♂Thème I. Ondes et signaux (Oscillateurs)

TD n°6 Oscillateurs mécaniques et électriques libres amortis — *Corrigé* 

Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7	8
Capacités	1		0	4			'	
Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.		\$	\$			\$	\$	
Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.			\$	\$	\$	\$	\$	
Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.			\$	\$	\$	\$	\$	
Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.		\$	\$	\$	\$	\$	\$	
Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine.				\$	\$	\$		
Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.			\$				\$	\$
Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.								\$
Réaliser un bilan énergétique.				\$				\$

# Parcours possibles

ightharpoonup Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°2, n°3, n°4 (+ cahier d'entraı̂nement : 4.16, 4.17, 4.19, 6.14).

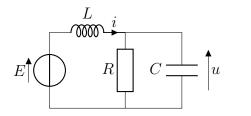
♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°1, n°3, n°5, n°6.

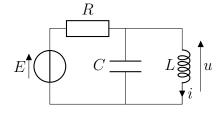
 $\rag{3}$   $\rag{3}$  Si vous êtes à l'aise : exercices n°5, n°6, n°7, n°8.

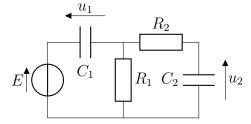
# I Exercices d'application directe du cours

# Exercice n°1 Étude de régime permanent 🎝 🎝

**Déterminer** les différentes intensités et tensions  $(u, i, u_1, u_2)$  indiquées ci-dessous lorsque le régime permanent est atteint.

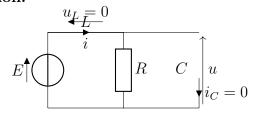


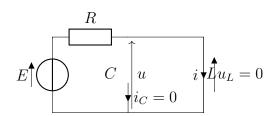




E

### Solution:

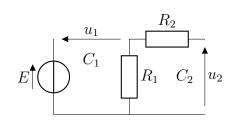




La résistance et le générateur sont en parallèle, donc u=E .

Le condensateur est court-circuité par la bobine, donc u = 0.





Les intensités sont nulles partout.

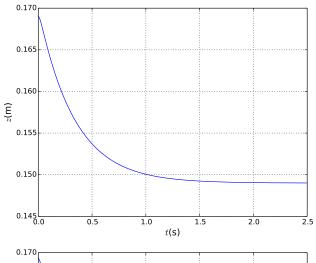
La loi des mailles dans la mailles de droite, sachant que les intensités et donc les tensions aux bornes des résistances sont nulles, donne  $u_2 = 0$ 

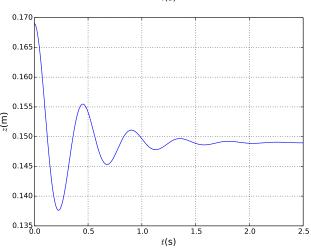
La loi des mailles à gauche donne  $u_1 = E$ 

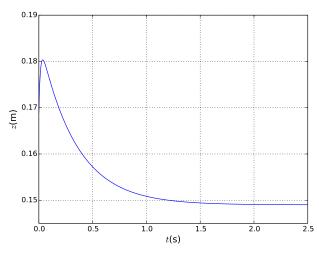
### Exercice n°2 Lectures de graphes 🎝

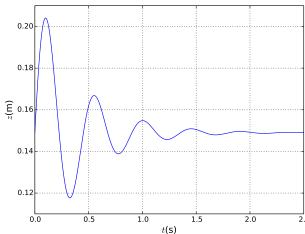
Associer à chaque graphe, le jeu de conditions initiales et le jeu de paramètre correspondant, ci-dessous.

- Les conditions initiales suivantes :
  - 1)  $z(0) = z_{\text{éq}} + 2,0 \text{ cm}; \dot{z}(0) = 0 \text{ m/s}$
  - 2)  $z(0) = z_{\text{éq}}$ ;  $\dot{z}(0) = 1 \text{ m/s}$
  - 3)  $z(0) = z_{\text{éq}} + 2,0 \text{ cm}; \dot{z}(0) = 1 \text{ m/s}$
- Les couples de paramètres suivants :
  - a)  $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ; m = 0, 1 kg;  $\alpha = 0, 5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$
  - b)  $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ; m = 0, 1 kg;  $\alpha = 7 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$









### Solution:

- Les conditions initiales suivantes :
  - $z(0) = z_{\text{\'eq}} + 2,0 \text{ cm}$ ;  $\dot{z}(0) = 0 \text{ m/s}$ : vitesse initiale nulle et position initiale supérieure à la position d'équilibre.

Graphes 1 et 3

- $z(0) = z_{\text{\'eq}}$ ;  $\dot{z}(0) = 1$  m/s : vitesse initiale strictement positive et position initiale à la position d'équilibre
  - Graphe 4

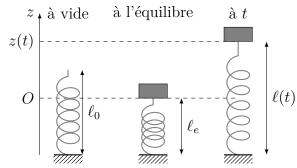


- $z(0) = z_{\text{\'eq}} + 2,0$  cm;  $\dot{z}(0) = 1$  m/s : vitesse initiale strictement position et position initiale supérieure à la position d'équilibre Graphe 2
- Les couples de paramètres suivants :
  - $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ; m = 0, 1 kg;  $\alpha = 0, 5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ :  $Q = 2, 8 > \frac{1}{2}$ Régime pseudo-périodique : graphes 3 et 4
  - $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ; m = 0, 1 kg;  $\alpha = 7 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ :  $Q = 0, 2 < \frac{1}{2}$ Régime apériodique : graphes 1 et 2

### Exercice n°3 Fourche de VTT 🎝

La fourche de VTT peut être modélisée par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide  $\ell_0$ , associé à un amortisseur dont la force de frottement est  $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$ . On note m la masse appuyant sur la fourche lorsque la vététiste appuie sur le guidon (par exemple en descente).

Données : 
$$m = 20 \text{ kg}$$
 ;  $k = 2, 5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $\alpha = 5, 0 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $\ell_0 = 1, 3 \text{ m}$  ;  $g = 9, 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;  $v_0 = 5, 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 



R1. La cycliste appuie sur le guidon, avec une masse m. Établir l'expression de la longueur  $\ell_e$  du ressort à l'équilibre en fonction de m, g, k et  $\ell_0$ . La calculer. Le ressort est-il comprimé ou étiré?

Solution: Système : masse m

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des forces:

- poids  $m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$
- force de rappel élastique :  $\overrightarrow{f_{\rm \acute{e}l}} = -k(\ell(t)-\ell_0)\overrightarrow{u_z}$
- force de frottement fluide de l'amortisseur :  $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v} = -\alpha \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \overrightarrow{u_z}$

à l'équilibre : 
$$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$
 et  $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ , soit  $-mg\overrightarrow{u_z} - k(\ell_e - \ell_0)\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{0}$ , soit  $\ell_e = \ell_0 - \frac{mg}{k} < \ell_0$ 

La vététiste se réceptionne après un dénivelé. On souhaite établir la forme du mouvement du cycliste suite à ce saut. L'origine du repère est placée à la position d'équilibre.

Les conditions initiales sont z(0) = 0 et  $\dot{z}(0) = -v_0$  (avec  $v_0 > 0$ ,  $\dot{z}(0) < 0$  car dirigé vers le sol).

R2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position verticale  $z(t) = \ell(t) - \ell_e$  et la mettre sous la forme canonique  $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$  en exprimant Q et  $\omega_0^*$ .

<sup>\*.</sup> NON : il n'y a pas de second membre dans cette équation!



Solution: D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$m \overrightarrow{d} = m \overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{\text{el}}} + \overrightarrow{f}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} \overrightarrow{u_z} = -mg \overrightarrow{u_z} - k(\ell(t) - \ell_0) \overrightarrow{u_z} - \alpha \frac{dz}{dt} \overrightarrow{u_z}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - k(\ell(t) - \ell_0) - \alpha \frac{dz}{dt}$$

$$\text{or} \quad \ell(t) = \ell_e + z(t)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - k(\ell_e + z(t) - \ell_0) - \alpha \frac{dz}{dt}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + kz(t) = -mg - k\ell_e + k\ell_0$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + kz(t) = -mg - k\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right) + k\ell_0$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + kz(t) = 0$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + kz(t) = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}z(t) = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}z(t) = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z(t) = 0$$

On identifie la pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et le facteur de qualité Q tel que  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$ , soit  $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ 

R3. Calculer Q et  $\omega_0$  (en précisant leur unité).

Quelle est la nature du mouvement de la vététiste (pseudo périodique, critique ou apériodique)? **Exprimer** puis **calculer** le temps d'amortissement caractéristique compte tenu du régime.

Solution: A.N. : 
$$Q = \frac{\sqrt{2, 5.10^3 \times 20}}{5.10^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2, 5.10^3}{20}} = \sqrt{1, 25.10^2} = \sqrt{125} = 15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

C'est un régime apériodique, donc le temps d'amortissement est de l'ordre de quelques  $\tau=\frac{Q}{\omega_0}=\frac{1}{15\sqrt{5}}=s$ 

R4. **Déterminer** la solution z(t) avec les conditions initiales. On pourra introduire la grandeur  $\gamma = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$ . Montrer qu'elle peut s'écrire  $z(t) = -\frac{v_0}{\gamma} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \operatorname{sh}(\gamma t)$ 

#### **Solution:**

Q étant inférieur à  $\frac{1}{2}$ , le régime transitoire est apériodique.

Polynôme caractéristique :  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ 

Discriminant : 
$$\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

Racines:  $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \gamma$ 



Solution générale : 
$$z(t) = Ae^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \gamma\right)t} + Be^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \gamma\right)t}$$

$$z(0) = 0 = A + B, \text{ donc } A = -B$$

$$\dot{z} = A\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \gamma\right)e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \gamma\right)t} + B\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \gamma\right)e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \gamma\right)t}$$

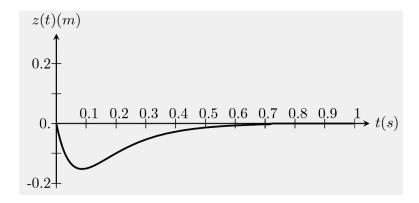
$$\dot{z}(0) = A\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \gamma\right) + B\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \gamma\right) = -v_0$$

$$-v_0 = A\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \gamma\right) - A\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \gamma\right)$$

$$-v_0 = 2A\gamma$$

$$A = -\frac{v_0}{2\gamma} = -B$$
Ainsi  $z(t) = -\frac{v_0}{2\gamma}e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \gamma\right)t} + \frac{v_0}{2\gamma}e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \gamma\right)t}$ 
Ainsi  $z(t) = \frac{v_0}{2\gamma}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(e^{-\gamma t} - e^{\gamma t})$ 
Enfin  $z(t) = -\frac{v_0}{\gamma}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\sinh(\gamma t)$ 

R5. La figure ci-dessous représente z(t). De quelle longueur s'enfonce approximativement la fourche?



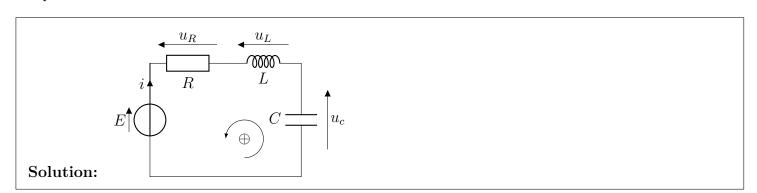
**Solution:** La fourche s'enfonce d'environ 15 cm.

### Exercice n°4 RLC série 🎝

On étudie le circuit RLC série alimenté par un générateur idéal de force électromotrice e qui délivre un échelon de tension. Pour t < 0: e(t) = 0, et pour t > 0: e(t) = E (constante). Aucun courant ne circule pour t < 0. Le condensateur a été préalablement chargé sous une tension E/2, c'est-à-dire  $u_c(t < 0) = E/2$ .

On donne  $C=100~\mathrm{nF}$  ;  $L=100~\mathrm{mH}$  ;  $R=100~\Omega$ 

R1. Représenter le circuit en plaçant le générateur en convention générateur et le condensateur en convention récepteur.



R2. **Déterminer** rigoureusement les valeurs de  $u_c(0^+)$ ,  $i(0^+)$  et  $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$ .

### Solution:

Le condensateur est initialement chargé sous E/2 avant la fermeture de l'interrupteur, donc  $u_c(0^-) = E/2$ Avant la fermeture de l'interrupteur, l'intensité du courant est nulle,  $i(0^-) = 0$ .

La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc  $u_c(0^+) = u_c(0^-)$ , d'où

$$u_c(0^+) = \frac{E}{2}$$

L'intensité du courant à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc  $i(0^+) = i(0^-)$ , d'où  $i(0^+) = 0$ 

La loi des mailles à  $t = 0^+$  donne  $E = u_c(0^+) + u_R(0^+) + u_L(0^+)$ , soit  $u_L(0^+) = E - \frac{E}{2} = \frac{E}{2}$ 

Or d'après la relation de la bobine :  $u_L = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ , donc  $\left[\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{u_L(0^+)}{L} = \frac{E}{2L}\right]$ 

R3. Déterminer  $u_c(\infty)$  et  $i(\infty)$  une fois le nouveau régime permanent atteint  $\dagger$ .

### **Solution:**

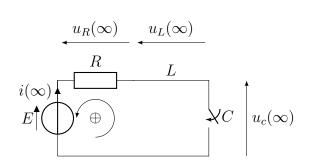
Une fois le régime permanent atteint, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

On déduit immédiatement de ces comportements :

$$i(\infty) = 0$$
 et  $u_L(\infty) = 0$ 

 $\overline{\mathrm{D'après\ la}}\ \mathrm{loi\ d'Ohm}: u_R(\infty) = 0$ 

La loi des mailles donne  $u_c(\infty) = E$ 



R4. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant i dans le circuit. Identifier les expressions de la pulsation propre et du facteur de qualité.

#### Solution:

On applique la loi des mailles :  $u_c + u_L + u_R = E$ 

Pour établir l'équation différentielle vérifiée par i, il faut tout exprimer en fonction de i:

- Intensité du courant à travers le condensateur :  $i = C \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$
- Tension aux bornes de la bobine :  $u_L = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ ,
- Tension aux bornes de  $R: u_R = Ri$

D'où : 
$$u_c + L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0.$$

Pour exprimer  $u_c$  en fonction de i, il est nécessaire de dériver par rapport au temps l'équation précédente :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0, \text{ avec } \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C}, \text{ d'où } \frac{i}{C} + L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\mathrm{soit} \left[ \frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{LC} = 0 \right]$$

Que l'on peut écrire sous forme canonique :  $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di}{dt} + \omega_0^2i = 0$ 

On identifie :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Leftrightarrow Q = \frac{L}{R}\omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ 

<sup>†.</sup> Le circuit en régime permanent devra absolument être représenté.

R5. Compte-tenu des valeurs numériques et des conditions initiales, **déterminer** complètement (**littéralement**) l'expression de i(t).

**Solution:** Facteur de qualité :  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 10 > \frac{1}{2}$ , donc le régime transitoire est pseudo-périodique.

Polynôme caractéristique :  $x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0$ 

Discriminant :  $\Delta = 4\omega_0^2 \left( \frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$ 

Racines complexes conjuguées :  $x=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}=-\frac{1}{\tau}\pm j\Omega$ 

Solutions générales :  $i(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$ 

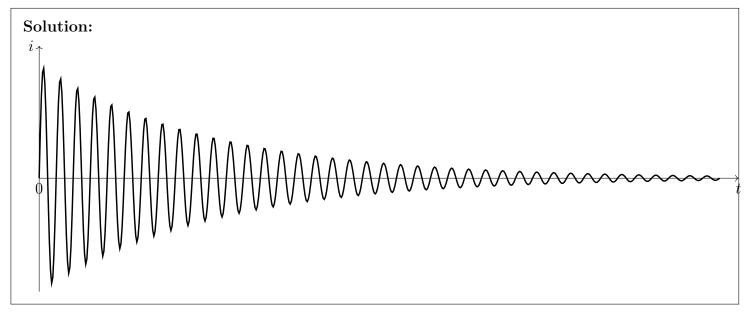
D'après les CI : i(0) = 0 = A

et  $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Be^{-\frac{t}{\tau}} \left( -\frac{1}{\tau} \sin(\Omega t) + \Omega \cos(\Omega t) \right)$ 

à t = 0:  $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) = B\Omega = \frac{E}{2L}$ , soit  $B = \frac{E}{2L\Omega}$ 

Conclusion :  $i(t) = \frac{E}{2L\Omega}e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\Omega t)$ 

R6. Représenter l'allure i en fonction du temps.



R7. Déterminer les énergies reçues par le condensateur et la bobine, l'énergie fournie par le générateur au cours du régime transitoire. Conclure et commenter.

#### Solution:

— Énergie reçue par le condensateur :

$$\mathcal{E}_{C,\text{reçue}} = \mathcal{E}_{C}(\infty) - \mathcal{E}_{C}(0)$$

$$= \frac{1}{2}CE^{2} - \frac{1}{2}C\left(\frac{E}{2}\right)^{2}$$

$$= \frac{3}{8}CE^{2}$$



— Énergie reçue par la bobine :

$$\mathcal{E}_{L,\text{reçue}} = \mathcal{E}_{L}(\infty) - \mathcal{E}_{L}(0)$$

$$= \frac{1}{2}L \times 0^{2} - \frac{1}{2}L(0)^{2}$$

$$= 0$$

— Énergie fournie par le générateur :

$$\mathcal{E}_f = \int_0^\infty \mathcal{P}_f dt$$

$$= \int_0^\infty E \times i dt$$

$$= \int_0^\infty E \times C \frac{du_c}{dt}$$

$$= EC(u_c(\infty) - u_c(0))$$

$$= EC\left(E - \frac{E}{2}\right)$$

$$= \frac{E^2C}{2}$$

— Par conservation de l'énergie, la puissance fournie par le générateur est reçue pour 3/4 par le condensateur, la résistance en reçoit l'autre quart, soit  $\mathscr{E}_J = \frac{CE^2}{8}$ , et la dissipe par effet Joule.

# II Exercices d'approfondissement

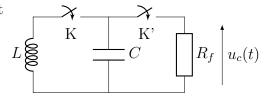
# Exercice n°5 Encore un RLC! J J J

On considère un circuit constitué d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur réel de capacité C et de résistance de fuite  $R_f$ .

Pour t < 0, la tension aux bornes du condensateur vaut  $U_0$ .

À t = 0, on ferme les interrupteurs.

Donnée :  $C=5,0~\mathrm{nF}$ 



R1. ightharpoonup 
ightharpoonup

#### **Solution:**

Loi des mailles :  $u_c + u_L = 0$  (1)

Loi des nœuds :  $i = i_C + i_R$  (2)

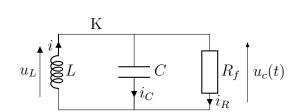
Loi d'Ohm :  $u_c = Ri_R$  (3)

Condensateur :  $i_C = C \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$  (4)

Bobine:  $u_L = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -u_c$  (5)

(2) dans (5): 
$$-u_c = L \frac{di_C}{dt} + L \frac{di_R}{dt}$$
 (5')

(3) et (4) dans (5'): 
$$-u_c = LC \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{L}{R} \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$



- ‡. Indications :
- Introduire 3 intensités (rien d'autre n'est utile).
- Écrire les 4 équations indépendantes.
- Mélanger les 4 équations pour obtenir une équation différentielle avec uniquement  $u_c$ , où  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  et  $Q = R_f \sqrt{\frac{C}{L}}$ .

Ainsi 
$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{LC} = 0$$

Ainsi  $\left[ \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC} \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{LC} = 0 \right]$ On identifie  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , avec  $\omega_0$  la pulsation propre

et 
$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$$
, soit  $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ , le facteur de qualité.

R2. ightharpoonup Déterminer les expressions de  $u_c(0^+)$  et  $\frac{du_c}{dt}(0^+)$  en fonction de  $U_0, R_f, C$ .

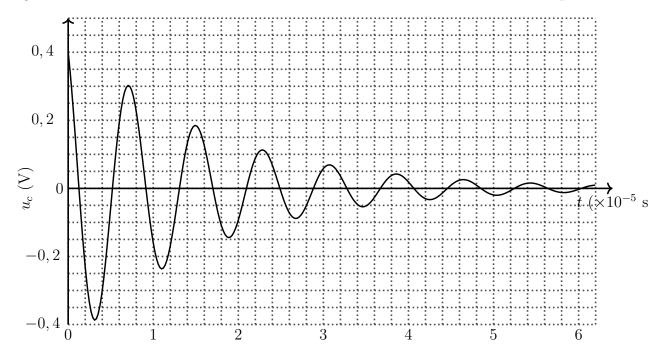
**Solution:**  $u_c(0^-) = U_0$ , or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc  $u_c(0^+) = u_c(0^-) = U_0$ 

Pour t < 0, l'interrupteur est ouvert, donc  $i(0^-) = 0$ . Or l'intensité du courant à travers une bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc  $|i(0^+)| = i(0^-) = 0$ 

Loi des nœuds à  $t = 0^+ : i(0^+) = i_R(0+) + i_C(0^+)$ 

On en déduit : 
$$0 = \frac{u_c(0^+)}{R_f} + C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+), \, \mathrm{donc} \left[ \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{U_0}{R_fC} \right]$$

On a enregistré l'évolution de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps.



R3. ightharpoonup Établir complètement la solution  $u_c(t)$  de l'équation différentielle précédente.

**Solution:** D'après l'évolution de  $u_c(t)$ , c'est un régime pseudo-périodique, donc Q >

L'équation différentielle précédente n'ayant pas de 2<sup>e</sup> membre, on n'aura pas de solution particulière à

Équation caractéristique :  $x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0$ 

- §. Indications:
- Déterminer les deux grandeurs « évidentes » en notant qu'aucun courant ne circule pour t < 0.
- Exploiter la loi des nœuds et les lois des dipôles pour conclure :  $\frac{du_c}{dt}(0^+) = -\frac{U_0}{R_fC}$

Discriminant :  $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$ 

 $Q > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta < 0$ , EC possède deux racines complexes conjuguées :

$$x_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}j\sqrt{-\Delta} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

La solution générale s'écrit :  $u_c(t) = \exp(\Re(r)t) \left(A\cos(\Im(r)t) + B\sin(\Im(r)t)\right)$ , avec  $\Re(r) = -\frac{\omega_0}{2O}$  et

$$\Im(r) = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Soit 
$$:u_c(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \left(A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}t}\right) + B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}t}\right)\right)$$

 $\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$  est homogène à une pulsation.

On pose 
$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$
, la **pseudo-pulsation**.

 $\frac{\omega_0}{2Q}$  est homogène à l'inverse d'un temps, on introduit le temps caractéristique  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ 

On réécrit 
$$u_c$$
:  $u_c(t) = e^{-t/\tau} (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$ 

Déterminons les deux constantes d'intégration à l'aide des deux conditions initiales

$$u_c(0^+) = U_0 = A$$

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega = -\frac{U_0}{RC}, \text{ donc } B = \frac{U_0}{\tau\Omega} - \frac{U_0}{\Omega RC}$$

Soit 
$$u_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \cos(\Omega t) + \left( \frac{1}{\Omega \tau} - \frac{1}{\Omega RC} \right) \sin(\Omega t) \right)$$

On peut simplifier:

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{2Q} - \frac{1}{RC}$$
$$= \frac{1}{2RC} - \frac{1}{RC}$$
$$= -\frac{1}{2RC}$$

$$u_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \cos(\Omega t) - \frac{1}{2\Omega RC} \sin(\Omega t) \right)$$



**Solution:** 

$$\begin{split} \delta &= \ln \left( \frac{u_c(t)}{u_c(t+T)} \right) \\ &= \ln \frac{U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \cos(\Omega t) - \frac{1}{2\Omega RC} \sin(\Omega t) \right)}{U_0 e^{-\frac{t+T}{\tau}} \left( \cos(\Omega (t+T)) - \frac{1}{2\Omega RC} \sin(\Omega (t+T)) \right)} \\ &= \ln \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \cos(\Omega t) - \frac{1}{2\Omega RC} \sin(\Omega t) \right)}{e^{-\frac{t+T}{\tau}} \left( \cos(\Omega t) - \frac{1}{2\Omega RC} \sin(\Omega t) \right)} \\ &= \ln e^{\frac{T}{\tau}} \\ &= \frac{T}{\tau} \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \times \frac{\omega_0}{2Q} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \end{split}$$

R5. Déterminer graphiquement la valeur du décrément logarithmique  $\delta$ .

#### Solution:

On lit  $u_c(t) = 0, 3 \text{ V}$ ;  $u_c(t+T) = 0, 18 \text{ V}$ , donc  $\delta = \ln\left(\frac{0, 3}{0, 18}\right) = 0, 51$ 

#### Solution:

Charge initiale du condensateur :  $U_0 = u_c(0) = 0.4 \text{ V}$ 

$$\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}$$

On peut déterminer Q à l'aide de  $\delta$  :  $Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}} = 6, 2$ 

$$R_f = -\frac{u_c(0)}{i(0)} = 1,6.10^3 \,\Omega$$

On peut maintenant déterminer  $\omega_0: \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$ , donc  $\omega_0 = \frac{Q}{RC}$ 

A.N. 
$$\underline{\omega_0 = 8.10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

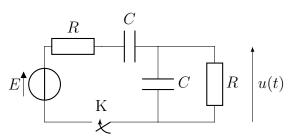
On peut finir par déterminer  $L: \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , donc  $L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = 3, 1.10^{-4} \text{ H}$ 

### Exercice n°6 Pont de Wien 🎝 🎝

On considère le circuit représenté ci-contre, appelé pont de Wien.

Pour t < 0, l'interrupteur K est ouvert et les deux condensateurs, de même capacité C, sont déchargés.

On ferme l'interrupteur K à t=0. Les deux résistances sont identiques.



R1. Établir  $\P$  l'équation différentielle vérifiée par la tension u et montrer qu'elle s'écrit sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + 3\omega_0 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

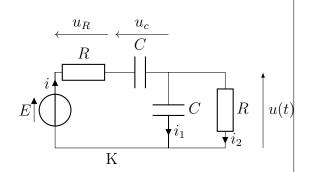
### Solution:

Loi des mailles :  $u + u_c + u_R = E$  (1)

Loi des nœuds :  $i = i_1 + i_2$  (2)

Lois d'Ohm :  $u = Ri_2$  (3) et  $u_R = Ri$  (4)

Condensateurs:  $i_1 = C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$  (5) et  $i = C \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$  (6)



(3) et (5) dans (2) : 
$$i = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$$
 (2')

(1): 
$$u_c = E - u_R - u = E - Ri - u$$
, avec (2'):  $u_c = E - R\left(C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R}\right) - u = E - RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 2u$  (1')

On injecte (1') dans (6): 
$$i = -RC^2 \frac{d^2 u}{dt^2} - 2C \frac{du}{dt}$$
 (6')

On égalise (2') et (6') : 
$$C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R} = -RC^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - 2C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Soit 
$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{(RC)^2} = 0$$
, avec  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ 

R2. **Déterminer** les conditions initiales 
$$u(t = 0^+)$$
 et  $\frac{du}{dt}(t = 0^+)$ .

#### **Solution:**

Les condensateurs sont initialement chargés, donc  $u(0^-) = u_c(0^-) = 0$ 

Or la tension aux bornes des condensateurs ne peuvent pas subir de discontinuité, donc  $u(0^+) = u(0^-) = 0$  et  $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$ 

Loi des nœuds à  $t = 0^+ : i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$ , avec  $i_2(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = 0$ , donc  $i(0^+) = i_1(0^+)$ 

#### $\P$ . Indications:

- Introduire 3 intensités et deux tensions.
- Écrire les 6 équations indépendantes.
- Mélanger les 6 équations pour obtenir une équation différentielle avec uniquement u, pour obtenir :  $\omega_0 = 1/(RC)$ .
- | Indications :
- Déterminer les tensions aux bornes des condensateurs.
- Exploiter la loi d'Ohm et la loi des nœuds.
- Exploiter la loi des mailles et la loi du condensateur pour conclure :  $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}$



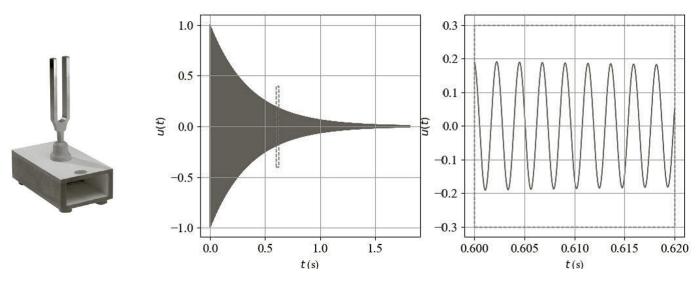
Loi des mailles à 
$$t = 0^+$$
:  $u_R(0^+) + \underbrace{u_c(0^+)}_{=0} + \underbrace{u(0^+)}_{=0} = E$ , soit  $Ri(0^+) = E$   
Ainsi  $i_1(0^+) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{R}$ , soit  $\underbrace{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)}_{=0} = \frac{E}{RC}$ 

R3. Résoudre complètement l'équation différentielle précédente pour déterminer l'expression de u(t). Représenter graphiquement son allure.

# Solution: Équation caractéristique : $x^2 + 3\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$ Discriminant : $\Delta = 5\omega_0^2 > 0$ , le régime est donc apériodique Racines : $x = \frac{-3\omega_0 \pm \sqrt{5}\omega_0}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\omega_0$ Ainsi : $u(t) = Ae^{\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t} + Be^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t}$ $u(0^+) = 0 = A + B$ $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Ae^{\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t} \left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right) + Be^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t} \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)$ À $t = 0^+$ : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{RC} = A\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right) + B\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)$ , avec B = -AAinsi $E\omega_0 = 2A\frac{-\sqrt{5}}{2}\omega_0$ , soit $A = -\frac{E}{\sqrt{5}}$ Ainsi $u(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}\left(-e^{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t} + e^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t}\right) = \frac{E}{\sqrt{5}}e^{-\frac{3}{2}\omega_0 t} \times 2\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\omega_0 t\right)$

### Exercice n°7 Diapason 🎝 🎝 🔊

Un diapason peut être modélisé par un système masse-ressort amorti. L'amortissement provient principalement de la transmission des oscillations des tiges métalliques en vibration sonore.



- R1. Rappeler l'équation différentielle canonique d'un oscillateur amorti en faisant apparaître la pulsation propre  $\omega_0$  et le coefficient de qualité Q.
- R2. À partir de l'enregistrement sonore représenté ci-dessus, **estimer** le facteur d'amortissement Q, la pseudo-pulsation, la pulsation propre.

# Exercice n°8 Interprétation énergétique du facteur de qualité 🎝 🎝 🧳

Un corps (S), de masse m=50 g, est suspendu à un point fixe O par l'intermédiaire d'un ressort vertical de raideur k=20 N · m<sup>-1</sup> et de longueur à vide  $\ell_0=20$  cm. Lorsqu'il est animé d'une vitesse  $\overrightarrow{v}$ , (S) est soumis

de la part de l'air à une force de frottement fluide  $\overrightarrow{F} = -h \overrightarrow{v}$ . La position de (S) est repérée par la coordonnée z(t) de son centre d'inertie M sur un axe vertical descendant Oz. On note  $z_{eq}$  la cote de M à l'équilibre.

On lâche (S) à t=0 avec une vitesse nulle dans la position  $z_0=z_{eq}+a>z_{eq}$ . Le référentiel  $\mathscr{R}$  lié au sol est supposé galiléen.

En introduisant la variable  $Z(t) = z(t) - z_{eq}$ , on peut montrer que Z vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$
 avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{\sqrt{mk}}{h}$ 

On donne l'expression de Z dans le cadre du régime pseudo-périodique :

$$Z(t) = ae^{-\frac{t}{\tau}} \left( \cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega \tau} \sin(\Omega t) \right) \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

On s'intéresse aux aspects énergétiques de ce mouvement. On se place dans l'hypothèse  $Q \gg 1$ .

R1. Déterminer une expression approchée \*\* de Z compte tenu de  $Q\gg 1$ .

Solution: Pour 
$$Q \gg 1$$
,  $\Omega \approx \omega_0$ , et  $\frac{1}{\Omega \tau} \approx \frac{\omega_0}{\omega_0 \times 2Q} \ll 1$   
On peut simplifier  $Z(t) = ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t)$ 

R2. Montrer que l'expression approchée † de l'énergie mécanique de (S) s'écrit  $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}ka^2e^{-\frac{2t}{\tau}}$ 

Solution: Vitesse:

$$\dot{z} = ae^{-\frac{t}{\tau}} \left( -\frac{1}{\tau} \cos(\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\omega_0 t) \right)$$

$$= -ae^{-\frac{t}{\tau}} \left( \frac{\omega_0}{2Q} \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t) \right)$$

$$\approx -a\omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t)$$

Énergie mécanique, avec C la constante provenant des énergies potentielles définies à une constante additive près.

$$\mathcal{E}_{m} = \mathcal{E}_{c} + \mathcal{E}_{pp} + \mathcal{E}_{p,\acute{e}l}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{z}^{2} - mgZ + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_{0})^{2}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{z}^{2} - mgZ + \frac{1}{2}k(Z + z_{\acute{e}q} - \ell_{0})^{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}ma^{2}\omega_{0}^{2}e^{-\frac{2t}{\tau}}\sin^{2}(\omega_{0}t) - mgae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_{0}t) + \frac{1}{2}k\left(ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_{0}t) + \frac{mg}{k}\right)^{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}ma^{2}\omega_{0}^{2}e^{-\frac{2t}{\tau}}\sin^{2}(\omega_{0}t) - mgae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_{0}t) + \frac{1}{2}k\left(a^{2}e^{-\frac{2t}{\tau}}\cos^{2}(\omega_{0}t) + \frac{(mg)^{2}}{k^{2}} + 2a\frac{mg}{k}e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_{0}t)\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}a^{2}ke^{-\frac{2t}{\tau}}(\sin^{2}(\omega_{0}t) + \cos^{2}(\omega_{0}t)) + ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_{0}t)(-mg + mg) + \frac{(mg)^{2}}{2k} + C$$

$$= \frac{1}{2}ka^{2}e^{-\frac{2t}{\tau}} + \frac{(mg)^{2}}{2k} + C$$

Pour simplifier la suite, choisissons C pour que la constante additive soit nulle :  $\frac{(mg)^2}{2k} + C = 0$ 

<sup>\*\*.</sup> Z devra s'écrire sous la forme  $Ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\Omega t + \varphi)$  où A et  $\varphi$  sont à déterminer en fonction de a

<sup>††.</sup> Indication : Les énergies potentielles sont définies à une constante additive près. La constante C totale sera choisie de sorte qu'à l'équilibre, l'énergie potentielle totale est nulle, ce qui impose  $C = -\frac{(mg)^2}{2L}$ .

R3. Quel est le signe de la dérivée temporelle de  $\mathscr{E}_m(t)$ ? Commenter le résultat.

Solution: 
$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} < 0$$

R4. Établir une expression approchée de la variation relative  $\frac{\Delta \mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_m} = \frac{\mathcal{E}_m(t+T) - \mathcal{E}_m(t)}{\mathcal{E}_m(t)}$  de l'énergie mécanique pendant une période. En déduire une interprétation énergétique du facteur de qualité Q. On donne :  $e^{-x} \sim 1 - x$  pour  $x \ll 1$ .

Solution:

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_m} = \frac{\mathcal{E}_m(t+T) - \mathcal{E}_m(t)}{\mathcal{E}_m(t)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}ka^2e^{-\frac{2(t+T)}{\tau}} - \frac{1}{2}ka^2e^{-\frac{2t}{\tau}}}{\frac{1}{2}ka^2e^{-\frac{2t}{\tau}}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{2t}{\tau}}(e^{-\frac{2T}{\tau}} - 1)}{e^{-\frac{2t}{\tau}}}$$

$$= e^{-\frac{2T}{\tau}} - 1$$

$$\approx 1 - \frac{2T}{\tau} - 1$$

$$\approx -\frac{2T}{\tau}$$

$$\approx -2 \times \frac{2\pi}{\Omega} \times \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\approx -\frac{2\pi}{Q}$$

Le facteur de qualité est donc inversement proportionnel à la variation relative d'énergie mécanique au cours d'une période :  $Q=-2\pi\frac{\mathscr{E}_m}{\Delta\mathscr{E}_m}$ 

Si Q est élevé, l'oscillateur revient à sa position d'équilibre avec un grand nombre d'oscillations, car il perd peu d'énergie à chaque oscillation.

R5. Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire en lien avec le facteur de qualité et la période propre ?

**Solution:**