



Thème I. Ondes et signaux (Électricité)

Chapitre n°8 Filtrage linéaire

Filtres passifs

L'impédance d'un haut-parleur dépend fortement de la fréquence, ainsi la puissance de l'onde acoustique émise par un haut-parleur dépend de la fréquence. La bande passante les caractéristiques du haut-parleur. Afin de restituer un son de bonne qualité il est nécessaire de choisir le haut-parleur en fonction de la gamme de fréquences des sons que l'on souhaite émettre. Les sons audibles sont compris entre 20 Hz et 20 kHz, plusieurs haut-parleurs doivent être utilisés pour restituer fidèlement des sons sur toute cette gamme de fréquences. De plus, il faut envoyer en entrée de chaque haut-parleur que les signaux de fréquences situés dans la bande passante du haut-parleur. Un filtrage doit donc être effectué **en amont de chaque haut-parleur**.

En amont du haut-parleur transmettant les graves, il faut supprimer les hautes fréquences tout en conservant les basses fréquences, il faudra un filtre passe-bas. En amont du haut-parleur transmettant les aigües, il faudra un filtre passe-haut. Pour les fréquences intermédiaires, un filtre passe-bande pourra être utilisé.

Pré-requis

- PCSI : Thème Ondes et signaux.
 - Chapitre n°7. Oscillateurs amortis en RSF

Objectifs du chapitre

- Définir les notions nécessaires à l'étude des filtres, sur les signaux périodiques et sur les filtres.
- Étudier les filtres du premier et du deuxième ordre.
- Étudier la réponse d'un filtre à différents signaux.

Plan du cours

<p>I Signaux périodiques 3</p> <p>I.1 Développement en série de Fourier 3</p> <p style="padding-left: 20px;">I.1.a) Définition du DSF 3</p> <p style="padding-left: 20px;">I.1.b) Spectres 3</p> <p>I.2 Valeurs moyenne et efficace 4</p> <p style="padding-left: 20px;">I.2.a) Définitions 4</p> <p style="padding-left: 20px;">I.2.b) Mesures 5</p> <p style="padding-left: 20px;">I.2.c) Valeurs efficaces de signaux périodiques 5</p> <p>I.3 Déphasage 5</p> <p>II Fonction de transfert harmonique et diagramme de Bode 7</p> <p>II.1 Filtre linéaire 7</p> <p>II.2 Fonction de transfert harmonique 8</p> <p>II.3 Diagramme de Bode 8</p> <p style="padding-left: 20px;">II.3.a) Gain en décibels 8</p> <p style="padding-left: 20px;">II.3.b) Échelle logarithmique 9</p> <p style="padding-left: 20px;">II.3.c) Diagramme de Bode 9</p> <p>II.4 Bande passante 9</p> <p>II.5 Différents filtres 10</p>	<p>III Modèles de filtres passifs 10</p> <p>III.1 Filtre passe-bas d'ordre 1 10</p> <p style="padding-left: 20px;">III.1.a) Étude asymptotique 10</p> <p style="padding-left: 20px;">III.1.b) Fonction de transfert 11</p> <p style="padding-left: 20px;">III.1.c) Diagramme de Bode 11</p> <p style="padding-left: 20px;">III.1.d) Comportement moyennneur 12</p> <p style="padding-left: 20px;">III.1.e) Comportement intégrateur 12</p> <p>III.2 Filtre passe-haut d'ordre 1 12</p> <p>III.3 Filtre passe-bas d'ordre 2 13</p> <p style="padding-left: 20px;">III.3.a) Comportement qualitatif 13</p> <p style="padding-left: 20px;">III.3.b) Diagramme de Bode 13</p> <p style="padding-left: 20px;">III.3.c) Comportement dérivateur 14</p> <p>III.4 Filtre passe-bande d'ordre 2 14</p> <p>IV Réponse d'un filtre à une excitation 16</p> <p>IV.1 Réponse à une somme de sinus 16</p> <p>IV.2 Réponse d'un filtre à un signal périodique 18</p> <p>IV.3 Simuler l'action d'un filtre 18</p> <p>V Mise en cascade de filtres 19</p> <p>V.1 Impédances d'entrée et de sortie 19</p> <p>V.2 Mise en cascade de deux filtres 19</p>
---	--

Ai-je bien appris mon cours ?

- 1 – 😊 – 😞 – Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique.
- 2 – 😊 – 😞 – Établir l'expression de la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
- 3 – 😊 – 😞 – Que mesure un multimètre en DC ? en AC ? en AC+DC ?
- 4 – 😊 – 😞 – Définir la fonction de transfert harmonique d'un filtre linéaire.
- 5 – 😊 – 😞 – Définir le gain, la phase et le gain en décibels d'une fonction de transfert harmonique.
- 6 – 😊 – 😞 – Définir le diagramme de Bode d'un filtre linéaire.
- 7 – 😊 – 😞 – Qu'est-ce que l'échelle logarithmique ? Comment lit-on une fréquence sur une échelle logarithmique ?
- 8 – 😊 – 😞 – Définir la pulsation de coupure à -3 dB et la bande passante à -3 dB. *On donnera les deux définitions : à partir du gain, et du gain en décibels.*
Comment la détermine-t-on par le calcul ? graphiquement ?
- 9 – 😊 – 😞 – Tracer le diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ ou d'un filtre passe-haut du premier ordre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$
- 10 – 😊 – 😞 – Comment déterminer les équations des asymptotes au diagramme de Bode en gain ? graphiquement et par le calcul ?
- 11 – 😊 – 😞 – Expliquer la méthode à appliquer pour déterminer le signal de sortie d'un filtre connaissant le signal d'entrée (composée de plusieurs signaux sinusoïdaux) et la fonction de transfert ou le diagramme de Bode.
- 12 – 😊 – 😞 – Quel filtre doit-on utiliser pour réaliser une moyenne ? une intégration ? une dérivation ? Dans quelle condition doit-on l'utiliser ? *Préciser la fréquence de coupure par rapport aux fréquences du signal.*
- 13 – 😊 – 😞 – Que doit-on respecter quand on met en cascades plusieurs filtres pour que le fonctionnement de chaque filtre ne soit pas perturbé par la présence du suivant ?

I Signaux périodiques

I.1 Développement en série de Fourier d'un signal périodique

Capacité exigible : Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.

I.1.a) Définition du DSF

♥ **À retenir : Développement en série de Fourier d'un signal périodique**
 Un signal y périodique de période T et de fréquence f peut s'écrire comme la somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de la fréquence f du signal $y(t)$.
 Le **développement en série de Fourier** de y s'écrit : $y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi nft + \varphi_n))$, avec :

- A_0 : composante continue, c'est la moyenne du signal ;
- f : fréquence de $y(t)$, également la **fréquence du fondamental** f_1 ($n = 1$) ;
- $f_n = nf$: fréquence de l'**harmonique de rang** n ;
- A_n : amplitude de l'harmonique d'ordre n ;
- φ_n : la phase à l'origine des temps de l'harmonique d'ordre n .

L'analyse spectrale est l'opération qui consiste à déterminer les signaux sinusoïdaux composant un signal donné. En TP, on verra comment réaliser une telle opération avec l'oscilloscope ou un logiciel de traitement de données (regressi, logger pro).

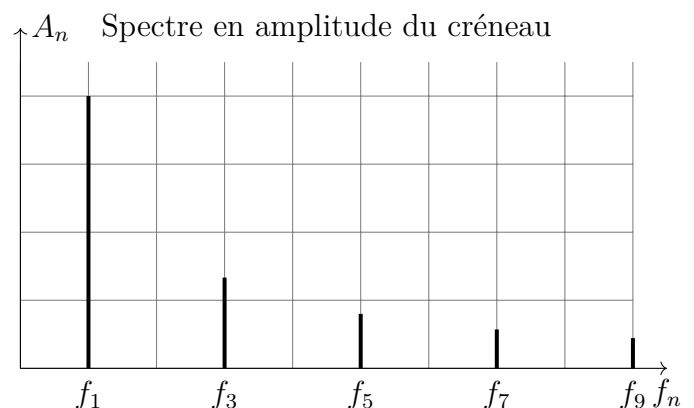
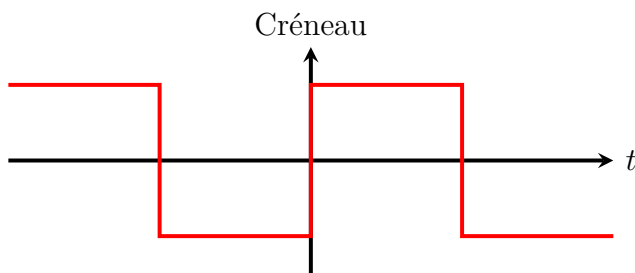
À l'issue d'une analyse spectrale, on obtient :

- les fréquences f_n des composantes sinusoïdales contenues dans le signal,
- l'amplitude A_n de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_n ,
- la phase à l'origine de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_n .

I.1.b) Spectres

📖 **Définitions : Spectres**

- Le **spectre en amplitude** représente les amplitudes A_n en fonction des fréquences f_n (ou des pulsations $\omega_n = 2\pi f_n$), il caractérise l'importance relative des différents harmoniques présents dans le signal. Le spectre se représente sous la forme de barres verticales de hauteur A_n et d'abscisse f_n .
- Le **spectre en phase** représente les phases φ_n en fonction des fréquences f_n . Le spectre se représente sous la forme de barres verticales reliant les points de coordonnées $(f_n, 0)$ et (f_n, φ_n) .

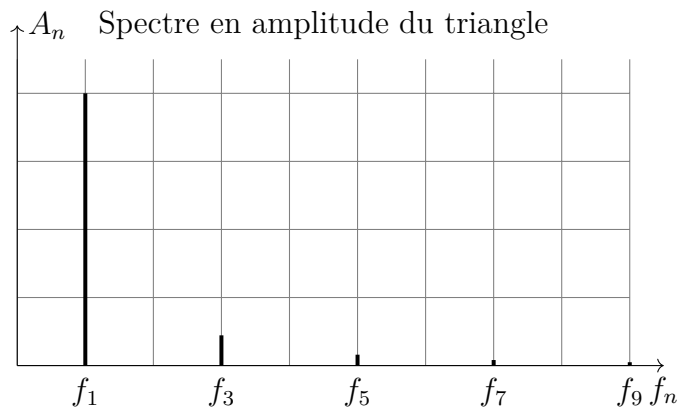
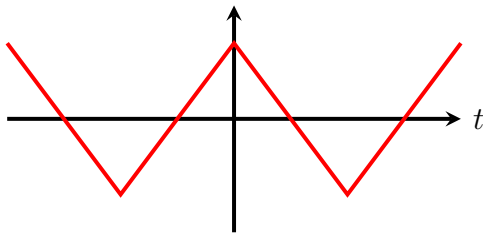


Le développement en série de Fourier pour le signal carré d'amplitude A est donné par :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\omega t)$$

FIGURE 1 – Signal Créneau

Triangulaire



Le développement en série de Fourier pour le signal triangulaire d'amplitude A est donné par :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8A}{((2n-1)\pi)^2} \cos((2n-1)\omega t)$$

FIGURE 2 – Signal Triangulaire

1.2 Valeurs moyenne et efficace d'un signal périodique

1.2.a) Définitions

Capacité exigible : Définir valeur moyenne et valeur efficace.

Définitions : Valeur moyenne et valeur efficace

Considérons un signal y **périodique** de période T .

■ La **valeur moyenne de y** , notée $\langle y \rangle$, est définie par : $\langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$

■ La **valeur efficace de y** , notée Y_{eff} , est définie par : $Y_{\text{eff}} = \sqrt{\langle y^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (y(t))^2 dt}$: c'est la racine de la valeur moyenne du carré de y .

Capacité exigible : Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.

À maîtriser : Valeur moyenne et valeur efficace des signaux sinusoïdaux

Déterminer :

- Q1. la valeur moyenne de $i(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$;
- Q2. la valeur moyenne de i^2 pour $i(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$;
- Q3. la valeur efficace de $i(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

À retenir : Valeur efficace d'un signal purement sinusoïdal

La valeur efficace d'un signal purement sinusoïdal de valeur moyenne nulle est égale à son amplitude divisée par $\sqrt{2}$.

REMARQUES

Valeurs efficaces de signaux périodiques

- La valeur efficace d'un signal triangulaire d'amplitude S_m vaut : $S_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{3}}$

-  • La valeur efficace d'un signal créneau d'amplitude S_m vaut : $S_{\text{eff}} = S_m$

- La valeur de la tension notée sur les appareils électriques domestiques est donnée en valeur efficace d'une tension sinusoïdale. En France, on utilise majoritairement une tension $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$ ce qui correspond à une amplitude $U_m = 325 \text{ V}$.

I.2.b) Mesures

♥ À retenir : Mesures aux multimètres

Mode	Grandeur mesurée	Pour $u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$
Mode DC	Valeur moyenne (composante continue)	$U_{DC} = U_0$
Mode AC	Valeur efficace de la partie variable du signal	$U_{AC} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$
Mode AC+DC	Valeur efficace du signal complet	$U_{AC+DC} = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_m^2}{2}}$

I.2.c) Valeurs efficaces de signaux périodiques

Capacité exigible : Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

♥ À retenir

La valeur efficace Y_{eff} d'un signal y périodique de période T dont le développement de Fourier est donné par $y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)$, dont la $n^{\text{ième}}$ harmonique $y_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ est de valeur efficace $Y_{n,\text{eff}} = \frac{A_n}{\sqrt{2}}$ est telle que :

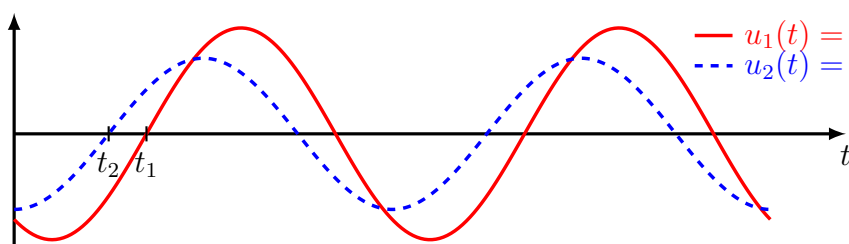
$$Y_{\text{eff}}^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,\text{eff}}^2 \Leftrightarrow Y_{\text{eff}} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,\text{ext}}^2}$$

Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

Interprétation : **La puissance électrique transportée par un signal périodique est la somme des puissances électriques transportées par chacune de ses harmoniques.**

I.3 Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchrones

On considère deux signaux sinusoïdaux synchrones de même période T , et donc de même pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$:



— $u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$
- - - $u_2(t) = U_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$

t_1 est tel que $\omega t_1 + \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\omega t_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$

t_2 est tel que $\omega t_2 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\omega t_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$

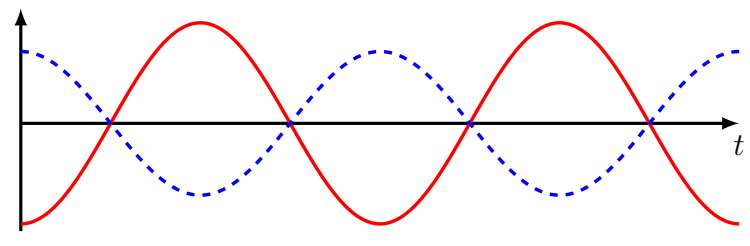
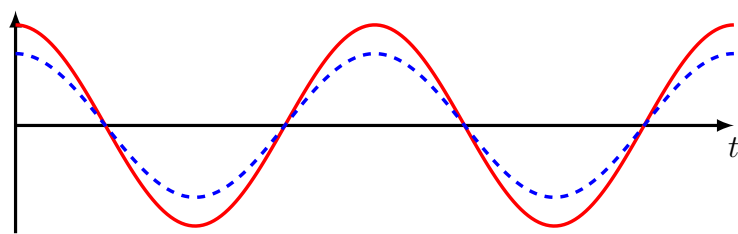
On définit le déphasage de u_2 par rapport à u_1 par

$$\Delta_{2/1}\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega(t_1 - t_2) = 2\pi f(t_1 - t_2) = 2\pi \frac{t_1 - t_2}{T}$$

Quelques déphasages particuliers :

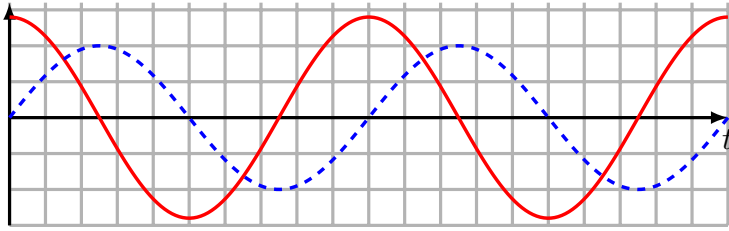
u_1 et u_2 en phase : $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv 0[2\pi]$

u_1 et u_2 en opposition de phase : $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv \pm\pi[2\pi]$



$$\varphi_2 - \varphi_1 \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Si $u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t)$,
alors $u_2(t) = U_{2m} \cos(\omega t + \pi/2) = U_{2m} \sin(\omega t)$



u_2 est en **quadrature de phase** avec u_1 : ils sont décalés d'un quart de période, quand u_1 est nul, u_2 est extrémal, et inversement.

De plus, u_2 est **en retard** sur u_1 : u_2 atteint son maximum **après** u_1 , u_2 est en quadrature retard sur u_1 .

$$\varphi_2 - \varphi_1 \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

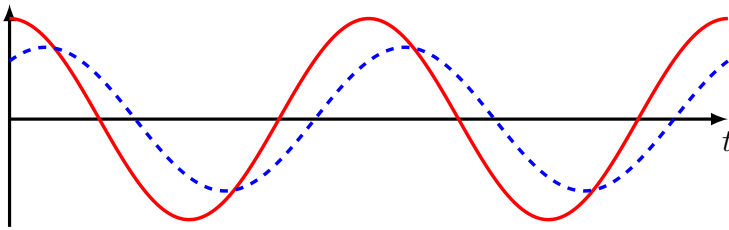
Si $u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t)$,
alors $u_2(t) = U_{2m} \cos(\omega t + \pi/2) = -U_{2m} \sin(\omega t)$



u_2 est en **quadrature de phase** avec u_1 : ils sont décalés d'un quart de période, quand u_1 est nul, u_2 est extrémal, et inversement.

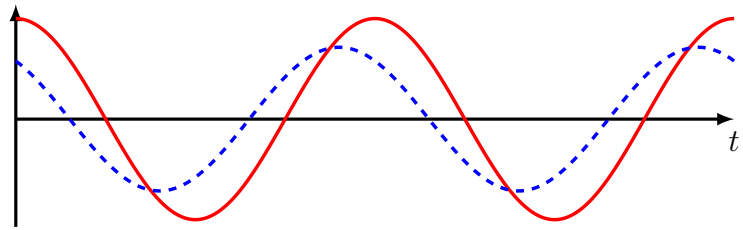
De plus, u_2 est **en avance** sur u_1 : u_2 atteint son maximum **avant** u_1 , u_2 est en quadrature avance sur u_1 .

$\varphi_2 - \varphi_1$ quelconque, avec $\varphi_2 - \varphi_1 < 0$



u_2 est **en retard** sur u_1 : u_2 atteint son maximum **après** u_1 .

$\varphi_2 - \varphi_1$ quelconque, avec $\varphi_2 - \varphi_1 > 0$



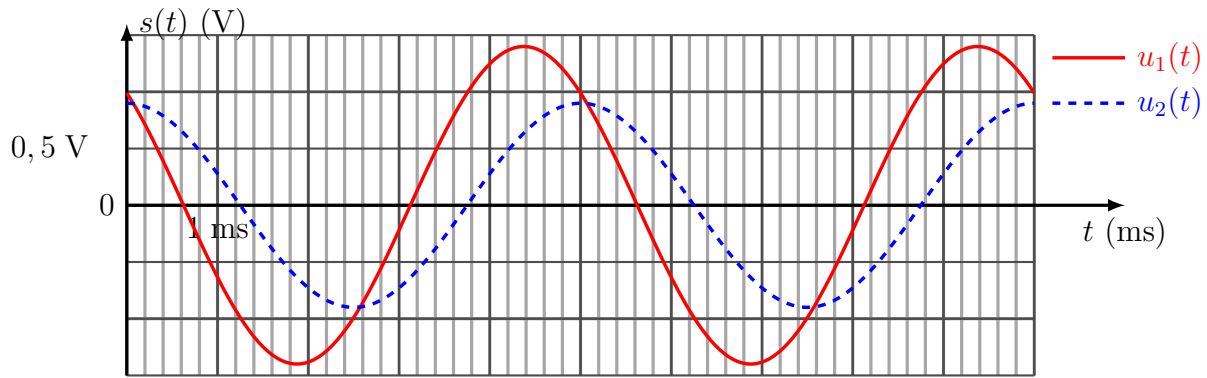
u_2 est **en avance** sur u_1 : u_2 atteint son maximum **avant** u_1 .

💡 Méthode : Comment mesurer un déphasage entre deux signaux synchrones ?

On souhaite déterminer graphiquement le déphasage $\Delta\varphi_{2/1}$ de $u_2(t)$ par rapport à $u_1(t)$, périodiques de période T .

- Mesurer la période T des signaux.
- Déterminer si $u_2(t)$ est en avance ou en retard sur $u_1(t)$ pour déterminer le signe de $\Delta\varphi_{2/1}$.
 - Si u_2 est en avance sur u_1 , alors $\Delta\varphi_{2/1} > 0$.
 - Si u_2 est en retard sur u_1 , alors $\Delta\varphi_{2/1} < 0$.
- Mesurer le retard Δt de u_2 par rapport à u_1 : c'est la plus petite durée séparant deux maxima (ou minima, ou annulations) des signaux u_1 et u_2 .
- En déduire la valeur absolue du déphasage $|\Delta\varphi_{2/1}| = \frac{2\pi\Delta t}{T}$.
- En déduire $\Delta\varphi_{2/1}$ (en tenant compte du signe déterminé précédemment).

Exercice de cours A Déterminer le déphasage entre u_2 et u_1 .



II Fonction de transfert harmonique et diagramme de Bode

II.1 Filtre linéaire

Les signaux reçus sont souvent la superposition d'un ensemble de signaux :

- les signaux utiles, par ex signal téléphonique + signal informatique en entrée d'une prise ADSL ;
- les signaux parasites appelés « bruits » générés par l'environnement ;

et il est souvent nécessaire d'en extraire un parmi tous : c'est le but des filtres.

Définition : Filtre

Un **filtre** est un quadripôle qui ne transmet que les signaux dont les fréquences appartiennent à une certaine plage appelée à **bande passante**. Idéalement, les signaux dont la fréquence est en dehors de la bande passante sont arrêtés par le filtre. Dans la pratique, ils doivent être suffisamment atténués pour pouvoir être négligés.



Définition : Filtre linéaire

Un **filtre** est **linéaire** :

- s'il ne contient que des composants linéaires ;
- si c'est un système régi par une **équation différentielle linéaire** qui relie le signal d'entrée $e(t)$ (= signal d'origine) au signal de sortie $s(t)$ (= signal filtré) ;
- si l'entrée est un signal sinusoïdal de pulsation ω , le signal de sortie est sinusoïdal de même pulsation ;
- si le **principe de superposition s'applique** : si $s_1(t)$ est la réponse du filtre à $e_1(t)$ et $s_2(t)$ est la réponse du filtre à $e_2(t)$ alors : $[\alpha.s_1(t) + \beta.s_2(t)]$ est la réponse du filtre à $[\alpha.e_1(t) + \beta.e_2(t)]$.



$$e(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t) \xrightarrow{\text{filtre}} s(t) = \alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$$

II.2 Fonction de transfert harmonique

L'étude d'un filtre linéaire est menée **en régime sinusoïdal**, en utilisant la **notation complexe**.

$$\text{Tension d'entrée } u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t + \varphi_e) \longrightarrow \underline{u_e}(t) = \underline{U_{em}} e^{j\omega t} \quad \text{avec } \underline{U_{em}} = U_{em} e^{j\varphi_e}$$

$$\text{Tension de sortie } u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s) \longrightarrow \underline{u_s}(t) = \underline{U_{sm}} e^{j\omega t} \quad \text{avec } \underline{U_{sm}} = U_{sm} e^{j\varphi_s}$$

Définition : Fonction de transfert harmonique (FTH)

Lorsque la tension d'entrée u_e est sinusoïdale de pulsation ω , la tension de sortie u_s l'est également et on définit la **fonction de transfert harmonique** du quadripôle (à vide : $i_s = 0$) par :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{U_{sm}}}{\underline{U_{em}}} = \frac{U_{sm}}{U_{em}} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$$

que l'on peut caractériser par :

- son module $|\underline{H}(j\omega)|$, appelé **gain**, noté G , sans dimension :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{U_{sm}}{U_{em}}$$

- son argument $\phi(\omega)$, appelé **phase**, noté ϕ , en radians :

$$\phi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \varphi_s - \varphi_e$$

c'est le **déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée**.

Définition : Ordre d'un filtre

On admet que toute fonction de transfert \underline{H} peut se mettre sous la forme d'une fraction **irréductible** de deux polynômes, \underline{N} , \underline{D} , de variable $j\omega$: $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$. L'**ordre du filtre** correspond au degré de \underline{D} .

II.3 Diagramme de Bode

II.3.a) Gain en décibels

Définition : Gain en décibels

On définit le **gain en décibels** comme étant 20 fois le logarithme du MODULE de la fonction de transfert :

$$G_{dB} = 20 \log \left(\left| \underline{H} \right| \right)$$

Exercice de cours B

- Q1. Si $G = 1$ (c'est-à-dire si $U_{sm} = U_{em}$), alors $G_{dB} =$
- Q2. Si $G = 10^{-1}$ (c'est-à-dire si $U_{sm} = U_{em}/10$), alors $G_{dB} =$
- Q3. Si $G = 10^{-2}$ (c'est-à-dire si $U_{sm} = U_{em}/100$), alors $G_{dB} =$

II.3.b) Échelle logarithmique

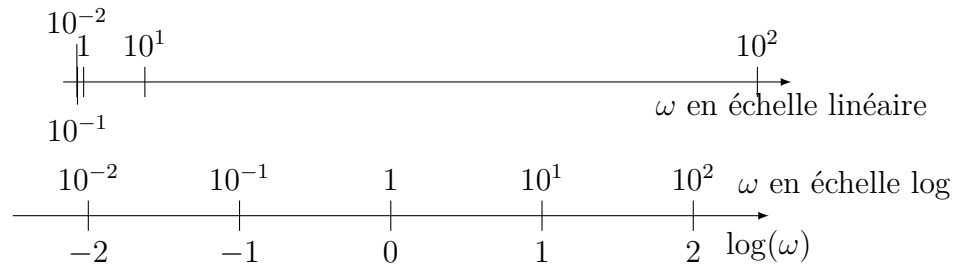
Capacité exigible : Utiliser les échelles logarithmiques.

Dans les diagrammes de Bode, en abscisse, la pulsation est représentée à l'aide d'une **échelle logarithmique**. En passant d'une graduation à une autre, la pulsation est multipliée par le même facteur.

📖 Définition : Échelle logarithmique

Une échelle logarithmique est un système de graduation en progression géométrique. Chaque pas multiplie la valeur par une constante positive. De ce fait, la position sur l'axe d'une valeur est proportionnelle à son logarithme.

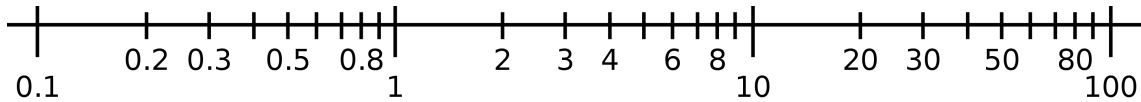
On utilise l'échelle logarithmique, car un changement d'un ordre de grandeur en ω correspond seulement à un changement d'une unité en $\log(\omega)$. Ainsi, en échelle log, on peut représenter des variations de ω bien plus importantes qu'en échelle linéaire.



📖 Définition : Décade

Chaque intervalle de pulsation $[10^n, 10^{n+1}]$ est appelé **décade**.

Chaque décade occupe la même place en échelle logarithmique, ainsi il y a la même précision entre 10 et 100 Hz qu'entre 10^4 et 10^5 Hz...



II.3.c) Diagramme de Bode

📖 Définition : Diagramme de Bode

Le **diagramme de Bode d'un filtre** est la donnée de deux diagrammes :

- le **diagramme en gain** : on représente le **gain en décibels** $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$ de la fonction de transfert en fonction de la **pulsation** ω (ou de la fréquence f) en **échelle logarithmique** ;
- le **diagramme en phase** : on représente l'**argument de la fonction de transfert** $\phi = \arg(\underline{H})$ en fonction de la **pulsation** ω (ou de la fréquence f) en **échelle logarithmique**.

II.4 Bande passante

📖 Définition : Bande passante

On définit la (ou les) **pulsation(s) de coupure** notée ω_c par la relation :

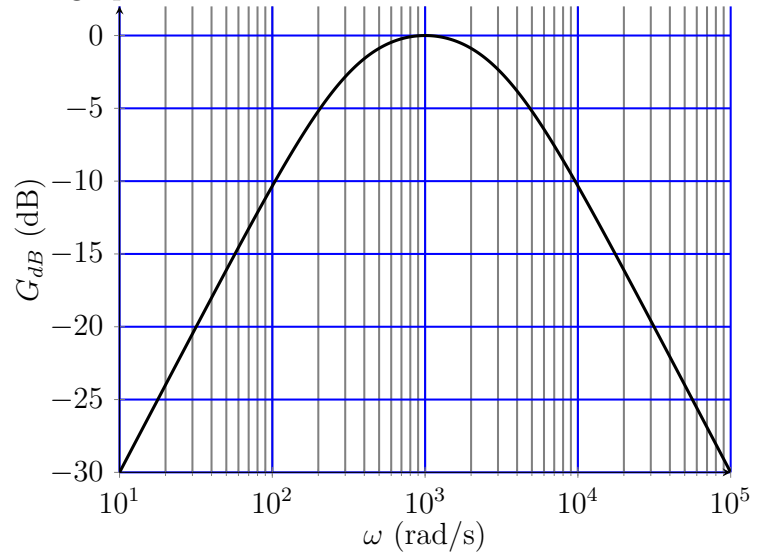
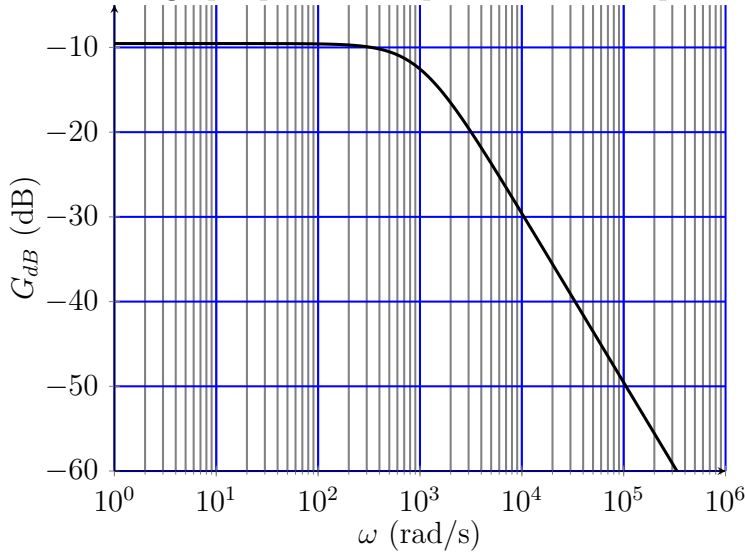
$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,\max} - 3 \text{ dB}$$

La **bande passante à - 3dB** est l'intervalle de pulsations tel que

$$G(\omega) > \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{dB}(\omega) > G_{dB,\max} - 3 \text{ dB} \quad , \text{ avec } 20 \log(\sqrt{2}) = 3 \text{ dB}$$

Exercice de cours C

Déterminer graphiquement les pulsations de coupure sur les graphes ci-dessous.



II.5 Différents filtres

📖 Définitions : Nature d'un filtre

Selon les fréquences des signaux transmis par un filtre, on définit :

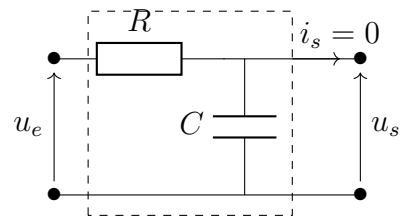
- un **filtre passe-bas** qui transmet les signaux à basse fréquence et coupe les signaux à haute fréquence ;
- un **filtre passe-haut** qui coupe les signaux à basse fréquence et transmet les signaux à haute fréquence ;
- un **filtre passe-bande** qui coupe les signaux à basse fréquence et les signaux à haute fréquence et transmet des signaux de fréquence intermédiaire (autour d'une certaine fréquence).

« Basse fréquence » et « Haute fréquence » est toujours issue de la comparaison de la fréquence du signal d'entrée avec une fréquence caractéristique du circuit (fréquence propre par ex.).

III Modèles de filtres passifs

III.1 Filtre passe-bas d'ordre 1

On étudie le quadripôle suivant constitué d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C , alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$. On le considère en sortie ouverte ($i_s = 0$), ce qui est le cas lorsqu'on branche un oscilloscope en sortie dont la résistance d'entrée $R_e = 1 \text{ M}\Omega \gg R, \frac{1}{C\omega}$.



III.1.a) Étude asymptotique

💡 Méthode : Déterminer la nature d'un filtre (sans calcul)

■ Successivement, à basse fréquence, puis à haute fréquence :

- Représenter le circuit équivalent avec les comportements asymptotiques.
- En déduire les intensités et tensions nulles.
- Exprimer u_s en fonction de u_e uniquement et éventuellement de résistances. \triangle Il ne doit y avoir aucune autre grandeur électrique que u_e dans l'expression de u_s pour pouvoir conclure.

■ Conclure :

- Si $u_s = f(u_e) \neq 0$ à BF et $u_s = 0$ à HF : c'est un filtre passe-bas
- Si $u_s = 0$ à BF et $u_s = f(u_e) \neq 0$ à HF : c'est un filtre passe-haut
- Si $u_s = 0$ à BF et $u_s = 0$ à HF : c'est un filtre passe-bande

À maîtriser : Étude qualitative du filtre

En suivant la méthode ci-dessus, déterminer la nature du filtre.

III.1.b) Fonction de transfert

Méthode : Établir une fonction de transfert

Quand le filtre est à vide ($i_s = 0$), l'établissement de la fonction de transfert se fait à l'aide d'un **pont diviseur de tension**.

Parfois, il sera nécessaire de procéder à des associations d'impédances au préalable.

À maîtriser : Fonction de transfert

Q1. À l'aide de la relation du pont diviseur de tension, déterminer le lien entre \underline{u}_s et \underline{u}_e , et en déduire l'expression de la fonction de transfert.

Q2. Exprimer le gain de ce filtre, puis le gain en décibels.

Q3. Exprimer la phase ϕ du filtre.

III.1.c) Diagramme de Bode

Capacité exigible : Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.

Méthode : Tracer le diagramme de Bode

■ Diagramme asymptotique

- Écrire la fonction de transfert harmonique.
- Écrire l'équivalent de la fonction de transfert à basse et haute fréquence.
- **Diagramme asymptotique en gain**
 - En déduire l'équivalent du gain en décibels $G_{dB}(\log(\omega))$ à BF et HF, sous la forme $a \log(\omega) + b$, avec a la pente (en dB/dec) de l'asymptote. Si $a = 0$, l'asymptote est horizontale à b dB.
 - Tracer ces deux asymptotes.
- **Diagramme asymptotique en phase**
 - Déterminer les limites du déphasage ϕ en basses et hautes fréquences.
 - Tracer ces deux asymptotes.

■ Diagramme réel

Pour tracer le diagramme réel, il est nécessaire d'ajouter des points particuliers. Pour les filtres du premier ordre, la pulsation de coupure, le gain en décibels et la phase à cette pulsation permettront de tracer ce diagramme.

- À partir de l'expression du gain, déterminer l'expression, puis la valeur de la pulsation de coupure, ω_c qui est telle que $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$.
- Calculer le gain en décibels à la pulsation de coupure, qui par définition : $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,\max} - 3$ dB
- Calculer la phase $\phi(\omega_c)$.

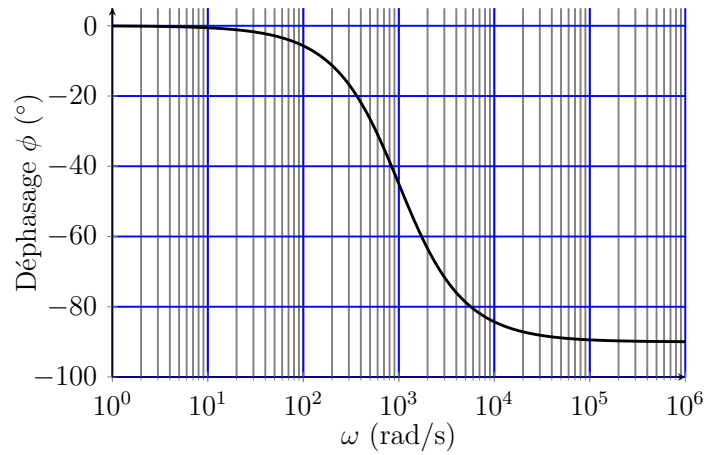
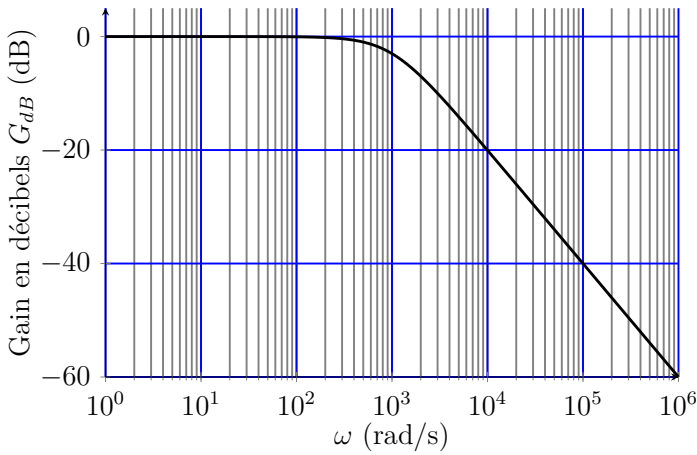
À maîtriser : Diagramme de Bode

Q1. Tracer le diagramme de Bode asymptotique en gain et en phase.

Q2. Déterminer l'expression de la pulsation de coupure en fonction de R et C .

Q3. Placer la pulsation de coupure et la valeur du gain en décibels et de phase à cette pulsation et en

déduire le diagramme de Bode réel.



III.1.d) Comportement moyenneur

À maîtriser : Réalisation d'un moyenneur

Que reste-t-il en sortie d'un filtre passe-bas alimenté par un signal d'entrée $u_e(t) = E_0 + E \cos(\omega t)$, avec $\omega \gg \omega_c$?

À connaître : Obtention d'un moyenneur

Un filtre passe-bas de fréquence de coupure très petite devant la fréquence du signal d'entrée aura un effet moyenneur.

III.1.e) Comportement intégrateur à haute fréquence

À maîtriser : Réalisation d'un intégrateur

- Q1. Rappeler l'équivalent de la fonction de transfert à haute fréquence (quand $\omega \gg \omega_c$).
- Q2. En repartant de la définition de la fonction de transfert harmonique, déterminer l'expression du signal de sortie en fonction du signal d'entrée. Quelle opération mathématique réalise un filtre passe-bas du 1^{er} ordre sur un signal d'entrée de fréquence grande devant la fréquence de coupure?
- Q3. On alimente un filtre passe-bas de fréquence de coupure 10 Hz avec un signal créneau de fréquence 1 kHz. Qu'observe-t-on en sortie?

À connaître : Obtention d'un intégrateur

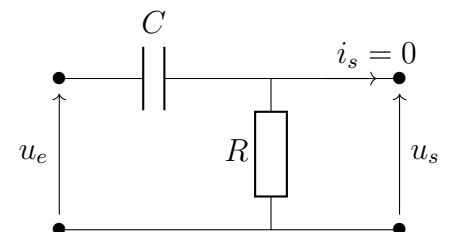
Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de pente -20 dB/déc, alors il aura un comportement intégrateur sur cette gamme de fréquence.

III.2 Filtre passe-haut d'ordre 1

À maîtriser : Étude d'un filtre passe-haut

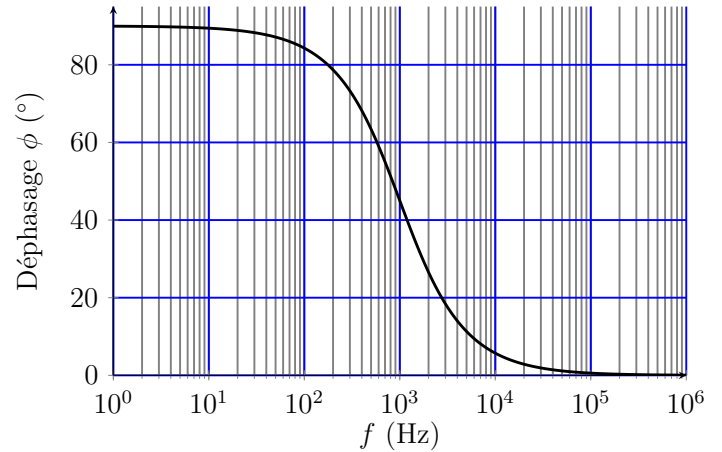
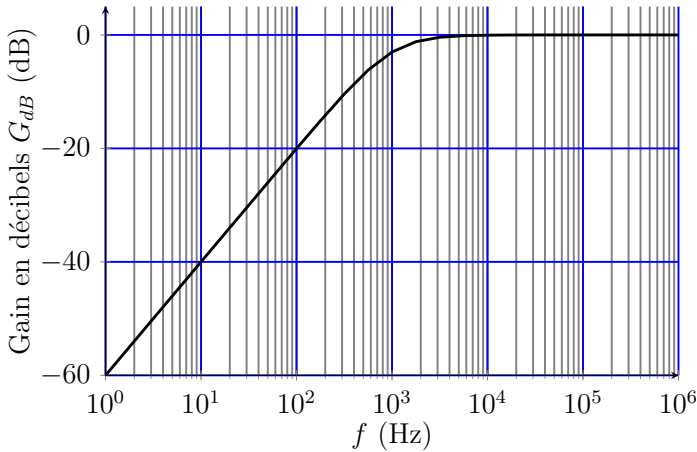
On étudie le quadripôle alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$.

On le considère en sortie ouverte, donc $i_s = 0$.



- Q1. Déterminer par une étude du circuit la nature du filtre.
- Q2. Établir l'expression de la fonction de transfert.
- Q3. Déterminer l'expression de la pulsation de coupure de ce filtre en fonction de C et R .

- Q4. Réécrire la fonction de transfert faisant intervenir la pulsation de coupure.
Q5. Déterminer le diagramme de Bode asymptotique.
Q6. En déduire le diagramme de Bode réel.



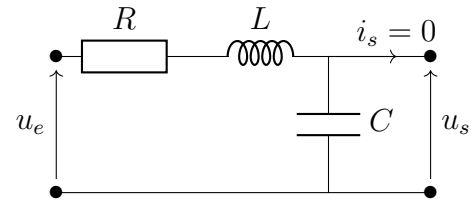
III.3 Filtre passe-bas d'ordre 2

Capacité exigible : Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.

On étudie le circuit ci-contre alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$, en sortie ouverte ($i_s = 0$).

III.3.a) Comportement qualitatif

À maîtriser : Comportement qualitatif
Déterminer la nature du filtre à partir du circuit.



III.3.b) Diagramme de Bode

Méthode : Interpréter les asymptotes d'un Bode en lien avec la FTH

■ Sur le diagramme de Bode :

- Déterminer graphiquement les pentes des asymptotes du diagramme en gain, que l'on donne en dB/décade.

En échelle logarithmique en fréquence, la pente est donnée par : $\frac{G_{dB}(f_2) - G_{dB}(f_1)}{\log(f_2) - \log(f_1)}$ [en dB/dec]

Idéalement, prendre un intervalle d'une décade, c'est-à-dire $f_2 = 10f_1$ (ainsi $\log(f_2) - \log(f_1) = 1$).

■ Sur la fonction de transfert :

- Établir les équivalents de la fonction de transfert à haute fréquence et à basse fréquence.
- En déduire les équivalents du gain en décibels $G_{dB}(\log(\omega))$ et les écrire sous la forme $a \log(\omega) + b$, avec a la pente (en dB/dec) de l'asymptote. Si $a = 0$, l'asymptote est horizontale à b dB.

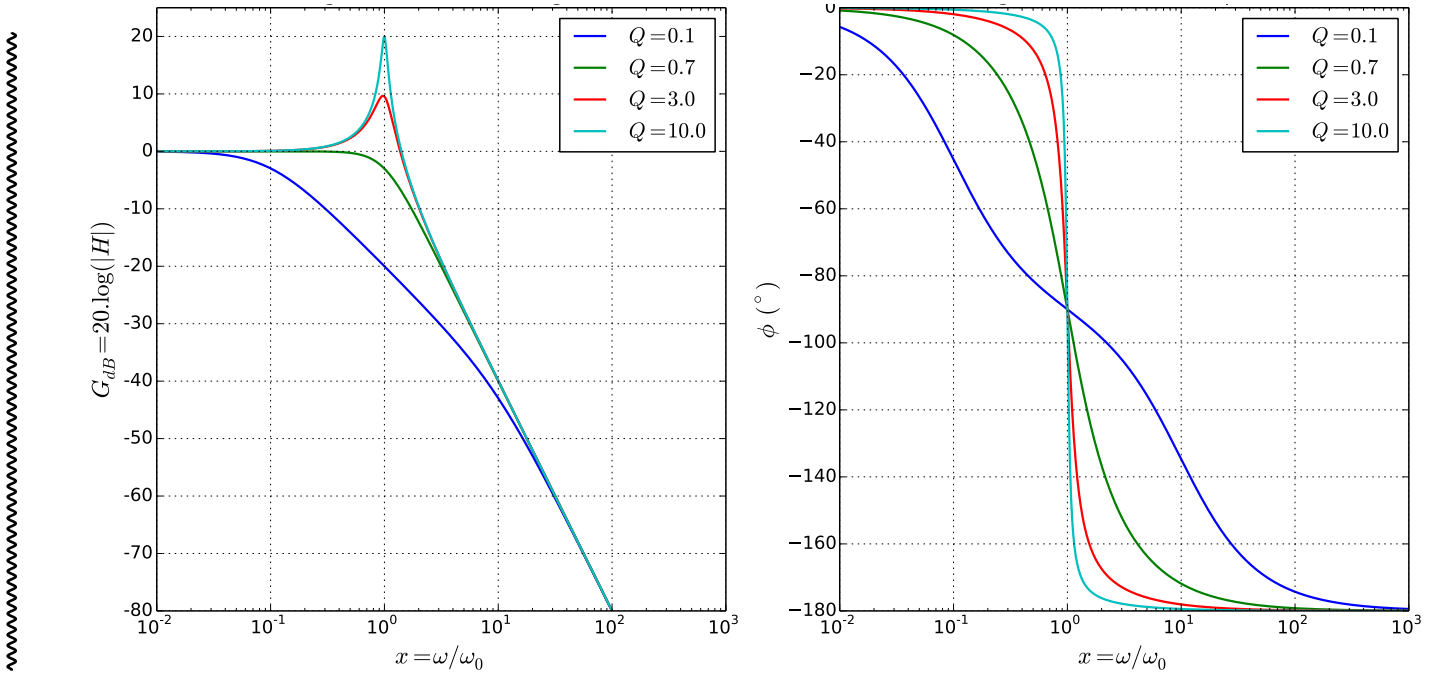
■ Comparer et commenter.

À maîtriser : Diagramme de Bode

On donne la fonction de transfert harmonique d'un filtre passe-bas du 2^e ordre $H(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$

et le diagramme de Bode associé pour différentes valeurs de Q .

- Q1. Déterminer graphiquement les caractéristiques des asymptotes. Dépendent-elles du facteur de qualité ?
Q2. Déterminer l'équivalent de la fonction de transfert à basse fréquence et en déduire l'équation des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude. Comparer au diagramme de Bode fourni.
Q3. Faire de même à haute fréquence.



III.3.c) Comportement dérivateur à basse fréquence

À maîtriser : Réalisation d'un dérivateur

- Q1. Rappeler l'équivalent de la fonction de transfert à basse fréquence (quand $\omega \ll \omega_c$).
- Q2. En repartant de la définition de la fonction de transfert harmonique, déterminer l'expression du signal de sortie en fonction du signal d'entrée. Quelle opération mathématique réalise un filtre passe-haut du 1^{er} ordre sur un signal d'entrée de fréquence petite devant la fréquence de coupure ?
- Q3. On alimente un filtre passe-haut du premier ordre de fréquence de coupure 1 kHz avec un signal triangulaire de fréquence 10 Hz. Qu'observe-t-on en sortie ?

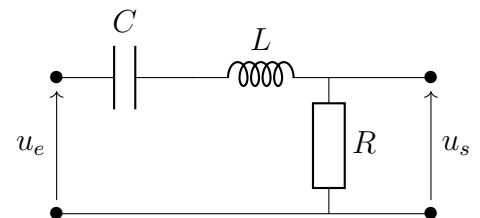
À connaître : Obtention d'un dérivateur

Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de pente +20 dB/déc, alors il aura un comportement dérivateur sur cette gamme de fréquence.

III.4 Filtre passe-bande d'ordre 2

À maîtriser : Étude d'un filtre passe-bande d'ordre 2

On étudie le circuit RLC série alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$.



- Q1. Déterminer la nature du filtre à partir du circuit.
- Q2. Établir la fonction de transfert harmonique de ce filtre.

On retrouve une expression semblable à celle obtenue pour l'intensité complexe lors de l'étude de la résonance en intensité du RLC série.

On peut écrire la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$, avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

On rappelle les résultats du précédent chapitre : $|\underline{H}|$ présente un maximum en ω_0 , et largeur de la bande passante est reliée à ω_0 et Q par : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

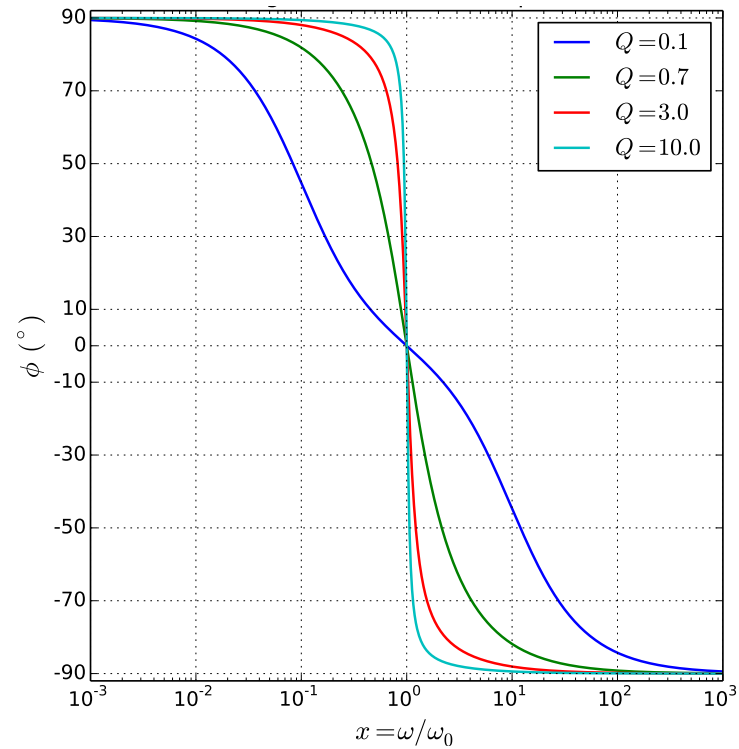
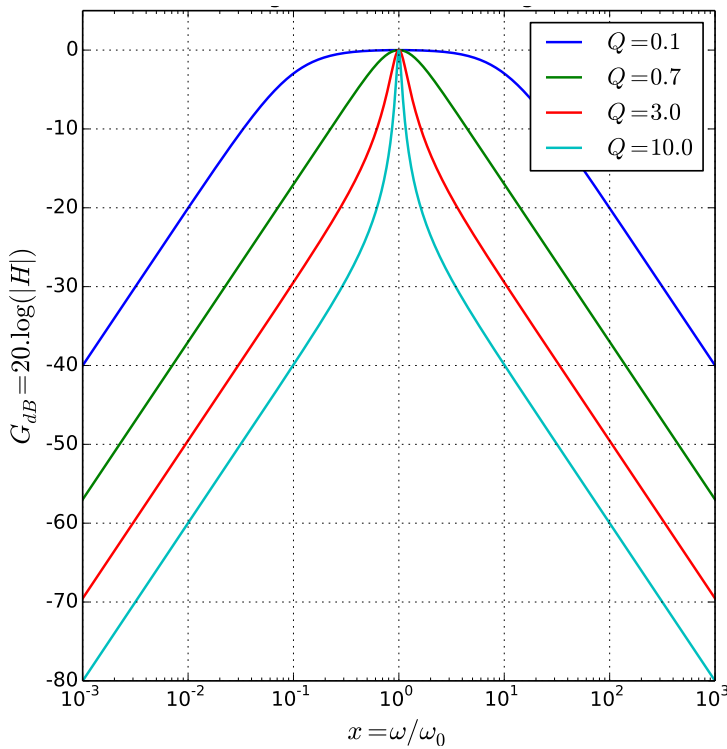
On donne ci-dessous le diagramme de Bode du filtre précédent pour différentes valeurs de Q .

Q3. Déterminer graphiquement les caractéristiques des asymptotes. Dépendent-elles du facteur de qualité ?

Q4. Déterminer les équivalents de la fonction de transfert à basse fréquence et à haute fréquence.

En déduire les équations des asymptotes du diagramme de Bode en gain à basse et à haute fréquence. Comparer au diagramme de Bode fourni.

Q5. Dans quels cas peut-on considérer qu'il est sélectif ?



À connaître : Comportement dérivateur et intégrateur

Le filtre passe-bande se comporte comme un dérivateur à basse fréquence et comme un intégrateur à haute fréquence.

IV Réponse d'un filtre à une excitation

Capacité exigible : Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.

IV.1 Réponse d'un filtre à une somme finie de signaux sinusoïdaux

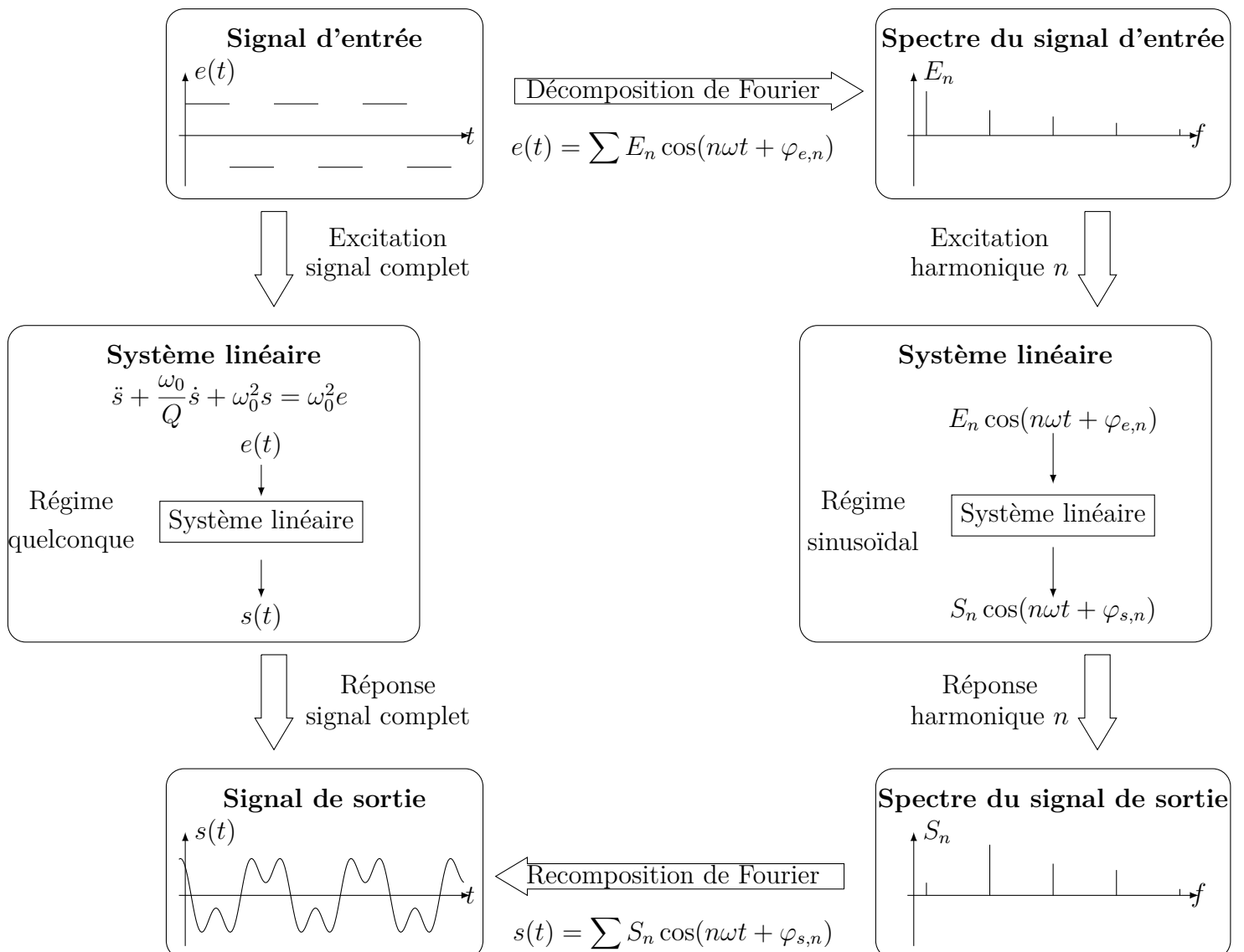
Problème : on donne une tension d'entrée, somme de plusieurs tensions sinusoïdales, et un filtre caractérisé par son diagramme de Bode et/ou sa fonction de transfert harmonique et on souhaite déterminer la tension en sortie du filtre.

♥ À connaître : Réponse à une somme finie de signaux sinusoïdaux

Lorsque le filtre est soumis à un signal d'entrée qui s'écrit comme la somme de signaux sinusoïdaux de pulsations différentes, on procède par superposition :

- Décomposer le signal d'entrée : $u_e(t) = \sum_n u_{en}(t) = \sum_n U_{en} \cos(\omega_n t + \varphi_{e,n})$
- Déterminer la réponse u_{sn} correspondant à chacune des composantes u_{en} grâce à la fonction de transfert harmonique du filtre :
 $u_{sn}(t) = U_{sn} \cos(\omega_n t + \varphi_{s,n})$, avec $U_{sn} = |H(j\omega_n)| \times U_{en}$ et $\varphi_{s,n} = \varphi_{e,n} + \arg(H(j\omega_n))$
- Superposer les termes obtenus : $u_s(t) = \sum_n u_{sn}(t)$

Ainsi connaissant la fonction de transfert harmonique et/ou le diagramme de Bode d'un filtre linéaire on peut connaître la réponse du filtre à n'importe quel signal somme de plusieurs signaux sinusoïdaux ou n'importe quel signal périodique.



💡 Méthode : Déterminer le signal en sortie d'un filtre

1. Séparer le signal d'entrée en signaux sinusoïdaux $u_{en}(t) = U_{en} \cos(\omega_n t + \varphi_{e,n})$
2. Pour chaque composante sinusoïdale, rechercher les caractéristiques (amplitude et phase à l'origine des temps) du signal de sortie $u_{sn}(t) = U_{sn} \cos(\omega_n t + \varphi_{s,n})$ correspondant :
 - Si la fonction de transfert est fournie, évaluer le module et l'argument de \underline{H} à la pulsation ω_n :
 - amplitude de u_{sn} : $U_{sn} = |\underline{H}(j\omega_n)| \times U_{en}$
 - phase à l'origine $\varphi_{s,n}$: $\varphi_{s,n} = \varphi_{e,n} + \arg(\underline{H}(j\omega_n))$
 - Si le diagramme de Bode est fourni :
 - amplitude de u_{sn} :
 - Lire à la pulsation ω_n la valeur du gain en décibel $G_{dB}(\omega_n)$ sur le diagramme de Bode en gain ;
 - Calculer l'amplitude : $U_{sn} = 10^{G_{dB}(\omega_n)/20} \times U_{en}$
 - phase à l'origine $\varphi_{s,n}$:
 - Lire à la pulsation ω_n la valeur de l'argument de \underline{H} (déphasage entre l'entrée et la sortie) sur le diagramme de Bode en phase ;
 - Calculer $\varphi_{s,n}$: $\varphi_{s,n} = \varphi_{e,n} + \underbrace{\arg(\underline{H}(j\omega_n))}_{\text{lu sur le diagramme de Bode}}$
 - En déduire l'expression de $u_{sn}(t)$.
3. En déduire le signal de sortie en sommant les signaux $u_{sn}(t)$ déterminés.

⚠ Attention – Erreur à ne pas commettre

Pour un signal qui n'est pas sinusoïdal pur, vous ne devez pas écrire $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$.

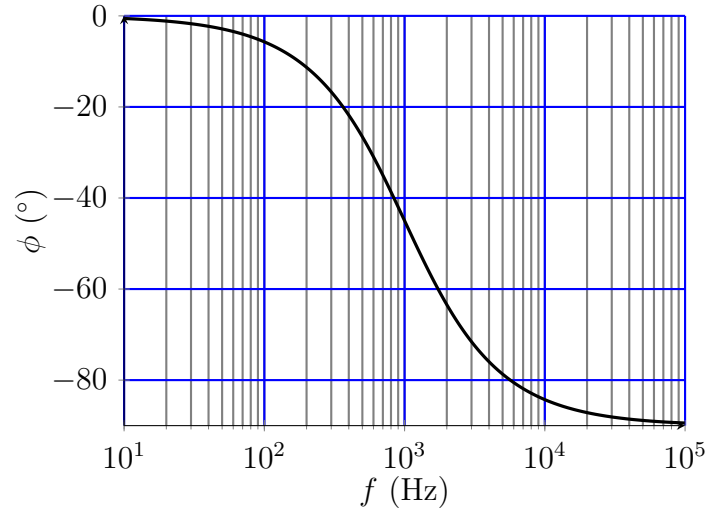
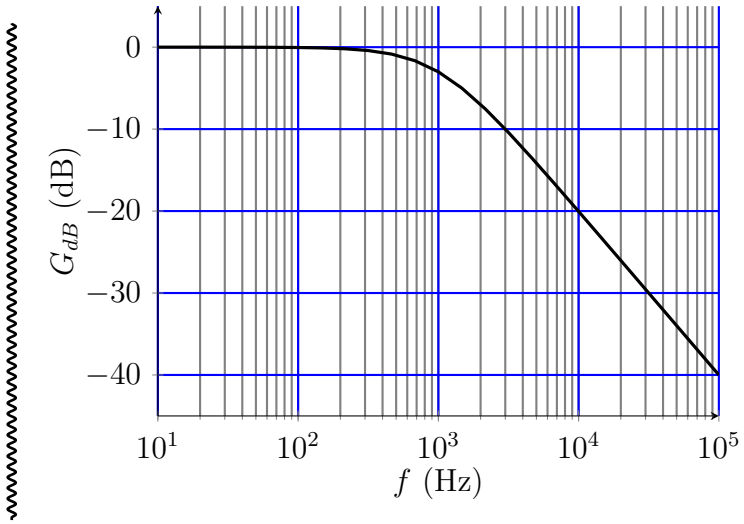
🔧 À maîtriser : Filtrage de la somme de signaux par un filtre passe-bas

On reprend le filtre passe-bas de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$, avec $\omega_c = 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On envoie en entrée le signal $e(t) = E_0 + E \cos(\omega_1 t) + E \cos(\omega_2 t + \pi/3)$, avec $\omega_1 = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_2 = 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Par linéarité, le signal de sortie s'écrit $s(t) = S_0 + S_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{s1}) + S_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{s2})$

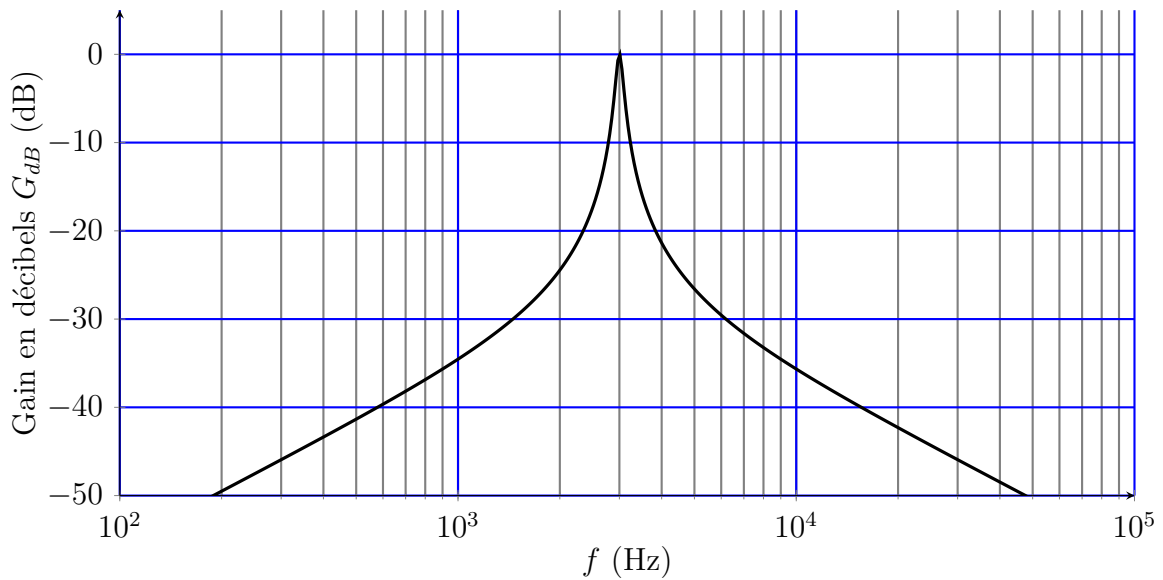
- Q1. Sans calcul, déterminer S_0 .
- Q2. En utilisant la fonction de transfert fournie, déterminer S_1 , S_2 , φ_{s1} et φ_{s2} pour en déduire l'expression du signal de sortie du filtre.
- Q3. Représenter l'allure du signal de sortie.
- Q4. Reprendre la question en utilisant le diagramme de Bode fourni ci-dessous.



IV.2 Réponse d'un filtre à un signal périodique

À maîtriser

On envoie en entrée du filtre dont le diagramme de Bode en gain est donné ci-dessous un signal créneau de fréquence $f_{cr} = 1$ kHz.



- Q1. Superposer le spectre du signal créneau (cf Figure 1 page 3) sur le diagramme de Bode en gain.
- Q2. En déduire l'allure du spectre du signal de sortie, puis le signal de sortie.

IV.3 Simuler l'action d'un filtre

Capacité numérique : Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni.

Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

TP

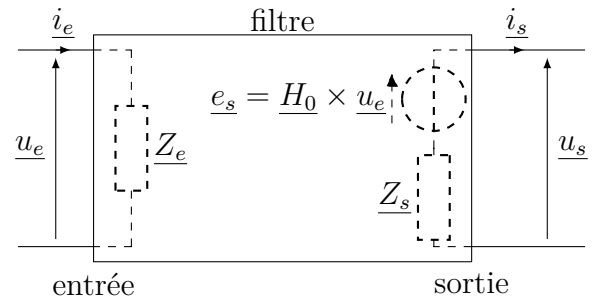
↻ Cf TP n°8 sur le filtre de Wien.

V Mise en cascade de filtres

V.1 Impédances d'entrée et de sortie

L'action d'un filtre linéaire sur le reste du circuit peut être modélisée par le système ci-contre :

- Vu depuis l'entrée, le filtre se comporte comme une impédance \underline{Z}_e , appelée **impédance d'entrée du filtre**, définie par $\underline{Z}_e = \frac{\underline{u}_e}{\underline{i}_e}$.
- En sortie, l'action du filtre sur ce qui se situe après est modélisée par un générateur réel :
 - de fem $\underline{e}_s = \underline{H}_0 \times \underline{u}_e$;
 - d'impédance \underline{Z}_s , appelée **impédance de sortie du filtre**.



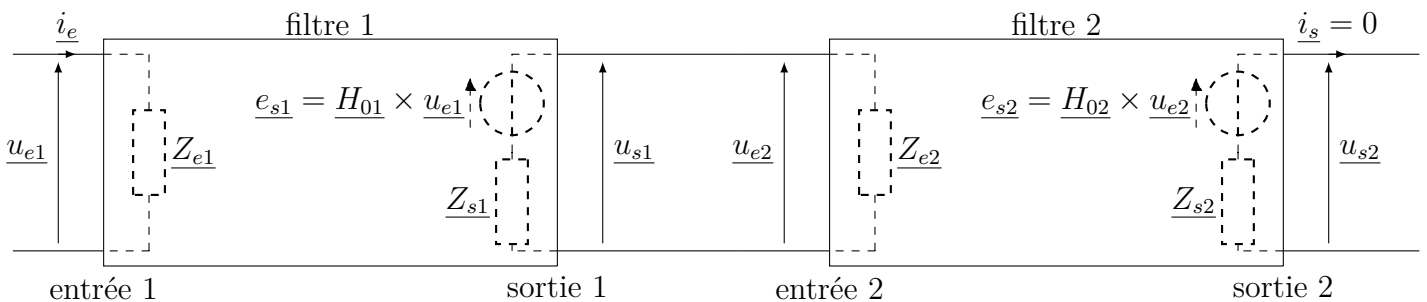
Lorsque le filtre est à vide (rien n'est branché en sortie, donc $\underline{i}_s = 0$), alors $\underline{u}_s = \underline{e}_s = \underline{H}_0 \times \underline{u}_e$, avec \underline{H}_0 la fonction de transfert du filtre non chargé.

Lorsque le filtre est chargé (quelque chose est branchée en sortie, donc $\underline{i}_s \neq 0$), $\underline{u}_s = \underline{e}_s - \underline{Z}_s \times \underline{i}_s$, donc $\underline{u}_s = \underline{H}_0 \times \underline{u}_e - \underline{Z}_s \underline{i}_s \neq \underline{H}_0 \times \underline{u}_e$.

Ainsi la fonction de transfert du filtre chargé $\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \neq \underline{H}_0$: la fonction de transfert du filtre chargé est modifiée par la charge, donc le fonctionnement fréquentiel du filtre est modifié par la charge.

V.2 Mise en cascade de deux filtres

Capacité exigible : Comprendre l'intérêt, pour garantir le fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.



\underline{H}_{01} et \underline{H}_{02} sont les fonctions de transfert à vide des deux filtres (c'est-à-dire lorsqu'ils ne sont pas chargés).

♥ À retenir : Mise en cascade de filtres

La fonction de transfert d'un filtre n'est pas modifiée lors de sa mise en cascade s'il présente une impédance d'entrée très grande, voire infinie, et une impédance de sortie très faible, voire nulle :

$$Z_e(\text{filtre suivant}) \gg Z_s(\text{filtre précédent})$$

La fonction de transfert d'une mise en cascade de filtres d'**impédances d'entrée très grandes**, voire infinies, et d'**impédances de sortie très faibles**, voire nulles, est le produit des fonctions de transfert à vide de chaque filtre :

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2 \times \dots$$

La fonction de transfert de l'ensemble des deux filtres s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_{s2}}{\underline{u}_{e1}} = \frac{\underline{u}_{s2}}{\underline{u}_{e2}} \times \frac{\underline{u}_{e2}}{\underline{u}_{e1}} = \underbrace{\frac{\underline{u}_{s2}}{\underline{u}_{e2}}}_{=\underline{H}_{02}} \times \underbrace{\frac{\underline{u}_{e2}}{\underline{u}_{e1}}}_{\neq \underline{H}_{01}}$$

Le filtre 2 n'est pas chargé, donc $\underline{u}_{s2} = \underline{e}_{s2} = \underline{H}_{02} \times \underline{u}_{e2}$

⚠ Le filtre 1 est chargé par la présence du filtre 2, donc $\frac{u_{s1}}{u_{e1}}$ n'est pas égal à la fonction de transfert \underline{H}_{01} à vide.

Relions $u_{s1} = u_{e2}$ à u_{e1} .

Entre \underline{Z}_{e2} et \underline{Z}_{s1} nous reconnaissons un pont diviseur de tension, ainsi $u_{e2} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \times \underbrace{e_{s1}}_{=H_{01} \times u_{e1}}$

Ainsi $u_{e2} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \times \underline{H}_{01} \times u_{e1}$, donc $\frac{u_{e2}}{u_{e1}} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \times \underline{H}_{01}$

Nous en déduisons l'expression de la fonction de transfert de l'ensemble :

$$\underline{H} = \underline{H}_{02} \times \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \times \underline{H}_{01}$$

La fonction de transfert globale est égale au produit des deux fonctions de transfert à vide :

$$\underline{H} = \underline{H}_{02} \times \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \times \underline{H}_{01} \approx \underline{H}_{02} \times \underline{H}_{01} \Leftrightarrow \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \approx 1$$

Il faut pour cela que $|\underline{Z}_{e2}| \gg |\underline{Z}_{s1}|$

Il faut donc faire très attention lorsque l'on met des filtres en cascades. En effet, **la présence d'un filtre en aval peut charger le filtre en amont, et modifier sa fonction de transfert, et donc son comportement fréquentiel.**