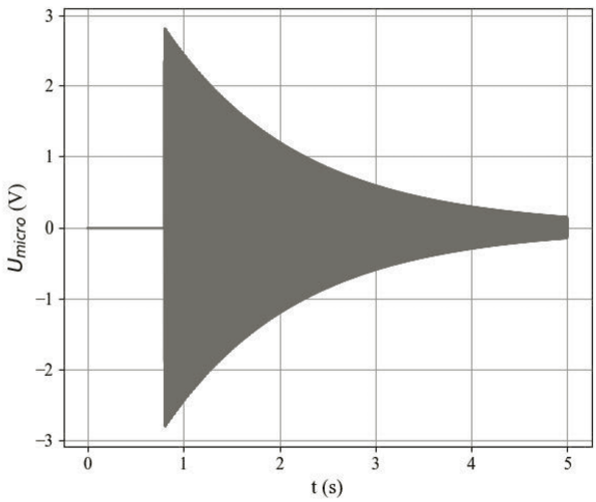
? À rendre le jeudi 14 novembre 2024

Devoir Maison n°6

Exercice n°1 Vibration d'un verre

Il est extrêmement facile, en frappant un verre à pied, d'entendre le son que celui-ci émet. On se propose de déterminer, à partir d'une modélisation simple, quelques propriétés des oscillations libres d'un verre. Un verre à pied, d'un diamètre de 12 cm , est frappé, à l'instant $t = 0$, au niveau du bord supérieur à l'aide d'un petit marteau. Le son émis, enregistré à l'aide d'un microphone, est représenté sur la figure ci-dessous.



Quand le verre est en vibration, son bord supérieur oscille autour de sa position au repos. On modélise ce système par une masse m mobile sur l'axe (Ox) horizontal, associée à un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0.
Les frottements sont modélisés par un frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse de la masse m.
L'origine de l'axe (Ox) est placée à la position d'équilibre de la masse m.

Q1. Faire un schéma du système dans deux situations :

- la masse m est à l'équilibre,
- la masse m n'est pas à l'équilibre.

Q2. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre.

Q3. Exprimer la force de rappel élastique en fonction de k, x et $\overrightarrow{u_x}$.

Q4. Montrer que le mouvement de la masse m est régi par l'équation différentielle

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où l'on donnera les expressions de ω_0 et Γ ainsi que leurs unités.

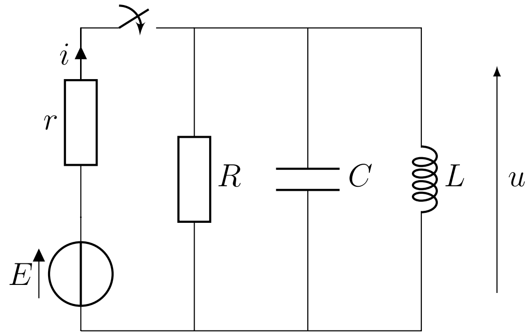
Q5. En vous appuyant sur l'enregistrement de la figure ci-dessus, caractériser le régime de vibration du verre (pseudo-périodique, apériodique ou critique).

Q6. Établir l'expression des vibrations $x(t)$ avec comme conditions initiales $x(0) = 0$ et $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$.
On pourra introduire dans l'expression de x les grandeurs $\tau = \dfrac{1}{\Gamma}$ et $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$. Que caractérisent ces deux grandeurs ? Quelles sont leurs unités et leurs noms ?

L'analyse de l'enregistrement indique une fréquence $f = 540$ Hz et un temps d'amortissement $\tau = 1,40$ s.

Q7. En déduire la pulsation propre ω_0 et le facteur d'amortissement Γ.

Exercice n°2 Étude d'un circuit RLC



On étudie le circuit RLC parallèle ci-contre alimenté par un générateur de tension de fem $E = 5,00$ V et de résistance interne $r = 50\ \Omega$.
On donne : $R = 1,0\ \mathrm{k}\Omega$; $C = 1,0\ \mu\mathrm{F}$.
Pour $t < 0$, aucun courant ne circule dans le circuit et le condensateur est déchargé.
On ferme l'interrupteur à $t = 0$.
On souhaite étudier l'évolution de la tension u en fonction du temps pour les temps $t > 0$.

Q1. Représenter le circuit à $t > 0$, et introduire toutes les grandeurs électriques nécessaires*.

Q2. Justifier parfaitement que les conditions initiales à $t = 0^+$ s'écrivent : $u(0^+) = 0$ V et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E}{rC}$†.

Q3. Représenter le circuit équivalent en régime permanent, et en déduire la valeur de la tension u atteinte en régime permanent.

Q4. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u. L'écrire sous forme canonique‡

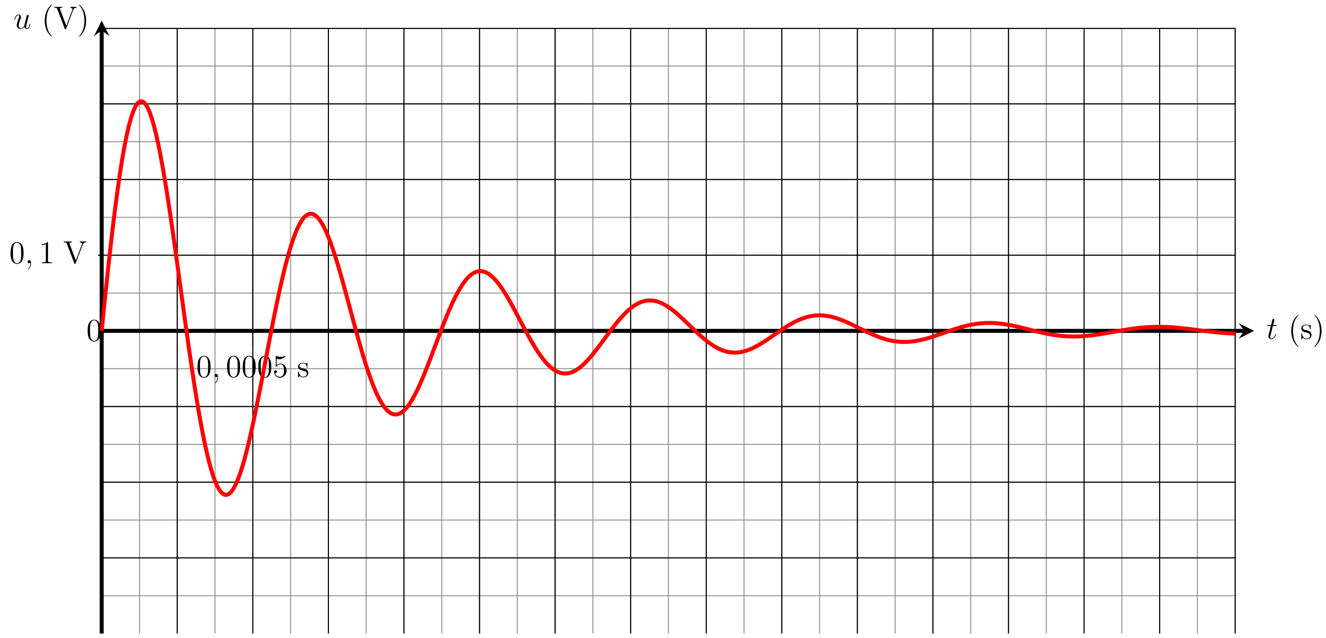
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

et identifier les expressions de ω_0 (en fonction de L et C) et Q (en fonction de L, C, r et R).
Comment s'appellent ces deux grandeurs ? Quelles sont leurs unités ?

La solution de l'équation différentielle précédente, compte tenu des conditions initiales s'écrit :

$$u(t) = \frac{E}{rC\Omega} e^{-t/\tau} \sin(\Omega t)$$

On donne l'évolution de u en fonction du temps :



∗. Indication : il faut 3 intensités, et 1 tension (rien de plus)

†. Indications :

- Suivre les 2 premiers points de la méthode du cours : u et l'intensité à travers la bobine......
- Avec $u(0^+)$, déterminer l'intensité à travers la résistance.
- En déduire la relation entre $i(0^+)$ et l'intensité à travers le condensateur à 0^+.
- La loi des mailles et la loi du condensateur permet d'en déduire $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

‡. Il n'y a pas d'erreur, le second membre est bien nul.

Ne disposant que d'un ohmmètre et d'un capacimètre, on souhaite utiliser l'évolution temporelle précédente de u pour déterminer la valeur l'inductance de la bobine.

On définit le décrément logarithmique, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et T la pseudo-période, par :

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u(t)}{u(t+nT)} \right)$$

Q5. Déterminer graphiquement la valeur de δ.

Q6. Établir l'expression du décrément logarithmique en fonction de τ et T.

Puis montrer que δ s'exprime en fonction de Q uniquement selon : $\delta = \dfrac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$.

Le résultat précédent peut être admis pour traiter la suite, qui doit être traitée même si vous n'avez pas réussi à traiter la question Q6.

Q7. À partir des deux questions précédentes, en déduire la valeur de Q.

En déduire la valeur de L.