTENDUE

C'est un phénomène de même nature qui s'est produit à Londres avec le Millennium Bridge, mais selon un mécanisme non anticipé. Lorsque nous marchons, nos deux pieds avancent chacun sur deux lignes parallèles distantes l'une de l'autre de la largeur de nos hanches. Par conséquent, en plus d'oscillations verticales, notre centre de masse oscille horizontalement.

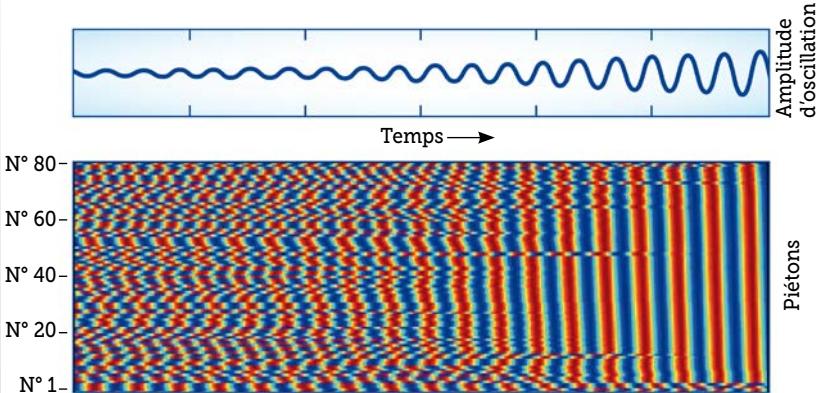
La force exercée par nos pieds sur le sol a donc une petite composante horizontale dirigée vers l'extérieur du pied: vers la gauche pour le pied gauche, vers la droite pour le pied droit (*voir l'encadré page précédente*). Comme nous posons chaque pied une fois par seconde, la fréquence de cette force latérale est de 1 hertz. Son amplitude est de l'ordre de 1 % du poids, et l'on s'attend donc à un effet très faible.

C'est vrai pour l'effet sur l'amplitude du mouvement du pont qui, dans notre cas, n'a jamais dépassé quelques centimètres, mais pas pour l'effet sur la marche des piétons. Pourquoi? Parce que lorsque le sol bouge sous nos pieds, nous sommes bien plus déstabilisés par des mouvements latéraux que par des mouvements verticaux; nous essayons alors de retrouver notre équilibre par des réajustements de la position des pieds et divers autres mouvements.

Détailons. Puisque les piétons ne marchent pas tous exactement au même rythme, l'amplitude de la force latérale est de l'ordre de la force d'un seul marcheur multipliée par la racine carrée du nombre de piétons. Cela fait légèrement osciller latéralement le pont. Tant que l'amplitude de cette oscillation reste faible, les piétons ne sont pas perturbés. Mais quand le nombre de marcheurs est élevé, elle devient assez importante pour affecter la marche de quelques-uns, ceux dont les pas étaient pratiquement au rythme des oscillations latérales.

DES MARCHES QUI SE SYNCHRONISENT

Diverses modélisations et simulations numériques ont reproduit le phénomène de synchronisation de la marche de piétons qui franchissent un pont, sous l'effet des oscillations latérales de celui-ci. Les graphiques ci-dessous montrent les résultats d'une telle modélisation, publiée en 2017 par Bruno Eckhardt et ses collègues (*voir la bibliographie*). Le graphique du haut montre l'amplitude des oscillations du pont en fonction du temps; celui du bas représente, toujours en fonction du temps, la phase de la marche (*codée en couleur*) de chaque piéton d'une foule constituée de 80 personnes. On constate que l'amplitude des oscillations augmente à mesure que les marches des piétons se synchronisent.



Ces piétons vont alors spontanément synchroniser leurs pas avec les mouvements du pont, ce qui accroît l'amplitude des oscillations. Celles-ci deviennent alors suffisantes pour affecter des piétons qui étaient un peu moins en rythme et les synchroniser. Ainsi, par un effet boule de neige, l'amplitude des oscillations et le nombre de piétons qui marchent en synchronie se renforcent mutuellement. Les accélérations latérales atteignent alors des valeurs suffisantes (de l'ordre de 0,3 mètre par seconde carrée, soit 3 % de l'accélération de la pesanteur) pour déséquilibrer les marcheurs.

Des simulations numériques et des expériences en grandeur réelle sont venues confirmer quantitativement cette explication (*voir l'encadré ci-dessus*). L'effet avait été mentionné depuis longtemps, à la fois par des ingénieurs et par des scientifiques, mais il était considéré comme anecdotique. Il a fallu la mésaventure du Millennium Bridge et les études qui ont suivi pour qu'on l'identifie clairement et qu'on le prenne en compte correctement dans les modélisations et la construction de nouveaux ponts. Cet incident a aussi permis de se rendre compte que ce phénomène d'oscillation latérale n'était pas isolé et concernait de nombreux ponts dans le monde, quel que soit leur type de structure. ■

ET LE PONT DE TACOMA ?

La rupture en 1940 du fameux pont de Tacoma, aux États-Unis, ne relève pas des mécanismes de résonance ou de synchronisation décrits ici. Cette catastrophe était due à l'interaction des oscillations de torsion du pont avec les tourbillons d'air créés au niveau du pont par des vents forts (*voir « Pont de Tacoma : la contre-enquête », Pour la Science, février 2008*).

BIBLIOGRAPHIE

B. Eckhardt et al., **Modeling walker synchronization on the Millennium Bridge**, *Physical Review E*, vol. 75, article 021110, 2017.

P. Dillard et al., **The London Millennium Footbridge**, *The Structural Engineer*, vol. 79(22), pp. 17-33, 2001.

Vidéo de l'oscillation du Millennium Bridge en 2000 : www.youtube.com/watch?v=eAXVa__XWZ8