

▼Thème I. Ondes et signaux (Oscillateurs)

TD n°7 Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé

Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7
Capacités		_		1			•
Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une		4	\$		4	4	
bobine.			9				
Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une		\$	\$		4	4	4
impédance équivalente.							
Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$
Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.	\$	\$	\$	\$			
Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes			\$				
expérimentaux d'amplitude et de phase.			3				

Parcours possibles

- ♪ Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2 + cahier d'entraı̂nement : 5.2, 5.3, 5.4, 5.5
- ightharpoonup Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°1, n°3, n°4.
- ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : exercices n°3, n°4, n°7, n°5, n°6.

Exercice n°0 Calculs fondamentaux du chapitre \(\formage \)

- Q1. Quelle est l'expression générale en régime sinusoïdal forcé de la solution de $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z(t) = \omega_0^2 Z_{Am} \cos(\omega t)$
- Q2. **Donner** la représentation complexe de $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$. Définir l'amplitude complexe $\underline{S_m}$. Comment en déduire l'amplitude S_m et la phase φ ?
- Q3. À partir de l'équation différentielle (E), établir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z_m}$ de \underline{Z} .
- Q4. Exprimer l'amplitude Z_m si l'amplitude complexe est $\underline{Z_m} = \frac{Z_{Am}}{1 x^2 + j\frac{x}{Q}}$, avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.
- Q5. Justifier qu'il se produit une résonance en une pulsation ω_r que l'on **exprimera** en fonction de ω_0 et Q, à condition que Q vérifie une certaine condition que l'on **exprimera**.

Tracer qualitativement l'allure de Z_m en fonction de ω .

Q6. On donne l'expression de l'amplitude complexe de l'intensité du circuit RLC série : $\underline{I_m} = \frac{E_m/r}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

Exprimer son amplitude puis justifier l'existence d'une résonance quelque soit la valeur de Q. Tracer qualitativement l'allure de $|\underline{I}_m|$ en fonction de ω .

Que peut-on dire de la phase à la résonance?

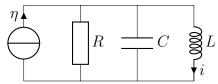


Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Résonance en intensité du RLC parallèle 🥕

Un circuit RLC parallèle est alimenté par une source de courant idéale, traversée par une intensité $\eta(t) = \eta_m \cos(\omega t)$.

On souhaite étudier l'intensité du courant qui parcourt la bobine d'inductance L, recherchée sous la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.



- Q1. Associer les deux dipôles pouvant l'être. Reconnaître une situation connue pour pouvoir exprimer rapidement \underline{i} en fonction de η .
- Q2. Montrer que l'amplitude $\underline{I_m}$ complexe de l'intensité s'écrit sous la forme

$$\underline{I_m} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \eta_m \quad \text{où} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Déterminer les expressions de ω_0 et Q.

- Q3. En déduire l'expression de $G(\omega)$ défini par le rapport $\frac{I_m}{n}$.
- Q4. Déterminer les extrema de $G(\omega)$.

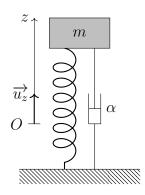
Montrer qu'il existe un phénomène de résonance pour une pulsation ω_r que l'on exprimera, à condition que R soit supérieure à une certaine résistance R_c dont on déterminera l'expression en fonction de L et C.

Q5. Tracer l'allure de $G(\omega)$ dans les deux cas : $R < R_c$ et $R > R_c$.

Résonance en vitesse 🎝 Exercice n°2

Lorsqu'un moteur de compresseur fonctionne, il est à l'origine de vibrations périodiques qui peuvent entraîner des déplacements importants du châssis. Pour minimiser ce phénomène, il est nécessaire de prévoir un système de suspension et d'amortissement. On assimile le moteur à un point matériel de masse m posé sur l'association d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 avec un amortisseur exerçant une force de freinage $\overline{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$ avec \overrightarrow{v} la vitesse du moteur et α une constante positive.

Pour exprimer la position du moteur z(t), on choisit un axe vertical (Oz) ascendant dont l'origine est à la position d'équilibre de la masse m.



- Q1. Exprimer la longueur du ressort à l'équilibre lorsque le moteur ne fonctionne pas.
- Q2. Exprimer la force de rappel élastique en fonction de $k, z, \ell_{\text{éq}}, \ell_0, \overrightarrow{u_z}$, puis en fonction de $k, z, m, g, \overrightarrow{u_z}$.

En fonctionnement, tout se passe comme si une force supplémentaire $\overrightarrow{F} = F_0 \cos(\omega t) \overrightarrow{u_z}$ agissait sur le moteur.

Q3. Établir l'équation différentielle satisfaite par z(t) lorsque le moteur fonctionne sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

On s'intéresse ici à la vitesse $v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$. En régime sinusoïdal forcé, on la cherche sous la forme $v_z = V_0 \cos(\omega t + \phi)$.

Q4. Montrer que l'amplitude complexe de la vitesse définie par $\underline{V} = V_0 e^{j\phi}$ vérifie l'équation :

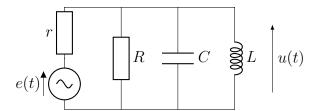
$$\underline{V}\left(\frac{\alpha}{m} + j\left(\omega - \frac{k}{m\omega}\right)\right) = \frac{F_0}{m}$$

- Q5. En déduire l'expression de \underline{V} , puis de V_0 en fonction de ω , $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\frac{\alpha}{m}$ et $\frac{F_0}{m}$.
- Q6. Déterminer la pulsation de résonance. Existe-t-il une condition sur α pour qu'elle existe? Si oui, laquelle?
- Q7. Tracer l'allure de $V_0(\omega)$.
- Q8. La pulsation vaut $\omega = 628 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et le moteur a une masse m = 10 kg. On dispose de deux ressorts de raideur respective $k_1 = 4,0.10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $k_2 = 1,0.10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Lequel faut-il choisir?

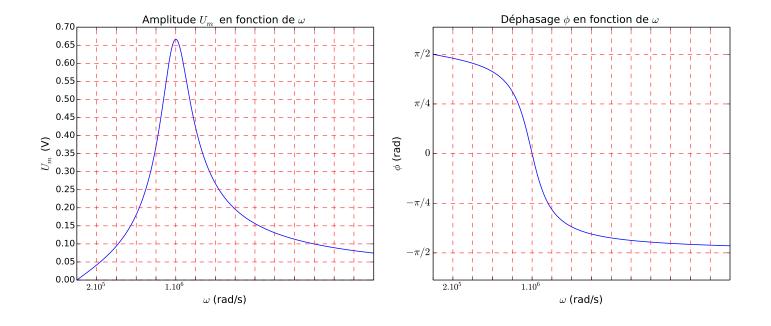
II Exercices d'approfondissement

Exercice n°3 Circuit RLC parallèle 🎝 🎝

On considère le circuit représenté ci-contre. Il est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale : $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



- Q1. **Déterminer** les valeurs de l'amplitude U_m de u(t) à basse et haute fréquence en étudiant le comportement asymptotique des dipôles.
- Q2. Établir l'expression de l'admittance complexe au dipôle RLC parallèle.
- Q3. Établir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U_m}$ de la tension u en fonction de E_m , r, R, L, C et ω . La mettre sous la forme : $\underline{U_m} = \frac{AE_m}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$, et identifier les expressions de A, Q et ω_0 (faites attention aux unités des différentes grandeurs!).
- Q4. Justifier l'existence d'une résonance pour une pulsation que l'on exprimera.
- Q5. Après avoir **rappelé la définition** de la bande passante à -3 dB, **donner** l'expression de sa largeur en fonction de ω_0 et Q.
- Q6. Pour quelle pulsation la tension u(t) est-elle en phase avec le générateur e(t)?
- Q7. Déterminer ω_0 et Q à l'aide des graphes ci-dessous. Justifier la réponse.

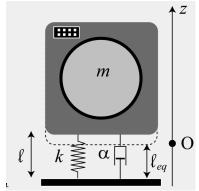




Exercice n°4 Lave-linge 🎝 🎝

Lorsqu'un lave-linge fonctionne, un balourd provoqué par le linge en rotation provoque des vibrations du châssis et il est nécessaire de prévoir un système de suspension du tambour. On assimile le tabour lesté à un point matériel de masse m relié à une suspension modélisée par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce une force de frottement fluide $\overrightarrow{f_v} = -\alpha \overrightarrow{v}$. Le balourd provoque l'apparition d'une force supplémentaire sinusoïdale de la forme $\overrightarrow{f_e} = A_0\omega^2\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$ où ω est la pulsation (vitesse angulaire) du moteur.





 $M\'{e}canique$ - Licence/CPGE, Dunod

- Q1. Dans un premier temps, on suppose le moteur à l'arrêt. **Exprimer** la longueur du ressort ℓ_{eq} à l'équilibre en fonction de ℓ_0, k, m et g.
- Q2. On pose $z(t) = \ell \ell_{eq}$. Montrer que le mouvement de la masse m est régie par l'équation différentielle

$$\ddot{z} + 2\Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = A\omega^2 \cos(\omega t)$$

où l'on précisera les expressions de A, ω_0 et Γ . Calculer ω_0 et Γ .

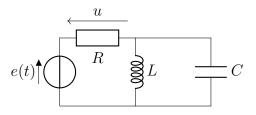
- Q3. On étudie dans la suite le régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω . Exprimer l'amplitude Z_m des oscillations du mobile.
- Q4. Tracer qualitativement $Z_m(\omega)$.
- **Q5**. Le tambour tourne à $\omega = 1, 0 \cdot 10^3 \, \mathrm{tr} \cdot \mathrm{min}^{-1}$.

Calculer $Z_m(\omega)$ et $Z_{\max} = Z_m(\omega_0)$. Vérifiez que le système est bien dimensionné pour éviter des déplacements trop importants.

Données : m = 10 kg; $k = 9 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $\alpha = 1 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$; $A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^2$

Exercice n°5 Circuit bouchon J J J

On considère le circuit ci-contre avec $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On étudie la tension aux bornes de la résistance en régime sinusoïdal forcé : $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$.



- Q1. Établir l'expression de \underline{u} .
 - On introduira la pulsation caractéristique et le facteur de qualité.

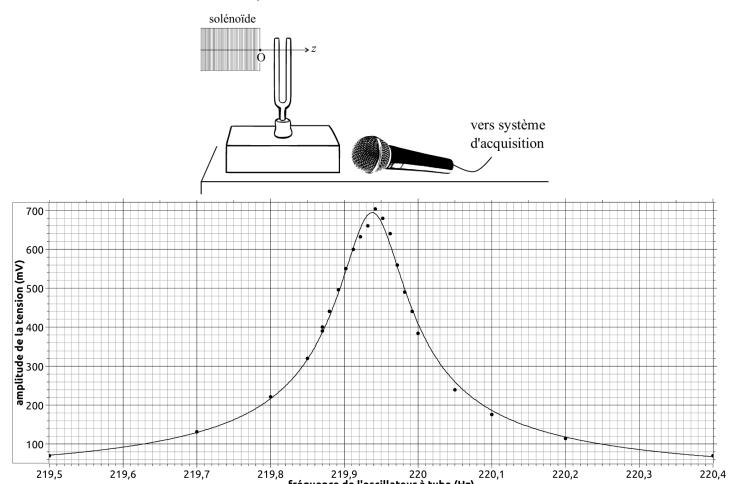
En déduire l'amplitude complexe $\underline{U_0}$ en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Q2. Étudier et tracer le module de U_0 en fonction de x. Montrer qu'il existe une anti-résonance (pulsation pour laquelle l'amplitude U_0 est minimale).



III Résolution de problèmes

Exercice n°6 Résonance d'un diapason 🎝 🎝

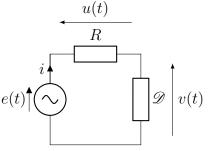


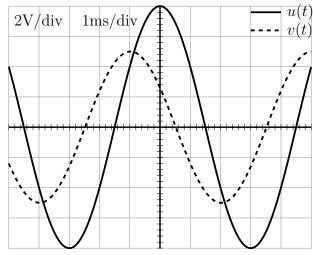
Un diapason est mis en vibration par un champ magnétique sinusoïdal créé par le solénoïde. On obtient la courbe à droite qui donne l'amplitude de la tension aux bornes du microphone enregistrant le son émis par la caisse de résonance du diapason en réponse au forçage en fréquence.

En exploitant le graphe, estimer la fréquence propre et le facteur de qualité du diapason. Commenter.

Exercice n°7 Nature d'un dipôle inconnu 🎝 🎝 🎝

Dans le montage ci-dessous, le GBF délivre une tension sinusoïdale e(t) de fréquence f. R est une résistance connue $(R=100~\Omega)$ et $\mathscr D$ un dipôle inconnu. On visualise à l'oscilloscope v(t) et u(t) avec des calibres identiques sur les deux voies.





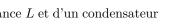
- Q1. Sachant que le GBF et l'oscilloscope utilisés sont tous les deux munis de prises de terre, quel problème expérimental devra-t-on résoudre pour visualiser simultanément v(t) et u(t)?
- Q2. On note $\underline{Z} = X + jY$ l'impédance du dipôle \mathcal{D} . Déterminer à partir de la courbe les valeurs de X et de Y.
- Q3. Par quel dipôle peut-on modéliser \mathcal{D} ? Donner ses caractéristiques.

Extraits du cahier d'entrainement de physique-chimie

Nombres complexes et association de dipôles

Entraînement 5.1 — Un entraî	nement fondamental.		0000
Un nombre complexe peut se mettre	e sous les formes suivantes :		
• $\underline{Z} = a + \mathrm{j}b$ avec a sa partie réel	le et b sa partie imaginaire;		
• $\underline{Z} = Z_0 \exp(j\varphi) = Z_0 (\cos(\varphi) + \varphi)$	$j\sin(\varphi)$) avec $Z_0 \geqslant 0$ son module et	$\varphi \in \mathbb{R}$ un argument.	
a) Exprimer Z_0 en fonction de a et	t b		
b) On suppose $a \neq 0$. Exprimer tan	$n(\varphi)$ en fonction de a et b		
On suppose que $\varphi \in]-\pi,\pi].$			
c) Si $a\geqslant 0$, que peut-on dire de φ	?		
(a) $\varphi \in [0,\pi]$	$\bigcirc \varphi \in [\pi/2,\pi]$	$\bigcirc \varphi \in [-\pi/2,\pi/2]$	
	$ (d) \varphi \in]-\pi,0] $	$ \widehat{(\mathbf{f})} \ \varphi \in \]-\pi/2,0]$	
d) Si $a > 0$ et $b \le 0$, que peut-on d	ire de φ ?		
(a) $\varphi \in [0,\pi]$	$\bigcirc \varphi \in [\pi/2,\pi]$	$\bigcirc \varphi \in [-\pi/2,\pi/2]$	
	$ (d) \varphi \in]-\pi,0] $	$(\widehat{\mathbf{f}}) \ \varphi \in \]-\pi/2,0]$	

Entraînement 5.2 — Impédances complexes des composants de base.



0000

Les impédances complexes d'un résistor de résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C auxquels on impose une pulsation ω sont respectivement :

$$\underline{Z}_R = R, \qquad \underline{Z}_L = \mathrm{j} L \omega \qquad \mathrm{et} \qquad \underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{i} C \omega}.$$

Calculer le module Z_0 et l'argument $\varphi \in]-\pi,\pi]$ de chacune de ces impédances.

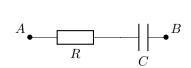
- a) $Z_0 \operatorname{de} \underline{Z}_R$ c) $Z_0 \operatorname{de} \underline{Z}_L$ e) $Z_0 \operatorname{de} \underline{Z}_C$ b) $\varphi \operatorname{de} \underline{Z}_R$ d) $\varphi \operatorname{de} \underline{Z}_L$ f) $\varphi \operatorname{de} \underline{Z}_C$

On rappelle la règle pour déterminer l'impédance complexe équivalente à celle de dipôles associés :

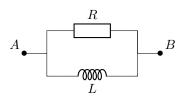
▶ si les dipôles sont en série : $\underline{Z}_{\rm eq} = \sum_i \underline{Z}_i$ ▶ si les dipôles sont en parallèle : $\underline{Z}_{\rm eq} = \frac{1}{\sum_i 1/\underline{Z}_i}.$

À l'aide de ces règles, déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}_{\rm AB}$ des associations de dipôles suivants :

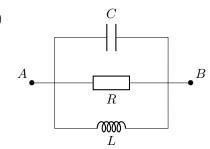
a)



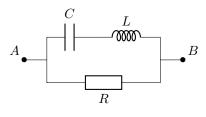
b)



c)



d)





b) $\underline{Z}_{AB} = \dots$

c) $Z_{AB} =$

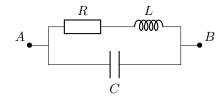
d) $\underline{Z}_{AB} = \dots$



Entraînement 5.4 — À la recherche de la bonne impédance.

0000

Un groupe d'étudiants doit trouver l'impédance $\underline{Z}_{\mathrm{AB}}$ du dipôle AB ci-dessous :



Quelle proposition correspond à l'impédance du dipôle AB?

(a)
$$\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

(b)
$$\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 + jRC\omega}$$

(a)
$$\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$
 (b) $\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 + jRC\omega}$ (c) $\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 - jRC\omega}$

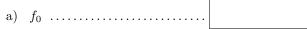
Signaux périodiques

Entraînement 5.5 — Analyse du signal provenant d'un GBF.

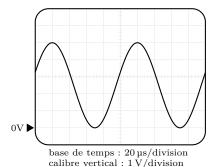
0000

En TP, un élève observe à l'oscilloscope la tension délivrée par un générateur de basses fréquences (GBF).

Aider cet élève à analyser le signal de tension mesuré ci-contre en déterminant sa fréquence f_0 et son amplitude U_0 .







\blacksquare Entraı̂nement 5.6 — Expression d'une tension.

0000

Nous disposons d'une tension sinusoïdale u(t) de période $T_0 = 1 \,\mathrm{ms}$, d'amplitude $U_0 = 2 \,\mathrm{V}$ et de phase à l'origine $\varphi = 0$ rad.

Parmi les propositions ci-dessous laquelle correspond à l'expression littérale de cette tension u(t)?

(a)
$$u(t) = U_0 \cos\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

$$\begin{array}{l}
\hline \text{(c)} \ u(t) = \frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{t}{T_0}\right) \\
\hline \text{(d)} \ u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)
\end{array}$$

$$(d) \ u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

.....