Thème I. Ondes et signaux (Électricité)

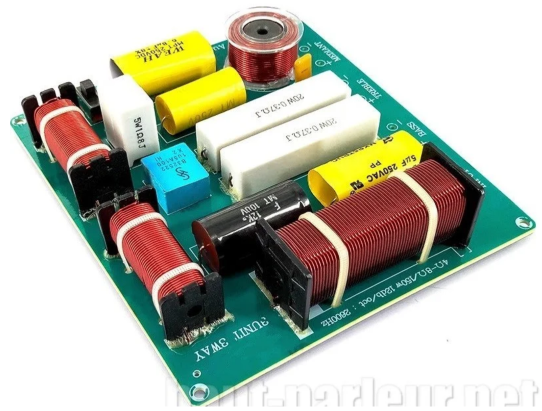
# Chapitre n°8 Filtrage linéaire — Filtres passifs

L'impédance d'un haut-parleur dépend fortement de la fréquence, ainsi la **puissance de l'onde acoustique émise par un haut-parleur dépend de la fréquence**. La bande passante dépend des caractéristiques du haut-parleur, notamment du diamètre de la membrane. Afin de restituer un son de bonne qualité il est nécessaire de choisir le haut-parleur en fonction de la gamme de fréquences des sons que l'on souhaite émettre.

Les sons audibles sont compris entre 20 Hz et 20 kHz, plusieurs haut-parleurs doivent être utilisés pour restituer fidèlement des sons sur toute cette gamme de fréquences.

En entrée de chaque haut-parleur, ne doivent être envoyés que les signaux de fréquences situés dans la bande passante du haut-parleur. Un **filtrage** doit donc être effectué **en amont de chaque haut-parleur**.

En amont du haut-parleur transmettant les **graves** (= woofer ou boomer), il faut supprimer les hautes fréquences tout en conservant les basses fréquences, il faudra un **filtre passe-bas**. En amont du haut-parleur transmettant les **aigües** (= tweeter), il faudra un **filtre passe-haut**. Pour les **fréquences intermédiaires** (= medium), un **filtre passe-bande** pourra être utilisé.



## Pré-requis

- PCSI : Thème Ondes et signaux. Chapitre n°7. Oscillateurs amortis en RSF.

## Objectifs du chapitre

— Définir les notions nécessaires à l'étude des filtres, sur les signaux périodiques et sur les filtres.

— Étudier les filtres du premier et du deuxième ordre.

— Étudier la réponse d'un filtre à différents signaux.

## Plan du cours

# Ai-je bien appris mon cours ?

1 – Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique.

2 – Étblir l'expression de la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.

3 – Que mesure un multimètre en DC ? en AC ? en AC+DC ?

4 – Définir la fonction de transfert harmonique d'un filtre linéaire.

5 – Définir le gain, la phase et le gain en décibels d'une fonction de transfert harmonique.

6 – Définir le diagramme de Bode d'un filtre linéaire.

7 – Qu'est-ce que l'échelle logarithmique ? Comment lit-on une fréquence sur une échelle logarithmique ?

8 – Définir la pulsation de coupure à $-3$ dB et la bande passante à $-3$ dB. *On donnera les deux définitions : à partir du gain, et du gain en décibels.*
Comment la détermine-t-on par le calcul ? graphiquement ?

9 – Tracer le diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ ou d'un filtre passe-haut du premier ordre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0 j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

10 – Comment déterminer les équations des asymptotes au diagramme de Bode en gain ? graphiquement et par le calcul ?

11 – Expliquer la méthode à appliquer pour déterminer le signal de sortie d'un filtre connaissant le signal d'entrée (composée de plusieurs signaux sinusoïdaux) et la fonction de transfert ou le diagramme de Bode.

12 – Quel filtre doit-on utiliser pour réaliser une moyenne ? une intégration ? une dérivation ? Dans quelle condition doit-on l'utiliser ? *Préciser la fréquence de coupure par rapport aux fréquences du signal.*

13 – Que doit-on respecter quand on met en cascades plusieurs filtres pour que le fonctionnement de chaque filtre ne soit pas perturbé par la présence du suivant ?

# I Signaux périodiques

## I.1 Signal périodique

**Définition : Signal périodique**

Considérons un signal $y$ **périodique** de période $T$.

- Un signal $y(t)$ est dit périodique de période $T$ si il existe une durée minimale $T$ non nulle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t+T) = y(t)$$

- La fréquence de ce signal est $f = \dfrac{1}{T}$.

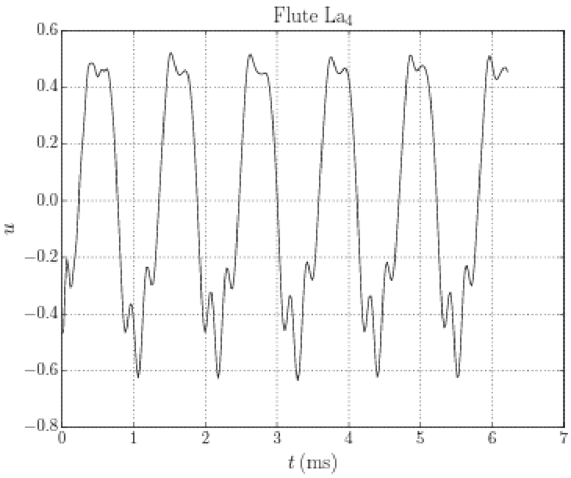



FIGURE 1 – Son émis par une flûte

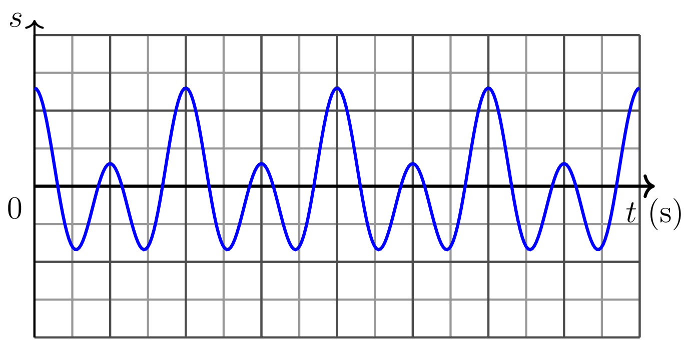



FIGURE 2 – Un signal périodique

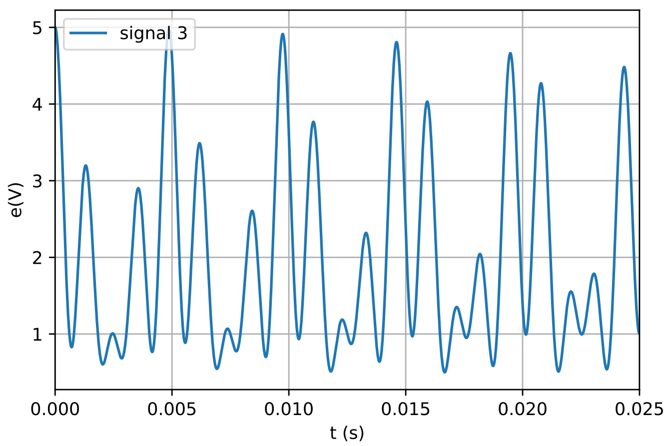



FIGURE 3 – Est-ce un signal périodique ?

## I.2 Valeurs moyenne et efficace d'un signal périodique

Afin de caractériser en amplitude un signal périodique on utilisera les notions de valeur moyenne et de valeur efficace calculées sur une période, durée caractéristique du signal.

### I.2.a) Définitions

**<u>Capacité exigible</u> : Définir valeur moyenne et valeur efficace.**

**Définitions : Valeur moyenne et valeur efficace**

Considérons un signal $y$ **périodique** de période $T$.

- La **<u>valeur moyenne de $y$, notée $\langle y \rangle$</u>**, est définie par : $\langle y \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T y(t)\mathrm{d}t$
- **<u>La valeur efficace de $y$, notée $Y_{\text{eff}}$</u>**, est définie par : $Y_{\text{eff}} = \sqrt{\langle y^2 \rangle} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \big(y(t)\big)^2\mathrm{d}t}$ : c'est la racine de la valeur moyenne du carré de $y$.

### I.2.b) Expression pour un signal sinusoïdal

**<u>Capacité exigible</u> : Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.**

**Démonstration à maîtriser n°1 – Valeur moyenne et valeur efficace des signaux sinusoïdaux**

Q1. Déterminer la valeur moyenne de $i(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ ;

Q2. Déterminer la valeur moyenne de $i^2$ pour $i(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ ;

Q3. Déterminer la valeur efficace de $i(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

**À retenir : Valeur efficace d'un signal sinusoïdal**

La valeur efficace d'un <u>signal sinusoïdal de valeur moyenne nulle</u> est égale à son amplitude divisée par $\sqrt{2}$.

**REMARQUES**

**Valeurs efficaces de signaux périodiques**

- La valeur efficace d'un signal triangulaire d'amplitude $S_m$ vaut : $S_{\text{eff}} = \dfrac{S_m}{\sqrt{3}}$
- La valeur efficace d'un signal créneau d'amplitude $S_m$ vaut : $S_{\text{eff}} = S_m$
- La valeur de la tension notée sur les appareils électriques domestiques est donnée en valeur efficace d'une tension sinusoïdale. En France, on utilise majoritairement une tension $U_{\text{eff}} = 230$ V ce qui correspond à une amplitude $U_m = \sqrt{2}U_{\text{eff}} = 325$ V.

### I.2.c) Mesures

**À retenir : Mesures aux multimètres**

| Mode | Grandeur mesurée | Pour $u(t) = U_0 + U_m\cos(\omega t + \varphi)$ |
|---|---|---|
| Mode DC | Valeur moyenne (composante continue) | $U_{\text{DC}} = U_0$ |
| Mode AC | Valeur efficace de la partie variable du signal | $U_{\text{AC}} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$ |
| Mode AC+DC | Valeur efficace du signal complet | $U_{\text{AC+DC}} = \sqrt{U_0^2 + \dfrac{U_m^2}{2}}$ |

## I.3 Développement en série de Fourier d'un signal périodique

**<u>Capacité exigible</u> : Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.**

### I.3.a) Définition

**À retenir : Développement en série de Fourier d'un signal périodique**

Un **signal** $y$ **périodique de période** $T$ **et de fréquence** $f$ peut s'écrire comme la **somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de la fréquence** $f$ **du signal** $y(t)$.

Le **<u>développement en série de Fourier</u>** de $y$ s'écrit : $y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)\right)$, avec :

- $A_0$ : composante continue, c'est la valeur moyenne du signal ;
- $f$ : fréquence de $y(t)$, également la **<u>fréquence du fondamental $f_1$ ($n = 1$)</u>** ;
- $f_n = nf$ : fréquence de l'**<u>harmonique de rang $n$</u>** ;
- $A_n$ : amplitude de l'harmonique d'ordre $n$ ;
- $\varphi_n$ : la phase à l'origine des temps de l'harmonique d'ordre $n$ .

**L'analyse spectrale est l'opération qui consiste à déterminer les signaux sinusoïdaux composant un signal donné.** En TP, on verra comment réaliser une telle opération avec l'oscilloscope ou un logiciel de traitement de données (regressi, logger pro).

À l'issue d'une analyse spectrale, on obtient :

— les fréquences $f_n$ des composantes sinusoïdales contenues dans le signal,

— l'amplitude $A_n$ de chaque composante sinusoïdale de fréquence $f_n$,

— la phase à l'origine de chaque composante sinusoïdale de fréquence $f_n$.

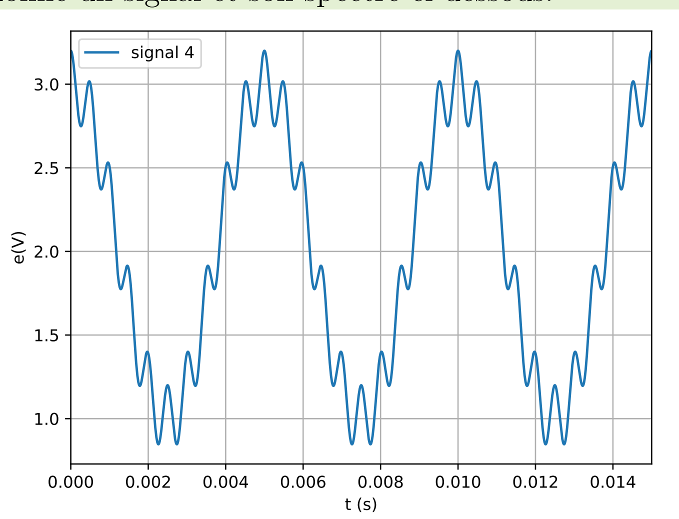
### I.3.b) Spectres

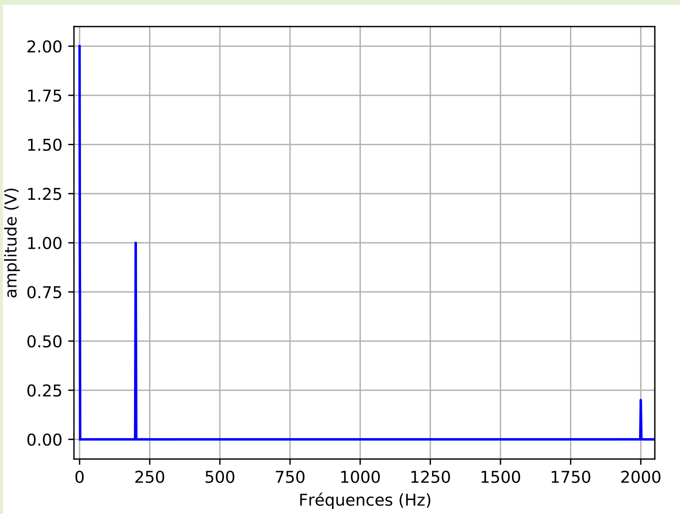
**Définitions : Spectres**

- Le **<u>spectre en amplitude</u>** représente les amplitudes $A_n$ en fonction des fréquences $f_n$ (ou des pulsations $\omega_n = 2\pi f_n$), il caractérise l'importance relative des différents harmoniques présents dans le signal. Le spectre se représente sous la forme de barres verticales de hauteur $A_n$ et d'abscisse $f_n$.
- Le **<u>spectre en phase</u>** représente les phases $\varphi_n$ en fonction des fréquences $f_n$. Le spectre se représente sous la forme de barres verticales reliant les points de coordonnées $(f_n, 0)$ et $(f_n, \varphi_n)$.

**Activité n°2 – Comprendre un spectre**

On donne un signal et son spectre ci-dessous.



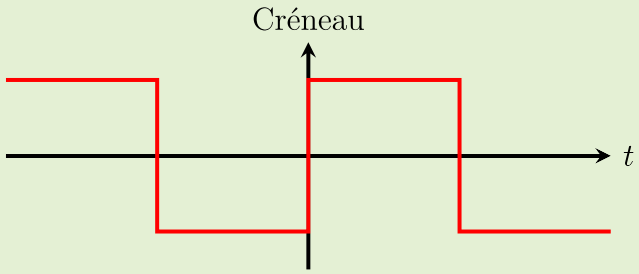

Q1. Est-ce un signal périodique ?

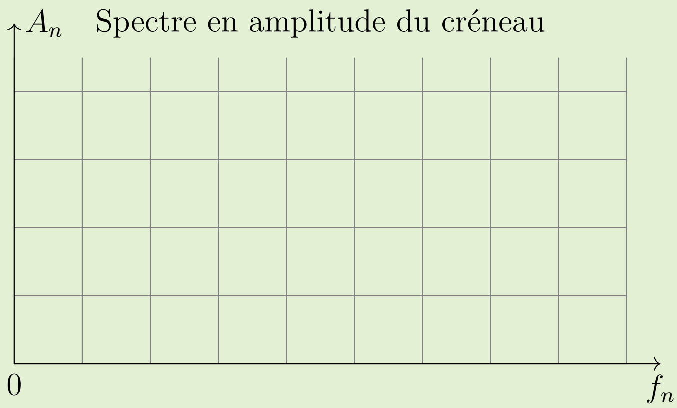
Q2. Déterminer la fréquence du signal à l'aide de son évolution temporelle.

Q3. Exprimer le signal en utilisant son spectre en amplitude.

### Activité n°3 – Créneau

On étudie un signal créneau de période $T = 0,01$ s, et d'amplitude $A = 1$ V.




Le développement en série de Fourier du signal créneau est donné par :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{(2n-1)\pi} \cos((2n-1)\omega t - \pi/2) \quad \text{avec } \omega = 2\pi f$$

FIGURE 4 – Signal Créneau

Q1. Quelle est la fréquence du créneau ?

Q2. Quelles sont les fréquences des harmoniques ? et leurs amplitudes ?

Capytale : constitution d'un signal créneau (Code de partage : 1fd1-7955758)

### I.3.c) Valeur efficace de signaux périodiques

<u>Capacité exigible</u> : **Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.**

La puissance électrique instantanée reçue par un conducteur ohmique s'écrit $\mathscr{P}(t) = Ri^2$ Or $i$ varie rapidement (50 Hz pour le réseau électrique européen par exemple), par conséquent, ce n'est pas la puissance instantanée qui est importante, mais sa valeur moyenne temporelle :

$$\langle \mathscr{P} \rangle = \langle Ri^2 \rangle = RI_{\text{eff}}^2$$

La puissance électrique moyenne en régime périodique, s'exprime comme en régime permanent en remplaçant l'intensité par sa valeur efficace.

Comment exprimer cette valeur efficace si le signal est périodique mais non sinusoïdal ?

### À retenir : Valeur efficace d'un signal périodique

La valeur efficace $Y_{\text{eff}}$ d'un signal $y$ périodique de période $T$ dont le développement de Fourier est donné par $y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)$, dont la $n^{\text{ième}}$ harmonique $y_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ est de valeur efficace $Y_{n,\text{eff}} = \dfrac{A_n}{\sqrt{2}}$ est telle que :

$$\boxed{Y_{\text{eff}}^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,\text{eff}}^2} \Leftrightarrow Y_{\text{eff}} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,\text{ext}}^2}$$

**Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.**

Interprétation : **La puissance électrique transportée par un signal périodique est la somme des puissances électriques transportées par chacune de ses harmoniques.**

# II Fonction de transfert harmonique et diagramme de Bode

## II.1 Filtre linéaire

### II.1.a) Filtre linéaire

**Définitions : Filtre**

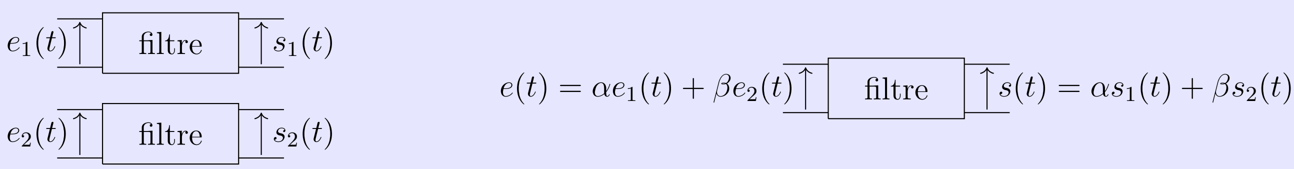
- Un **quadripôle** est un circuit électrique comportant :
  - Deux bornes d'entrée ;
  - Deux bornes de sortie reliées à un circuit d'utilisation, aussi appelé « circuit de charge », ou à un circuit de mesure.


- Un <u>**filtre**</u> est un **quadripôle** qui ne transmet que les signaux dont les fréquences appartiennent à une certaine plage appelée à **bande passante**.

**Définition : Filtre linéaire**

Les filtres que nous étudierons ne contiendront que des composants linéaires ($R$, $L$, $C$). Par conséquent :

- si l'**entrée est un signal sinusoïdal de pulsation** $\omega$, alors le **signal de sortie est sinusoïdal de même pulsation** ;
- et le **principe de superposition s'applique** : si $s_1(t)$ est la réponse du filtre à $e_1(t)$ et $s_2(t)$ est la réponse du filtre à $e_2(t)$ alors : $[\alpha.s_1(t) + \beta.s_2(t)]$ est la réponse du filtre à $[\alpha.e_1(t) + \beta.e_2(t)]$.




### II.1.b) Nature d'un filtre

**Définitions : Nature d'un filtre**

- Un **filtre passe-bas** transmet les signaux à basse fréquence et coupe les signaux à haute fréquence ;
- Un **filtre passe-haut** coupe les signaux à basse fréquence et transmet les signaux à haute fréquence ;
- Un **filtre passe-bande** coupe les signaux à basse fréquence et les signaux à haute fréquence et transmet des signaux de fréquence intermédiaire (autour d'une certaine fréquence).

« Basse fréquence » et « Haute fréquence » est **toujours issue de la comparaison de la fréquence du signal d'entrée avec une fréquence caractéristique du circuit** (fréquence propre par ex.).

### II.1.c) Étude asymptotique

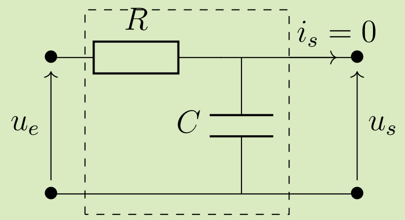
**Méthode : Déterminer la nature d'un filtre (sans calcul)**

- Successivement, à basse fréquence, puis à haute fréquence :
  - Représenter le circuit équivalent en remplaçant les bobines et condensateurs par leurs comportements asymptotiques. En déduire les intensités et tensions nulles.
  - $\boxed{\text{Exprimer } u_s \text{ en fonction de } u_e \text{ uniquement}}$ et éventuellement de résistances.

    ⚠ Il ne doit y avoir aucune autre grandeur électrique que $u_e$ dans l'expression de $u_s$ pour pouvoir conclure.
- Conclure sur la nature du filtre.

### Exercice à maîtriser n°4 — Nature d'un filtre

On étudie le quadripôle suivant constitué d'une résistance $R$ et d'un condensateur de capacité $C$, alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$. On le considère en sortie ouverte ($i_s = 0$), ce qui est le cas lorsqu'on branche un oscilloscope en sortie dont la résistance d'entrée $R_e = 1\ \mathrm{M\Omega} \gg R, \dfrac{1}{C\omega}$.




En suivant la méthode ci-dessus, déterminer la nature du filtre.

## II.2 Fonction de transfert harmonique

L'étude d'un filtre linéaire est menée **en régime sinusoïdal**, en utilisant la **notation complexe**.

$$\text{Tension d'entrée} \quad u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t + \varphi_e) \longrightarrow \underline{u_e}(t) = \underline{U_{em}}e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U_{em}} = U_{em}e^{j\varphi_e}$$

$$\text{Tension de sortie} \quad u_s(t) = U_{sm}\cos(\omega t + \varphi_s) \longrightarrow \underline{u_s}(t) = \underline{U_{sm}}e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U_{sm}} = U_{sm}e^{j\varphi_s}$$

### Définition : Fonction de transfert harmonique (FTH)

Lorsque la tension d'entrée $u_e$ est sinusoïdale de pulsation $\omega$, la tension de sortie $u_s$ l'est également et on définit la **fonction de transfert harmonique** du quadripôle (à vide : $i_s = 0$) par :


$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{U_{sm}}}{\underline{U_{em}}} = \frac{U_{sm}}{U_{em}}e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}}$$

que l'on peut caractériser par :

- son module $|\underline{H}(j\omega)|$, appelé **gain**, noté $G$, sans dimension :

$$\boxed{G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{U_{sm}}{U_{em}}}$$

- son argument $\phi(\omega)$, appelé **phase**, noté $\phi$, en radians :

$$\boxed{\phi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \varphi_s - \varphi_e}$$

c'est le **déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée**.

### Définition : Ordre d'un filtre

On admet que toute fonction de transfert $\underline{H}$ peut se mettre sous la forme d'une fraction **irréductible** de deux polynômes, $\underline{N}$, $\underline{D}$, de variable $j\omega$ : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$. L'**ordre du filtre** correspond au degré de $D$.

### Méthode : Établir une fonction de transfert

Quand le filtre est à vide ($i_s = 0$), l'établissement de la fonction de transfert se fait à l'aide d'un **pont diviseur de tension**. Parfois, il sera nécessaire de procéder à des associations d'impédances au préalable.

### Exercice à maîtriser n°5 – Fonction de transfert

On poursuit l'étude du filtre passe-bas étudié dans le §II.1.c).

Q1. Si $i_s = 0$ A, comment sont $R$ et $C$ ? Quelle relation permet de relier $\underline{u_s}$ et $\underline{u_e}$ ?

Q2. Établir l'expression de la fonction de transfert.

Q3. Exprimer le gain de ce filtre.

Q4. Exprimer la phase $\phi$ du filtre.

## II.3 Gain en décibels

### Définition : Gain en décibels

On définit le **gain en décibels** comme étant 20 fois le logarithme du MODULE de la fonction de transfert :

$$G_{dB} = 20 \log \left( \left| \underline{H} \right| \right)$$

### Exercice à maîtriser n°6 –

Exprimer le gain en décibels du filtre précédent.

### Activité n°7 –

Q1. Si $G = 1$ (c'est-à-dire si $U_{sm} = U_{em}$), alors $G_{dB} =$

Q2. Si $G = 10^{-1}$ (c'est-à-dire si $U_{sm} = U_{em}/10$), alors $G_{dB} =$

Q3. Si $G = 10^{-2}$ (c'est-à-dire si $U_{sm} = U_{em}/100$), alors $G_{dB} =$

## II.4 Pulsation de coupure et bande passante

### Définitions : Pulsation de coupure et bande passante

On définit la (ou les) **pulsation(s) de coupure à $-3$ dB** notée $\omega_c$ par la relation :

$$\boxed{G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\mathrm{dB}}(\omega_c) = G_{\mathrm{dB,max}} - 3 \text{ dB}}$$

La **bande passante à $-$ 3dB** est l'intervalle de pulsations $[\omega_1, \omega_2]$ tel que

$$\boxed{\forall \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad G(\omega) > \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\mathrm{dB}}(\omega) > G_{\mathrm{dB,max}} - 3 \text{ dB}}\text{, avec } 20 \log(\sqrt{2}) = 3 \text{ dB}$$

### Exercice à maîtriser n°8 – Expression d'une pulsation de coupure

On reprend le filtre passe-bas précédent dont gain est $G = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$

Q1. Sur quelle gamme de fréquences, le gain est-il maximal ? Quelle est sa valeur maximale ?

Q2. Établir l'expression de la pulsation de coupure de ce filtre.

## II.5 Diagramme de Bode

### II.5.a) Échelle logarithmique

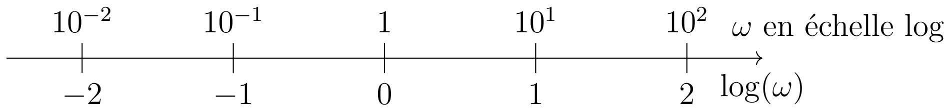
**Capacité exigible : Utiliser les échelles logarithmiques.**

Problématique : Dans l'étude des filtres comme dans d'autres domaines de la physique, on souhaite représenter l'évolution d'une grandeur physique sur un intervalle très large, s'étalant sur plusieurs ordres de grandeur.

Le long d'une échelle linéaire, la zone comprise entre $10^{-2}$ et $10^{1}$ occupe très peu d'espace alors qu'elle s'étend sur 3 ordres de grandeur.

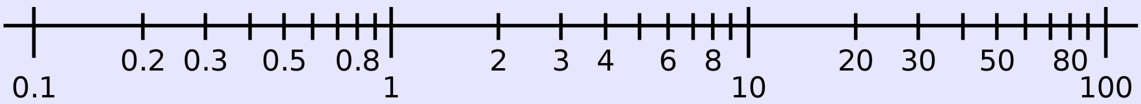

Pour que chaque ordre de grandeur occupe la même place, on préfère utiliser une **échelle logarithmique.**

Un changement d'un ordre de grandeur en $\omega$ correspond seulement à une augmentation d'une unité en $\log(\omega)$.




**Définitions**

Échelle logarithme sur $[10^{-1}\text{ Hz}; 10^{2}\text{ Hz}]$



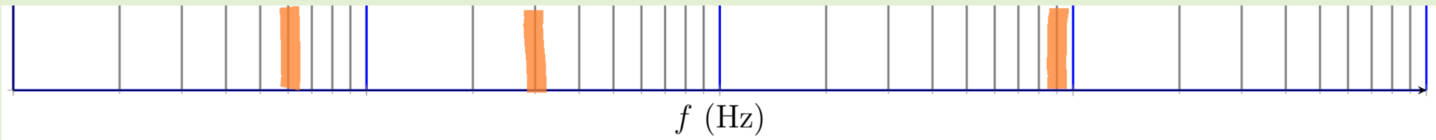

Chaque intervalle de pulsation $\left[\omega_1, 10 \times \omega_1\right]$ est appelé **décade**.
Chaque décade occupe la même place en échelle logarithmique, ainsi il y a la même précision entre 10 et 100 Hz qu'entre $10^4$ et $10^5$ Hz...

## Activité n°9 — Lecture sur une échelle log

L'échelle fournie commence à $1 \times 10^{-1}$ Hz.

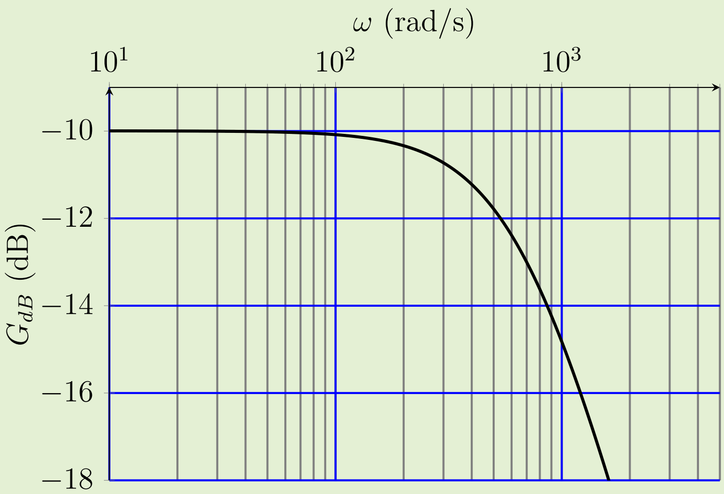
Q1. Placer les fréquences suivantes sur l'échelle ci-dessous : $2.10^{-1}$ Hz ; $10^2$ Hz ; 50 Hz ; 7 Hz.

Q2. Quelles sont les fréquences indiquées ?




## Activité n°10 — Lecture de pulsation de coupure

Déterminer graphiquement la pulsation de coupure sur le graphe ci-contre.



### II.5.b) Diagramme de Bode

## Définition : Diagramme de Bode

Le <u>**diagramme de Bode d'un filtre**</u> est la donnée de deux diagrammes :

- le **diagramme en gain** : on représente le **gain en décibels** $G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|)$ **de la fonction de transfert en fonction de la pulsation** $\omega$ (ou de la fréquence $f$) **en échelle logarithmique** ;
- le **diagramme en phase** : on représente l'**argument de la fonction de transfert** $\phi = \arg(\underline{H})$ **en fonction de la pulsation** $\omega$ (ou de la fréquence $f$) **en échelle logarithmique**.

<u>**Capacité exigible**</u> : **Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.**

## Méthode : Tracer le diagramme de Bode

- <u>**Diagramme asymptotique**</u>
  - Écrire la fonction de transfert harmonique.
  - Écrire l'équivalent de la fonction de transfert à basse et haute fréquence.
  - **Diagramme asymptotique en gain**
    - En déduire l'équivalent du gain en décibels $G_{\mathrm{dB}}\Big(\log(\omega)\Big)$ à BF et HF, sous la forme $a\log(\omega) + b$, avec $a$ la pente (en dB/dec) de l'asymptote. Si $a = 0$, l'asymptote est horizontale à b dB.
    - Tracer ces deux asymptotes.
  - **Diagramme asymptotique en phase**
    - Déterminer les limites du déphasage $\phi$ en basses et hautes fréquences.
    - Tracer ces deux asymptotes.
- <u>**Diagramme réel**</u>

  Pour tracer le diagramme réel, il est nécessaire d'ajouter des points particuliers.
  - Pour les filtres du premier ordre, placer la pulsation de coupure, le gain en décibels et la phase à cette pulsation permettront de tracer ce diagramme.
  - Pour les filtres du second ordre, placer la pulsation de résonance si elle existe et / ou la pulsation propre $\omega_0$.

## Exercice à maîtriser n°11 — Tracé d'un diagramme de Bode

**Q1.** À basse fréquence :

(a) Que signifie « basse fréquence » ?

(b) Déterminer l'équivalent de la fonction de transfert à basse fréquence.

(c) Déterminer l'équation de l'asymptote au diagramme de Bode en gain. Est-elle horizontale ? Si oui, à quelle valeur de gain en dB ? Si non, quelle est sa pente ?

(d) Déterminer l'équation de l'asymptote au diagramme de Bode en phase. Comment est-elle ?

**Q2.** À haute fréquence :

(a) Que signifie « haute fréquence » ?

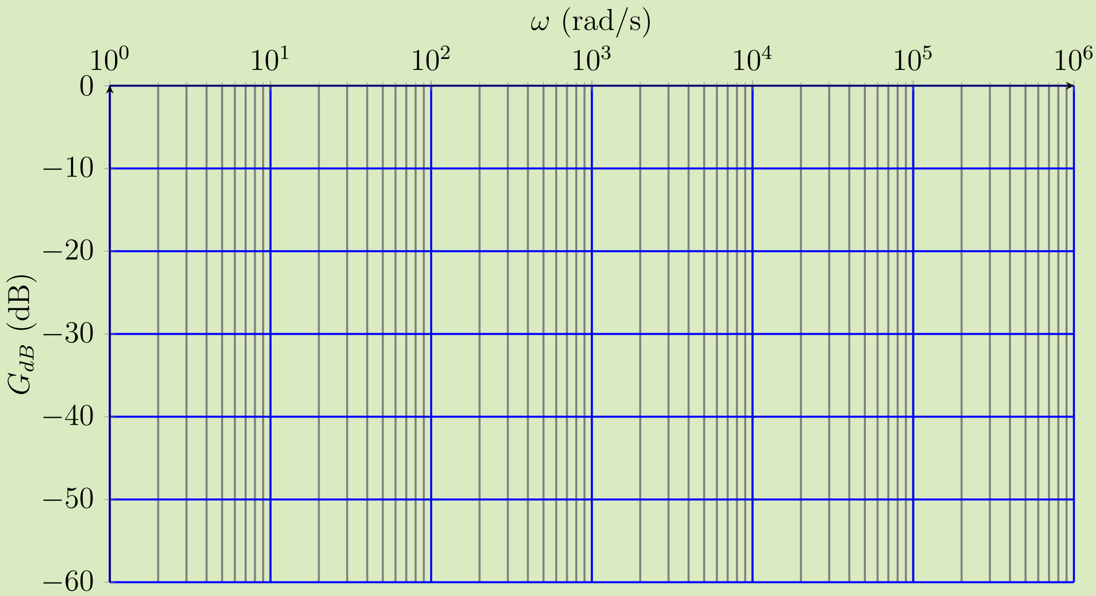
(b) Déterminer l'équivalent de la fonction de transfert à haute fréquence.

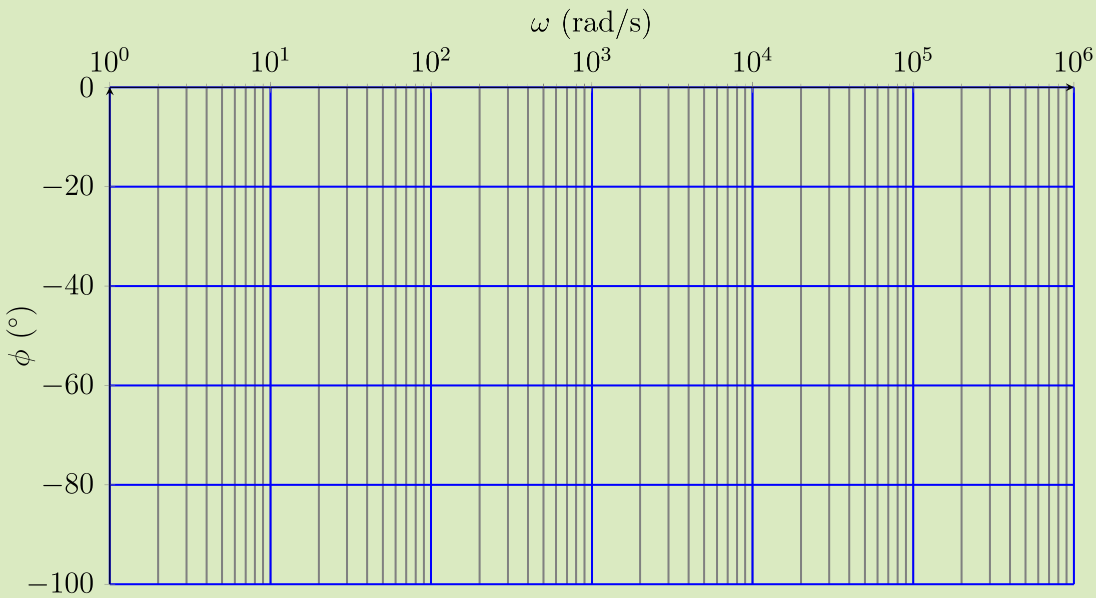
(c) Déterminer l'équation de l'asymptote au diagramme de Bode en gain. Est-elle horizontale ? Si oui, à quelle valeur de gain en dB ? Si non, quelle est sa pente ?

(d) Déterminer l'équation de l'asymptote au diagramme de Bode en phase. Comment est-elle ?

**Q3.** Tracer le diagramme de Bode asymptotique en gain et en phase.
On prendra $R = 10^4\ \Omega$ et $C = 10^{-7}$ F.

**Q4.** Placer la pulsation de coupure et la valeur du gain en décibels et de phase à cette pulsation et tracer le diagramme de Bode réel.

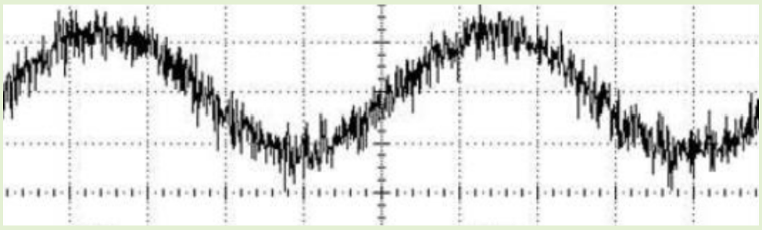


**Capacité exigible** : **Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.**

### Activité n°12 — Signal bruité

Au laboratoire, on réalise une expérience nécessitant l'acquisition d'un signal très sensible aux perturbations (par exemple électromagnétiques ...). Le signal que l'on est censé observé est de fréquence de la centaine de hertz. Les perturbations correspondent à des signaux à très hautes fréquences (de l'ordre de 10 kHz) qui se superposent au signal qui nous intéressent.



Problème : à cause de ces parasites, le signal obtenu n'est pas facilement exploitable.

Q1. Représenter le spectre du signal bruité.

Q2. Représente le spectre du signal débruité que l'on souhaite obtenir.

Q3. Comment faut-il procéder pour « débruiter » le signal ?

Q4. Proposer des valeurs de $R$ et $C$ permettant de débruiter le signal. Le bruit devra être atténué d'un facteur au moins 100, et le signal utile le moins atténué possible.

# III Modèles de filtres passifs

## III.1 Filtre passe-bas d'ordre 1

Le filtre passe-bas d'ordre 1 a été entièrement étudié dans la partie précédente pour appliquer les différentes définitions et méthodes.

## III.2 Filtre passe-haut d'ordre 1

### Exercice à maîtriser n°13 — Étude d'un filtre passe-haut

Q1. Proposer un filtre passe-haut avec un condensateur et une résistance. Vérifier la nature du filtre par une étude qualitative (cf II.1.c)).

Q2. Établir l'expression de la fonction de transfert (cf II.2).

Q3. Exprimer le gain du filtre.

Q4. Déterminer l'expression de la pulsation de coupure de ce filtre en fonction de $C$ et $R$ (cf II.4).

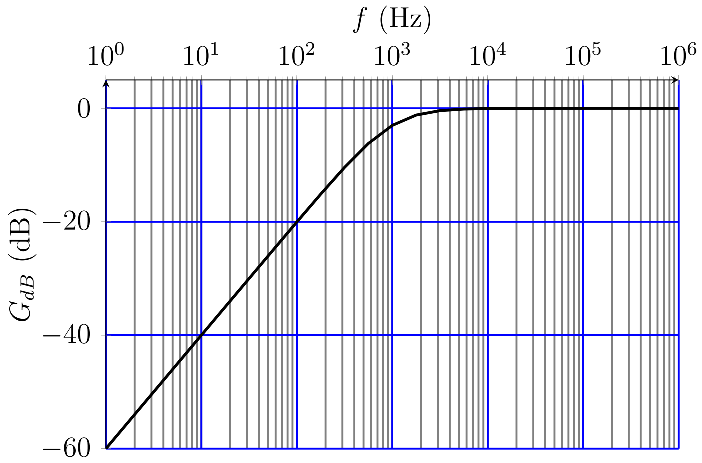
Q5. Réécrire la fonction de transfert en faisant intervenir la pulsation de coupure.

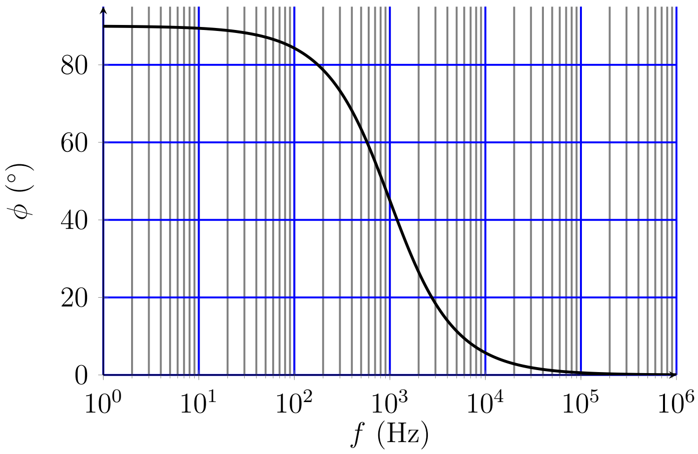
Q6. À basse fréquence, à partir de l'équivalent de la fonction de transfert à basse fréquence, déterminer les équations des asymptotes aux deux diagrammes de Bode (cf II.5.b)).

Q7. Déterminer les équations des asymptotes aux deux diagrammes de Bode (cf II.5.b)) à haute fréquence.

Q8. Tracer le diagramme de Bode asymptotique.

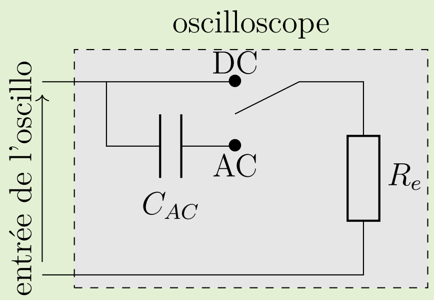
Q9. Placer la pulsation de coupure, et racer le diagramme de Bode réel.




### Activité n°14 — Mode AC de l'oscilloscope

On peut utiliser les voies de l'oscilloscope en mode DC et en mode AC. En mode AC, un filtre passe-haut du 1er ordre de fréquence de coupure $f_c = 10$ Hz est connecté.




Q1. La résistance d'entrée $R_e$ de l'oscilloscope est d'environ 1 MΩ. Pourquoi est-elle si élevée ?

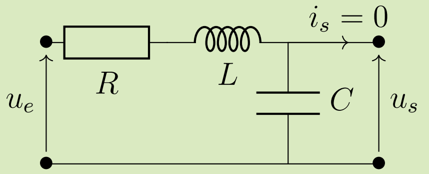
Q2. En déduire la valeur de la capacité du condensateur placé à l'entrée en mode AC.

Q3. Que se passe-t-il si on observe en mode AC un signal de fréquence 1 Hz ?

## III.3 Filtre passe-bas d'ordre 2

### Exercice à maîtriser n°15 — Nature du filtre

On étudie le circuit ci-contre alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$, en sortie ouverte ($i_s = 0$).
Déterminer la nature du filtre à partir du circuit.



**<u>Capacité exigible</u> : Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.**

## Méthode : Interpréter les asymptotes d'un Bode en lien avec la FTH

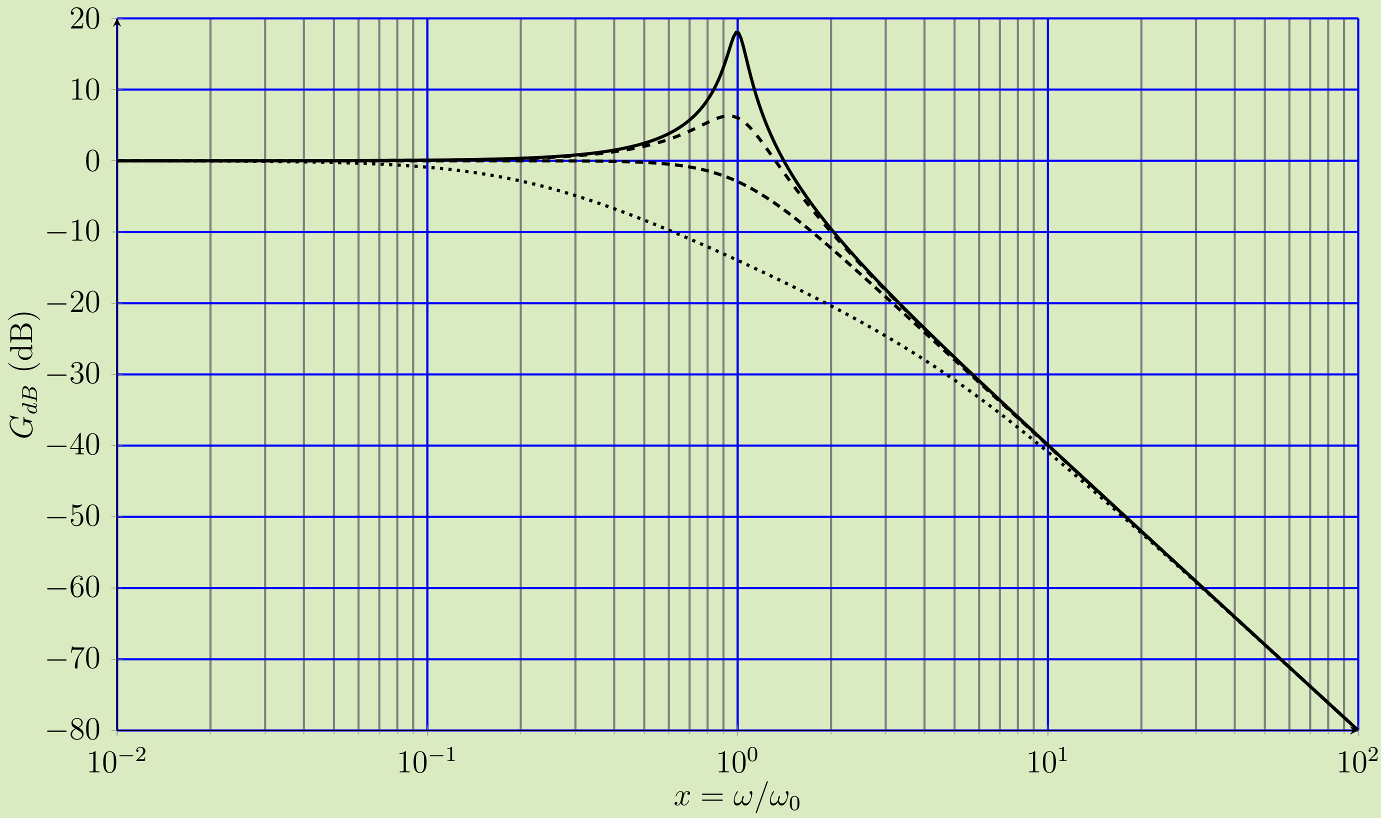
- <u>Sur le diagramme de Bode</u> :
  - Déterminer graphiquement les pentes des asymptotes du diagramme en gain, que l'on donne en dB/décade.

    En échelle logarithmique en fréquence, la pente est donnée par : $\dfrac{G_{dB}(f_2) - G_{dB}(f_1)}{\log(f_2) - \log(f_1)}$ [en dB/dec]

    Idéalement, prendre un intervalle d'une décade, c'est-à-dire $f_2 = 10 f_1$ (ainsi $\log(f_2) - \log(f_1) = 1$).
- <u>Sur la fonction de transfert</u> :
  - Établir les équivalents de la fonction de transfert à haute fréquence et à basse fréquence.
  - En déduire les équivalents du gain en décibels $G_{\mathrm{dB}}\big(\log(\omega)\big)$ et les écrire sous la forme $a\log(\omega) + b$, avec $a$ la pente (en dB/dec) de l'asymptote. Si $a = 0$, l'asymptote est horizontale à b dB.
- Comparer et commenter.

## Exercice à maîtriser n°16 — Interprétation du diagramme de Bode

On donne la fonction de transfert harmonique d'un filtre passe-bas du 2$^{\text{e}}$ ordre $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$ et le diagramme de Bode en gain associé pour différentes valeurs de $Q$.




Q1. À quelle résonance cette expression vous fait-elle penser ? En rappeler les caractéristiques.

Q2. Attribuer les valeurs de $Q$ ($Q = 0,2$ ; $Q = 1/\sqrt{2}$ ; $Q = 2$ et $Q = 8$) aux courbes.

Q3. Déterminer graphiquement les équations des asymptotes. Dépendent-elles du facteur de qualité ?

Q4. Déterminer l'équivalent de la fonction de transfert à basse fréquence et en déduire l'équation des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude. Comparer au diagramme de Bode fourni.

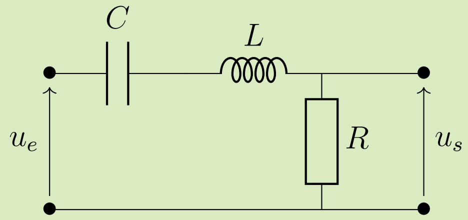
Q5. Faire de même à haute fréquence.

Q6. Quel est l'intérêt d'un filtre passe-bas du deuxième ordre par rapport au premier ordre ? Que peut-il se produire avec un filtre du 2$^{\text{e}}$ ordre ? Est-ce souhaitable pour un filtre passe-bas ? Comment choisir $Q$ ?

## III.4 Filtre passe-bande d'ordre 2

### Exercice à maîtriser n°17 — Étude d'un filtre passe-bande d'ordre 2

On étudie le circuit RLC série alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$.




**Q1.** Déterminer la nature du filtre à partir du circuit.

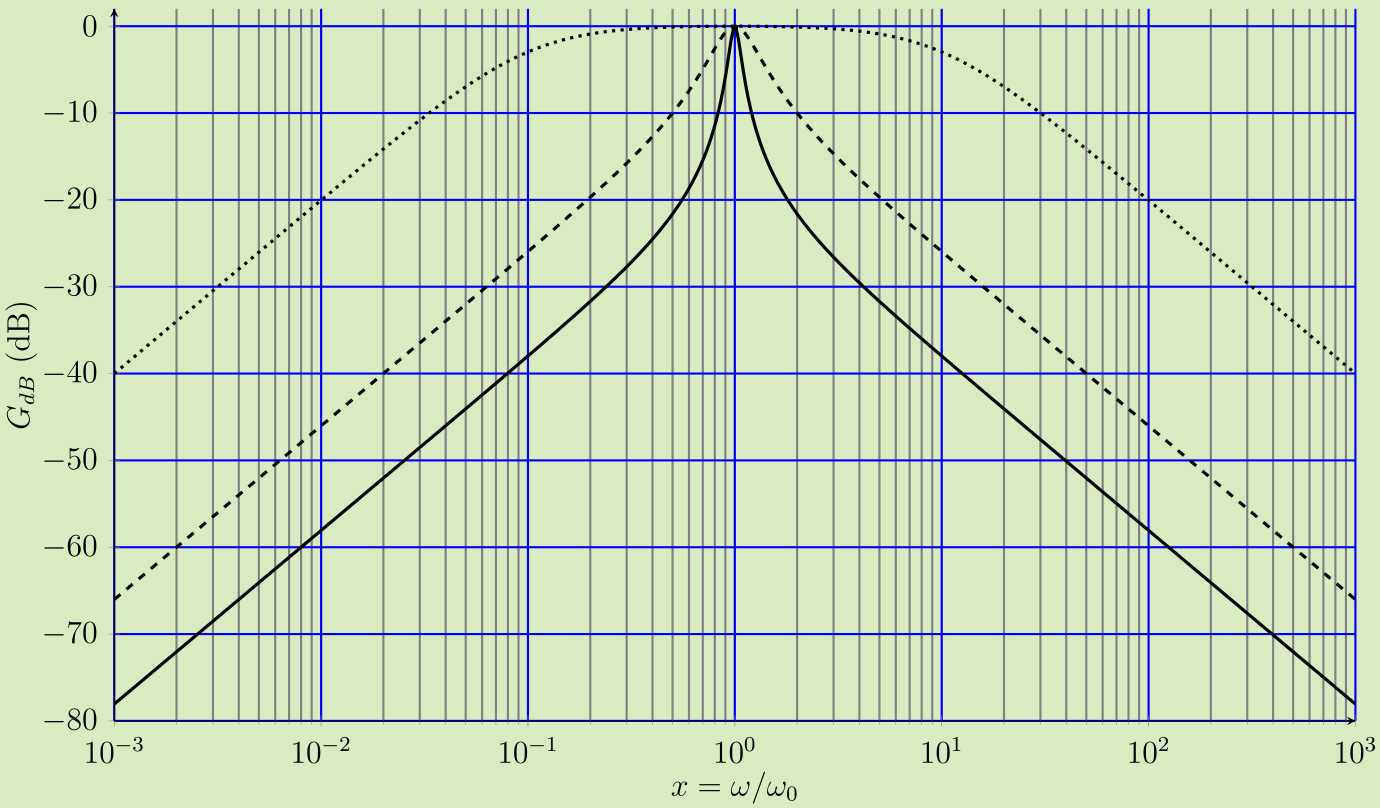
**Q2.** Établir la fonction de transfert harmonique de ce filtre.

On retrouve une expression semblable à celle obtenue pour l'intensité complexe lors de l'étude de la résonance en intensité du RLC série.

On peut écrire la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$, avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

**Q3.** Pour quelle pulsation le gain est-il maximal ?
Rappeler l'expression de la largeur de la bande passante $\Delta\omega$ pour ce système.

On donne ci-dessous le diagramme de Bode du filtre précédent pour différentes valeurs de $Q$.




**Q4.** Attribuer les trois valeurs de $Q$ suivantes à chaque courbe : 0,1 ; 2 et 8.
Dans quel cas peut-on considérer qu'il est sélectif ?

**Q5.** Déterminer graphiquement les caractéristiques des asymptotes. Dépendent-elles du facteur de qualité ?

**Q6.** Déterminer les équivalents de la fonction de transfert à basse fréquence et à haute fréquence.
En déduire les équations des asymptotes du diagramme de Bode en gain à basse et à haute fréquence. Comparer au diagramme de Bode fourni.

**Capacité exigible** : **Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.**

### Activité n°18 — Radios !

Voici le tableau des radios principales captées à Valence.

| Station | $f$ (MHz) | Station | $f$ (MHz) | Station | $f$ (MHz) |
|---|---|---|---|---|---|
| Ici Drôme Ardèche | 87,9 | France Culture | 88,5 | Tsf Jazz | 89,5 |
| Rire Et Chansons | 90,3 | Virgin Radio | 91,3 | France Musique | 92,4 |
| Radio BLV | 93,6 | MTI | 94,5 | Sud Radio | 95,1 |
| Chérie FM | 95,5 | Skyrock | 96 | Nostalgie | 96,8 |
| France Inter | 97,4 | Radio A | 97,8 | Fun Radio | 98,8 |
| Radio Mega | 99,2 | NRJ | 100,2 | RCF 26 | 101,5 |
| RFM | 102,7 | France Info | 103,4 | RMC | 104,3 |
| Europe 1 | 104,8 | France Info | 105,4 | RTL | 105,9 |
| Radio Classique | 106,4 | Beur Fm | 107 | | |

Q1. Pour que le poste de radio fonctionne bien, c'est-à-dire pour que l'on n'entende pas plusieurs stations de radio en même temps, faut-il que la bande passante du filtre soit large ou étroite ?

Q2. Proposer une valeur du facteur de qualité pour que le poste de radio fonctionne bien.

# IV Réponse d'un filtre à une excitation

**Capacité exigible** : **Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.**

## IV.1 Réponse d'un filtre à une somme finie de signaux sinusoïdaux

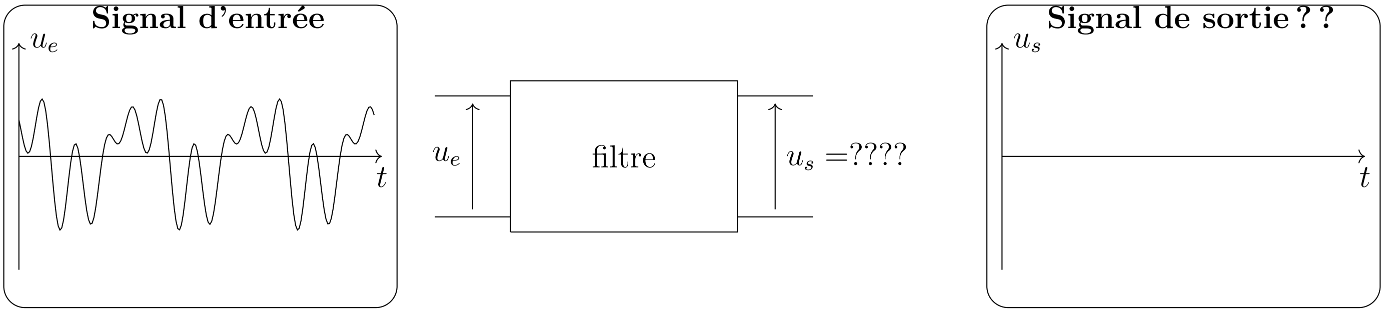
Problème : on donne une tension d'entrée, somme de plusieurs tensions sinusoïdales, et un filtre caractérisé par son diagramme de Bode et/ou sa fonction de transfert harmonique et on souhaite déterminer la tension en sortie du filtre.

### Méthode : Déterminer le signal en sortie d'un filtre

1. Séparer le signal d'entrée en signaux sinusoïdaux $e_n(t) = E_n \cos(\omega_n t + \varphi_{e,n})$
2. Pour chaque composante sinusoïdale, rechercher les caractéristiques (amplitude et phase à l'origine des temps) du signal de sortie $s_n(t) = S_n \cos(\omega_n t + \varphi_{s,n})$ correspondant :
   - Si la fonction de transfert est fournie, évaluer le module et l'argument de $\underline{H}$ à la pulsation $\omega_n$ :
     - amplitude de $s_n$ : $S_n = \left|\underline{H}(j\omega_n)\right| \times E_n$
     - phase à l'origine $\varphi_{s,n}$ : $\varphi_{s,n} = \varphi_{e,n} + \arg\left(\underline{H}(j\omega_n)\right)$
   - Si le diagramme de Bode est fourni :
     - amplitude de $s_n$ :
       - **Lire** la valeur du gain en décibel $G_{\mathrm{dB}}(\omega_n)$ à la pulsation $\omega_n$ ;
       - **Exprimer/calculer** l'amplitude : $S_n = 10^{G_{\mathrm{dB}}(\omega_n)/20} \times E_n$
     - phase à l'origine $\varphi_{s,n}$ :
       - **Lire** à la valeur $\phi\left(\omega_n\right)$ à la pulsation $\omega_n$ ;
       - **Exprimer/calculer** $\varphi_{s,n}$ : $\varphi_{s,n} = \varphi_{e,n} + \underbrace{\phi\left(\omega_n\right)}_{\text{lu sur le diagramme de Bode}}$
   - En déduire l'expression de $s_n(t)$.
3. En déduire le signal de sortie en sommant les signaux $s_n(t)$ déterminés.

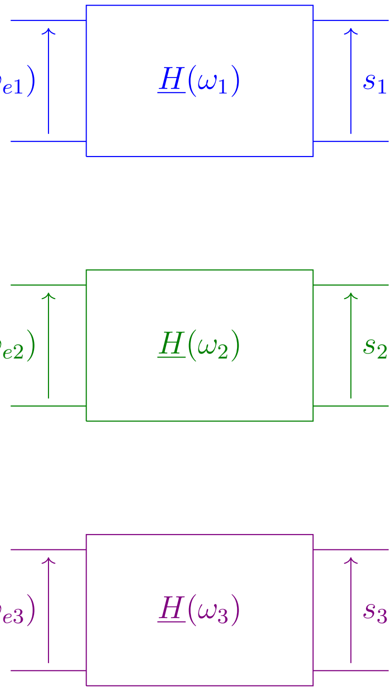
### Attention — Erreur à ne pas commettre

Pour un signal qui n'est pas sinusoïdal pur, vous ne devez pas écrire $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$.




$$u_e = \sum_n e_n = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_{e,n})$$

$=$




$e_1(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{e1})$ → $\underline{H}(\omega_1)$ → $s_1 = S_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{s1})$

$$\begin{aligned} S_1 &= E_1 \times \left|\underline{H}(\omega_1)\right| \\ S_1 &= E_1 \times 10^{-\frac{G_{\text{dB}}(\omega_1)}{20}} \\ \varphi_{s1} &= \varphi_{e1} + \arg(\underline{H}(\omega_1)) \\ \varphi_{s1} &= \varphi_{e1} + \phi(\omega_1) \end{aligned}$$

$+$ $\qquad$ $+$

$e_2(t) = E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{e2})$ → $\underline{H}(\omega_2)$ → $s_2 = S_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{s2})$

$$\begin{aligned} S_2 &= E_2 \times \left|\underline{H}(\omega_2)\right| \\ S_2 &= E_2 \times 10^{-\frac{G_{\text{dB}}(\omega_2)}{20}} \\ \varphi_{s2} &= \varphi_{e2} + \arg(\underline{H}(\omega_2)) \\ \varphi_{s2} &= \varphi_{e2} + \phi(\omega_2) \end{aligned}$$

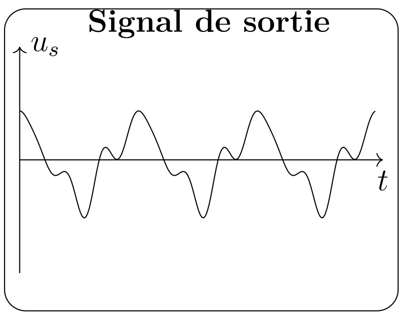
$+$ $\qquad$ $+$

$e_3(t) = E_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_{e3})$ → $\underline{H}(\omega_3)$ → $s_3 = S_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_{s3})$

$$\begin{aligned} S_3 &= E_3 \times \left|\underline{H}(\omega_3)\right| \\ S_3 &= E_3 \times 10^{-\frac{G_{\text{dB}}(\omega_3)}{20}} \\ \varphi_{s3} &= \varphi_{e3} + \arg(\underline{H}(\omega_3)) \\ \varphi_{s3} &= \varphi_{e3} + \phi(\omega_3) \end{aligned}$$

$=$

$$\begin{aligned} u_s(t) &= s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + \ldots \\ u_s(t) &= S_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{s1}) + S_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{s2}) + \ldots \end{aligned}$$



### Exercice à maîtriser n°19 — Filtrage de la somme de signaux par un filtre passe-bas

On reprend le filtre passe-bas de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$, avec $\omega_c = 10^3$ rad · s$^{-1}$.

Soit le signal en entrée $u_e(t) = E_0 + E\cos(\omega_1 t) + E\cos(\omega_2 t + \pi/3)$, avec $\omega_1 = 100$ rad · s$^{-1}$ et $\omega_2 = 10^4$ rad · s$^{-1}$.

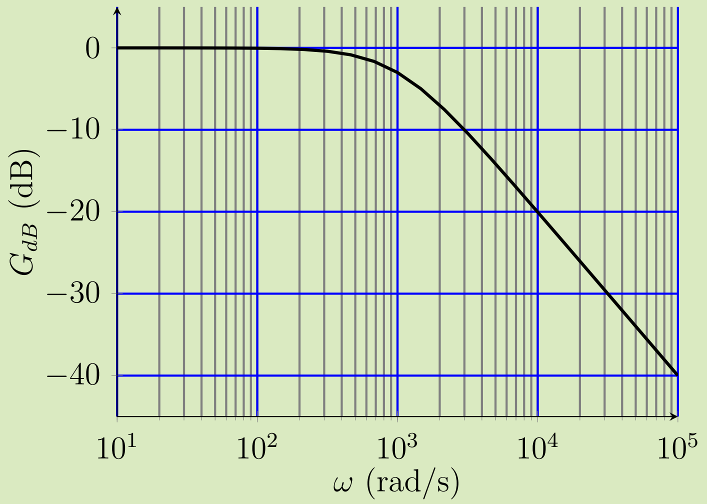
Q1. Écrire le signal de sortie $u_s(t)$ en introduisant les amplitudes et phases nécessaires.

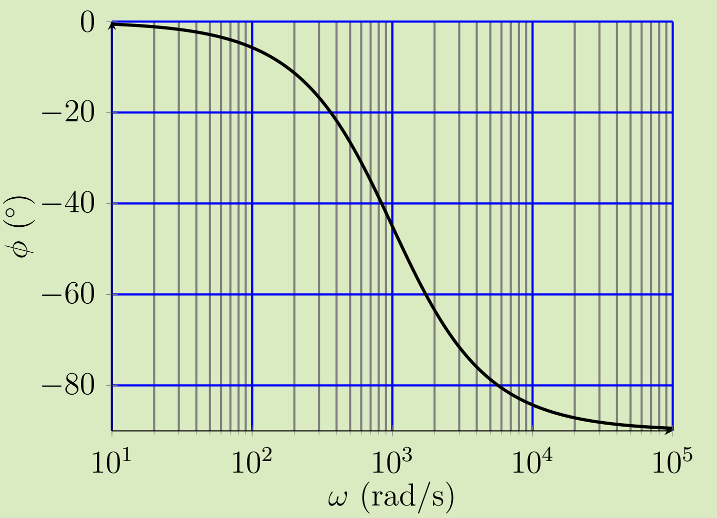
Q2. Sans calcul, déterminer la composante continue $S_0$ de $u_s$.

Q3. En utilisant la fonction de transfert fournie, déterminer $S_1$, $S_2$, $\varphi_{s1}$ et $\varphi_{s2}$ pour en déduire l'expression du signal de sortie du filtre.

Q4. Représenter l'allure du signal de sortie.

Q5. Reprendre la question en utilisant le diagramme de Bode fourni ci-dessous.

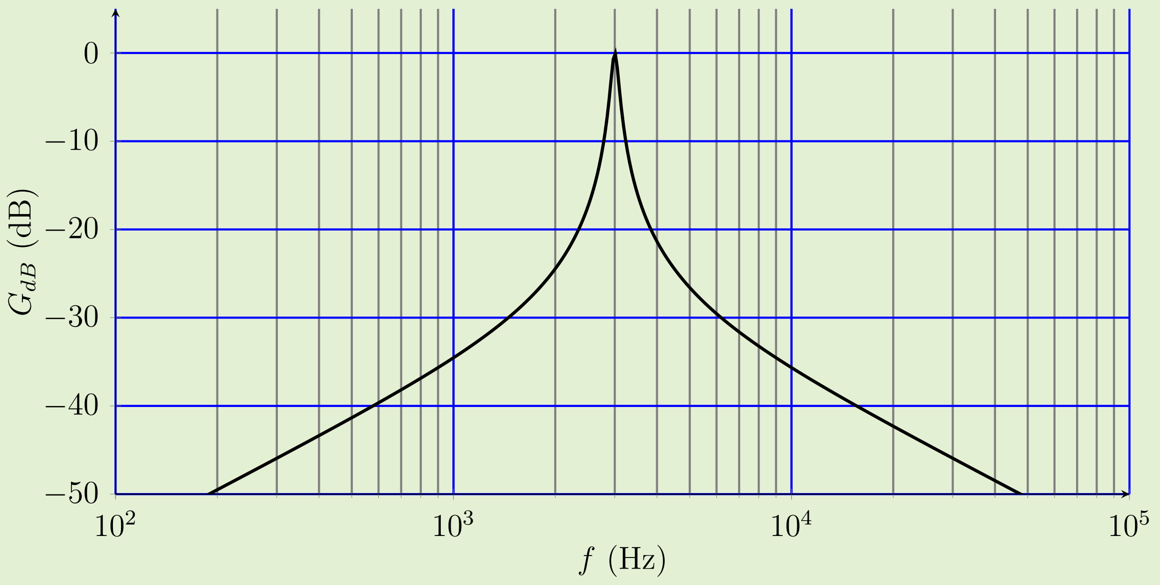



## IV.2 Réponse d'un filtre à un signal périodique

### Activité n°20 —

On envoie en entrée du filtre dont le diagramme de Bode en gain est donné ci-dessous un signal créneau de fréquence $f_{\text{cr}} = 1$ kHz.




Q1. Superposer le spectre du signal créneau (cf Figure 4 page 6) sur le diagramme de Bode en gain.

Q2. En déduire l'allure du spectre du signal de sortie, puis le signal de sortie.

## IV.3 Quelques fonctions particulières

**Capacité numérique : Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur.**

### IV.3.a) Comportement moyenneur

**Démonstration à maîtriser n°21 – Réalisation d'un moyenneur**

Comment récupérer la valeur moyenne de $u_e(t) = E_0 + E_1\cos(\omega_1 t) + E_2\cos(2\omega_1 t) + ...$ ? Autrement dit : que faut-il conserver ? que faut-il supprimer ? Quel filtre utiliser et avec quelles caractéristiques ?

**À connaître : Obtention d'un moyenneur**

Un filtre passe-bas de fréquence de coupure très petite devant la fréquence du signal d'entrée aura un effet moyenneur.

### IV.3.b) Comportement intégrateur à haute fréquence

**Démonstration à maîtriser n°22 – Réalisation d'un intégrateur**

On rappelle l'équivalent à haute fréquence (pour $\omega \gg \omega_c$) de la fonction de transfert d'un passe-bas du 1er :
$\underline{H}_{HF} \sim \dfrac{1}{j\frac{\omega}{\omega_c}}$

Q1. En repartant de la définition de la fonction de transfert harmonique, déterminer l'expression du signal de sortie en fonction du signal d'entrée. Quelle opération mathématique réalise un filtre passe-bas du 1er ordre sur un signal d'entrée de fréquence grande devant la fréquence de coupure ?

Q2. On alimente un filtre passe-bas de fréquence de coupure 10 Hz avec un signal créneau de fréquence 1 kHz. Qu'observe-t-on en sortie ?

**À connaître : Obtention d'un intégrateur**

Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de pente −20 dB/déc, alors il aura un comportement intégrateur sur cette gamme de fréquence.

### IV.3.c) Comportement dérivateur à basse fréquence

**Démonstration à maîtriser n°23 – Réalisation d'un dérivateur**

On rappelle l'équivalent à basse fréquence (pour $\omega \ll \omega_c$) de la fonction de transfert d'un passe-haut du 1er :
$\underline{H}_{BF} \sim \dfrac{1}{\frac{\omega_c}{j\omega}}$

Q1. En repartant de la définition de la fonction de transfert harmonique, exprimer $\underline{u_s}$ en fonction de $\underline{u_e}$. En déduire la relation réelle. Quelle opération mathématique réalise un filtre passe-haut du 1er ordre sur un signal d'entrée de fréquence petite devant la fréquence de coupure ?

Q2. On alimente un filtre passe-haut du premier ordre de fréquence de coupure 1 kHz avec un signal triangulaire de fréquence 10 Hz. Qu'observe-t-on en sortie ?

**À connaître : Obtention d'un dérivateur**

Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de pente +20 dB/déc, alors il aura un comportement dérivateur sur cette gamme de fréquence.

## IV.4 Simuler l'action d'un filtre

<u>**Capacité numérique**</u> : **Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni.**
**Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.**

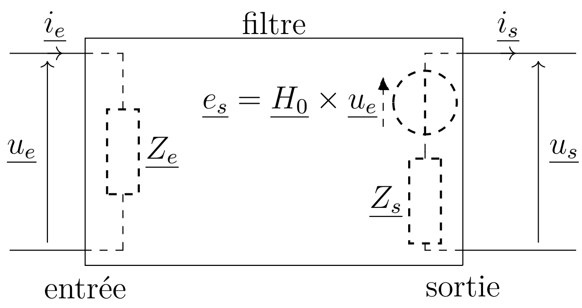
### TP

Cf TP n°9 sur le filtre de Wien.

# V Mise en cascade de filtres

## V.1 Impédances d'entrée et de sortie

L'action d'un filtre linéaire sur le reste du circuit peut être modélisée par le système ci-contre :

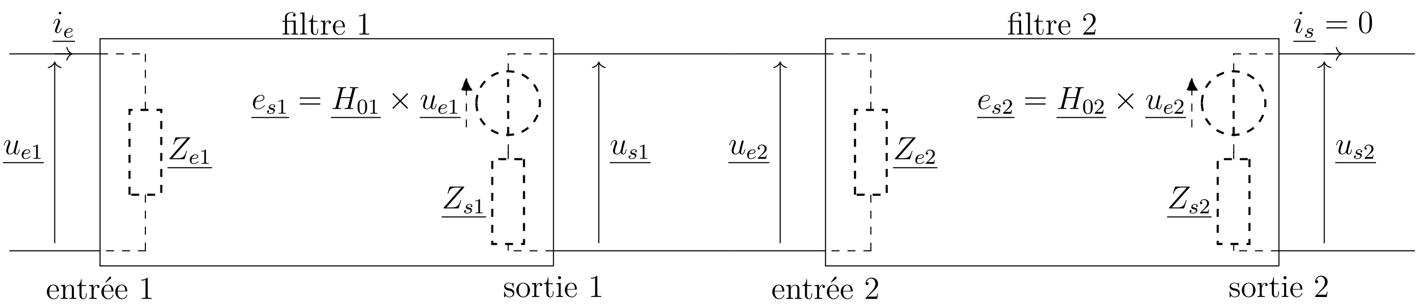



- Vu depuis l'entrée, le filtre se comporte comme une impédance $\underline{Z_e}$, appelée **impédance d'entrée du filtre**, définie par $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}}$.
- En sortie, l'action du filtre sur ce qui se situe après est modélisée par un générateur réel :
  - de fem $\underline{e_s} = \underline{H_0} \times \underline{u_e}$ ;
  - d'impédance $\underline{Z_s}$, appelée **impédance de sortie du filtre**.
- Lorsque le **filtre est à vide** (**rien n'est branché en sortie**, donc $\underline{i_s} = 0$), alors $\underline{u_s} = \underline{e_s} = \underline{H_0} \times \underline{u_e}$, avec $\underline{H_0}$ la fonction de transfert du filtre non chargé.
- Lorsque le **filtre est chargé** (quelque chose est branchée en sortie, donc $\underline{i_s} \neq 0$), $\underline{u_s} = \underline{e_s} - \underline{Z_s} \times \underline{i_s}$, donc $\underline{u_s} = \underline{H_0} \times \underline{u_e} - \underline{Z_s}\underline{i_s} \neq \underline{H_0} \times \underline{u_e}$.

> Ainsi la fonction de transfert du filtre chargé $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} \neq \underline{H_0}$ : la fonction de transfert du filtre chargé est modifiée par la charge, donc le fonctionnement fréquentiel du filtre est modifié par la charge.

## V.2 Mise en cascade de deux filtres

<u>**Capacité exigible**</u> : **Comprendre l'intérêt, pour garantir le fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.**




$\underline{H_{01}}$ et $\underline{H_{02}}$ sont les fonctions de transfert à vide des deux filtres (c'est-à-dire lorsqu'ils ne sont pas chargés). La fonction de transfert de l'ensemble des deux filtres s'écrit :

$$\begin{aligned}
\underline{H} &= \frac{\underline{u_{s2}}}{\underline{u_{e1}}} \\
&= \frac{\underline{u_{s2}}}{\underline{u_{e2}}} \times \frac{\underline{u_{e2}}}{\underline{u_{e1}}} \\
&= \underbrace{\frac{\underline{u_{s2}}}{\underline{u_{e2}}}}_{=\underline{H_{02}}} \times \underbrace{\frac{\underline{u_{s1}}}{\underline{u_{e1}}}}_{\neq \underline{H_{01}}}
\end{aligned}$$

Le filtre 2 n'est pas chargé, donc $\underline{u_{s2}} = \underline{e_{s2}} = \underline{H_{02}} \times \underline{u_{e2}}$

⚠ Le filtre 1 est chargé par la présence du filtre 2, donc $\dfrac{\underline{u_{s1}}}{\underline{u_{e1}}}$ n'est pas égal à la fonction de transfert $\underline{H_{01}}$ à vide.
Relions $\underline{u_{s1}} = \underline{u_{e2}}$ à $\underline{u_{e1}}$.
$\underline{Z_{e2}}$ et $\underline{Z_{s1}}$ sont en série, et nous reconnaissons un pont diviseur de tension, ainsi $\underline{u_{e2}} = \dfrac{\underline{Z_{e2}}}{\underline{Z_{e2}} + \underline{Z_{s1}}} \times \underbrace{\underline{e_{s1}}}_{=\underline{H_{01}} \times \underline{u_{e1}}}$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\underline{u_{e2}} &= \frac{\underline{Z_{e2}}}{\underline{Z_{e2}} + \underline{Z_{s1}}} \times \underline{H_{01}} \times \underline{u_{e1}} \\
\frac{\underline{u_{e2}}}{\underline{u_{e1}}} &= \frac{\underline{Z_{e2}}}{\underline{Z_{e2}} + \underline{Z_{s1}}} \times \underline{H_{01}} \\
\text{or} \quad \underline{H} &= \frac{\underline{u_{s2}}}{\underline{u_{e2}}} \times \frac{\underline{u_{s1}}}{\underline{u_{e1}}} \\
\underline{H} &= \frac{\underline{u_{s2}}}{\underline{u_{e2}}} \times \frac{\underline{u_{e2}}}{\underline{u_{e1}}} \\
\underline{H} &= \underline{H_{02}} \times \frac{\underline{Z_{e2}}}{\underline{Z_{e2}} + \underline{Z_{s1}}} \times \underline{H_{01}}
\end{aligned}$$

La fonction de transfert globale est égale au produit des deux fonctions de transfert à vide :

$$\underline{H} = \underline{H_{02}} \times \frac{\underline{Z_{e2}}}{\underline{Z_{e2}} + \underline{Z_{s1}}} \times \underline{H_{01}} \approx \underline{H_{02}} \times \underline{H_{01}} \Leftrightarrow \frac{\underline{Z_{e2}}}{\underline{Z_{e2}} + \underline{Z_{s1}}} \approx 1$$

Il faut pour cela que $|\underline{Z_{e2}}| \gg |\underline{Z_{s1}}|$

Il faut donc faire très attention lorsque l'on met des filtres en cascades. En effet, **la présence d'un filtre en aval peut charger le filtre en amont, et modifier sa fonction de transfert, et donc son comportement fréquentiel.**

### ♥ À retenir : Mise en cascade de filtres

La fonction de transfert d'un filtre n'est pas modifiée lors de sa mise en cascade s'il présente une impédance d'entrée très grande, voire infinie, et une impédance de sortie très faible, voire nulle :

$$Z_e(\text{filtre suivant}) \gg Z_s(\text{filtre précédent})$$

La fonction de transfert d'une mise en cascade de filtres d'**impédances d'entrée très grandes**, voire infinies, et d'**impédances de sortie très faibles**, voire nulles, est le produit des fonctions de transfert à vide de chaque filtre :

$$\underline{H} = \underline{H_1} \times \underline{H_2} \times \ldots$$