Thème I. Ondes et signaux (Oscillateurs)

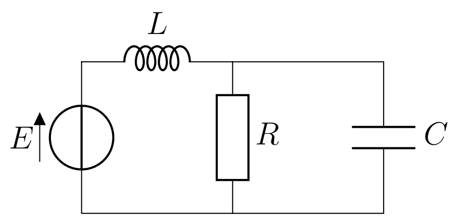
TD n°6 Oscillateurs libres amortis – *Corrigé*

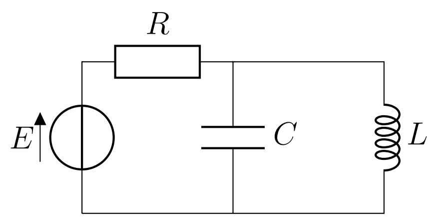
Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7
Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.		✓	✓		✓	✓	
Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.			✓	✓	✓	✓	
Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.			✓	✓	✓	✓	
Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.		✓	✓	✓	✓	✓	
Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine.				✓	✓		
Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.			✓			✓	✓
Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.							✓
Réaliser un bilan énergétique.							✓

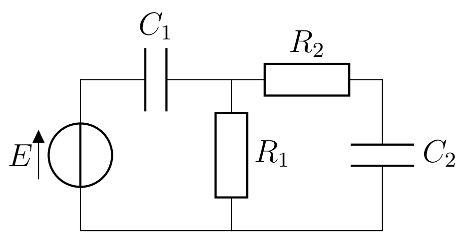
I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Recherche de régime permanent

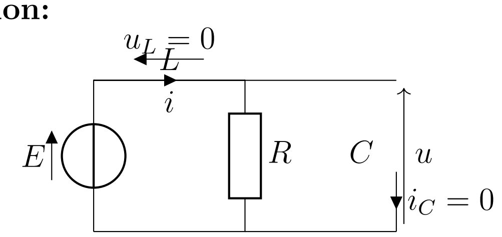
Déterminer la tension aux bornes de chaque condensateur ou le courant circulant dans chaque bobine lorsque le régime permanent est atteint.





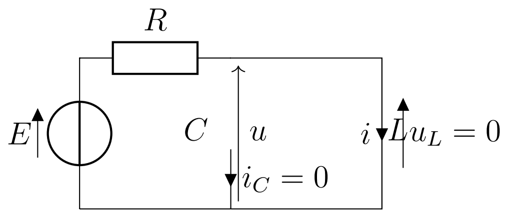


Solution:



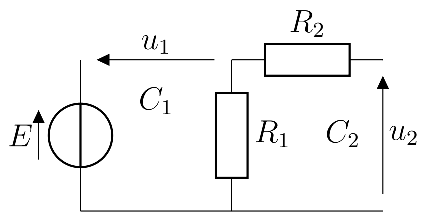
La résistance et le générateur sont en parallèle, donc $\boxed{u = E}$.

$$\boxed{i = \frac{E}{R}}$$



Le condensateur est court-circuité par la bobine, donc $\boxed{u = 0}$.

La loi des mailles et d'Ohm donnent $\boxed{i = \dfrac{E}{R}}$

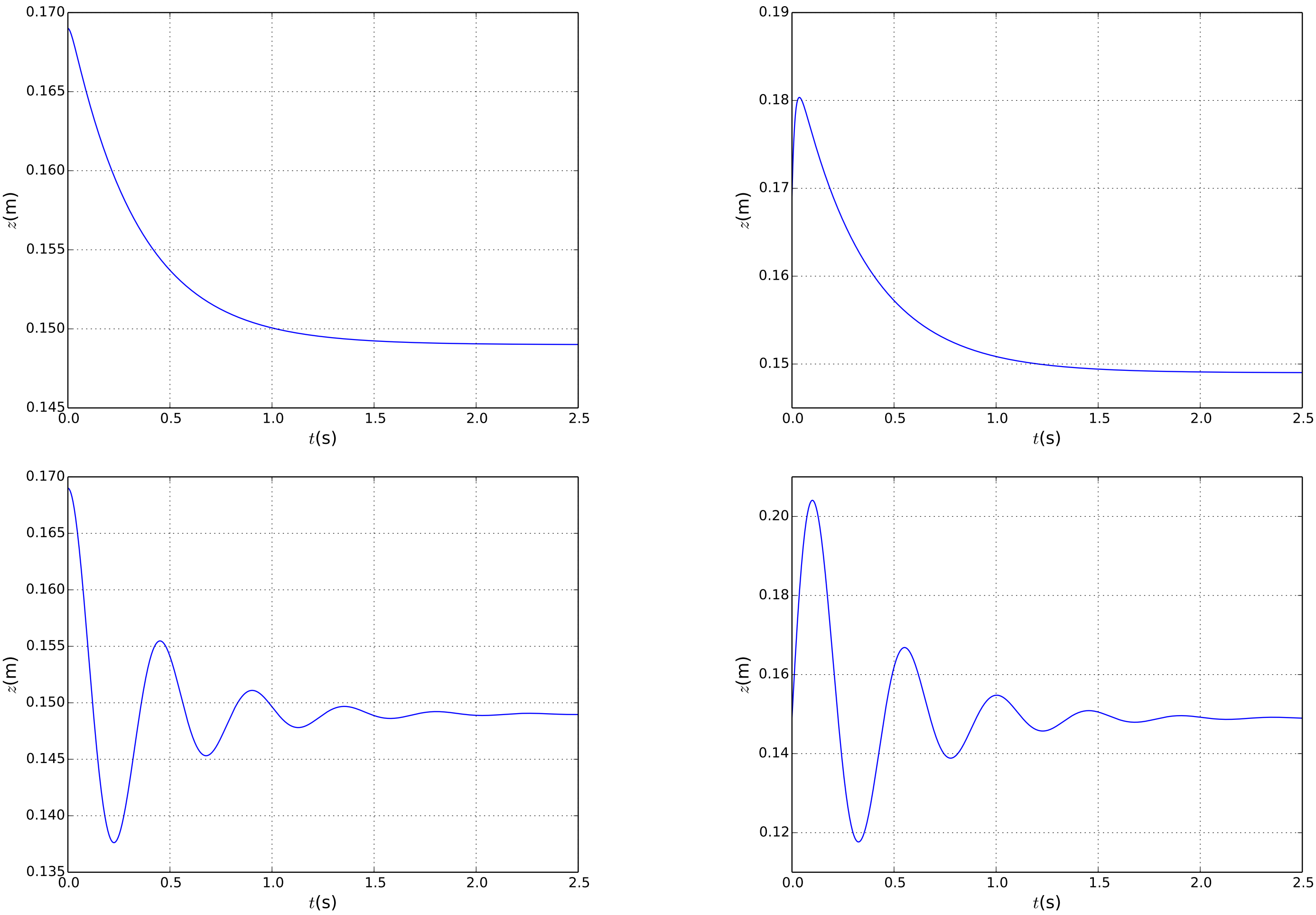


Les intensités sont nulles partout.
La loi des mailles dans la mailles de droite, sachant que les intensités et donc les tensions aux bornes des résistances sont nulles, donne $\boxed{u_2 = 0}$
La loi des mailles à gauche donne $\boxed{u_1 = E}$

Exercice n°2 Lectures de graphes

Associer à chaque graphe, le jeu de conditions initiales et le jeu de paramètre correspondant, ci-dessous.

- Les conditions initiales suivantes :
  - $z(0) = z_{éq} + 2,0$ cm ; $\dot{z}(0) = 0$ m/s
  - $z(0) = z_{éq}$; $\dot{z}(0) = 1$ m/s
  - $z(0) = z_{éq} + 2,0$ cm ; $\dot{z}(0) = 1$ m/s
- Les couples de paramètres suivants :
  - $k = 20\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$; $m = 0,1$ kg ; $\alpha = 0,5\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$
  - $k = 20\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$; $m = 0,1$ kg ; $\alpha = 7\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$



Solution:

- Les conditions initiales suivantes :
  - $z(0) = z_{éq} + 2,0$ cm ; $\dot{z}(0) = 0$ m/s : vitesse initiale nulle et position initiale supérieure à la position d'équilibre.

    Graphes 1 et 3
  - $z(0) = z_{éq}$; $\dot{z}(0) = 1$ m/s : vitesse initiale strictement positive et position initiale à la position d'équilibre

    Graphe 4
  - $z(0) = z_{éq} + 2,0$ cm ; $\dot{z}(0) = 1$ m/s : vitesse initiale strictement position et position initiale supérieure à la position d'équilibre

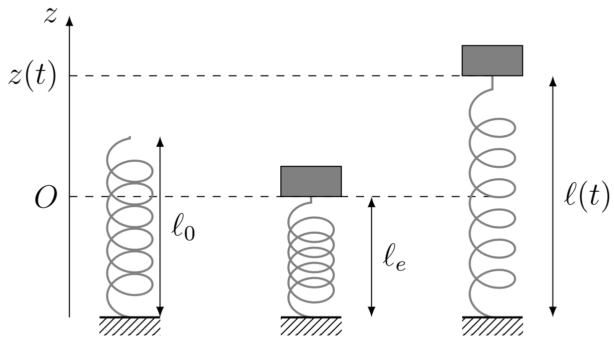
    Graphe 2
- Les couples de paramètres suivants :
  - $k = 20\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$; $m = 0,1$ kg ; $\alpha = 0,5\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$: $Q = 2,8 > \dfrac{1}{2}$

    Régime pseudo-périodique : graphes 3 et 4

— $k = 20\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$; $m = 0,1\ \mathrm{kg}$; $\alpha = 7\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}$: $Q = 0,2 < \dfrac{1}{2}$
Régime apériodique : graphes 1 et 2

Exercice n°3 Fourche de VTT

La fourche de VTT peut être modélisée par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, associé à un amortisseur dont la force de frottement est $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$. On note m la masse appuyant sur la fourche lorsque le vététiste appuie sur le guidon (par exemple en descente).
Données : $m = 20$ kg ; $k = 2,5 \cdot 10^3\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$; $\alpha = 5,0 \cdot 10^2\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{m}^{-1}$; $\ell_0 = 1,3$ m ; $g = 9,8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$; $v_0 = 5,0\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$



R1. Le cycliste appuie sur le guidon, avec une masse m. Exprimer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre en fonction de m, g, k et ℓ_0. La calculer. Le ressort est-il comprimé ou étiré ?

Solution:

Le vététiste se réceptionne après un dénivelé. On souhaite établir la forme du mouvement du cycliste suite à ce saut. Les conditions initiales sont $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = -v_0$ (avec $v_0 > 0$, $\dot{z}(0) < 0$ car dirigé vers le sol).

R2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position verticale $z(t) = \ell - \ell_{eq}$ et la mettre sous la forme canonique $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ en exprimant Q et ω_0.

Solution:

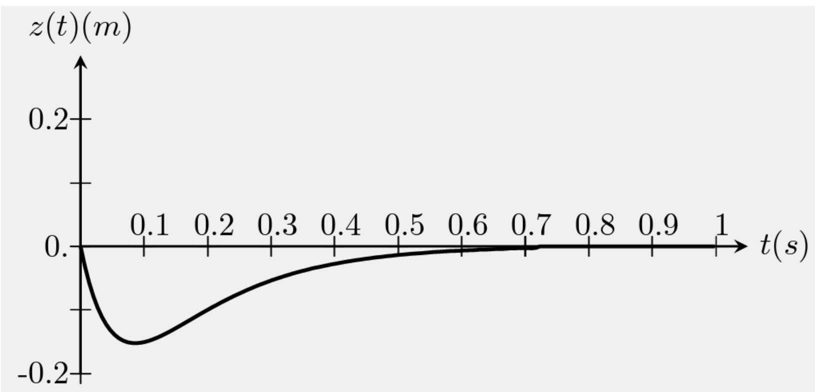
R3. Calculer Q et ω_0 (en précisant leur unité). Quelle est la nature du mouvement du vététiste (pseudo périodique, critique ou apériodique) ?
Calculer le temps d'amortissement caractéristique compte tenu du régime.

Solution:

R4. Déterminer la solution $z(t)$ avec les conditions initiales. On pourra introduire la grandeur $\gamma = \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$.

Solution:

R5. La figure ci-dessous représente $z(t)$. De quelle longueur s'enfonce approximativement la fourche ?

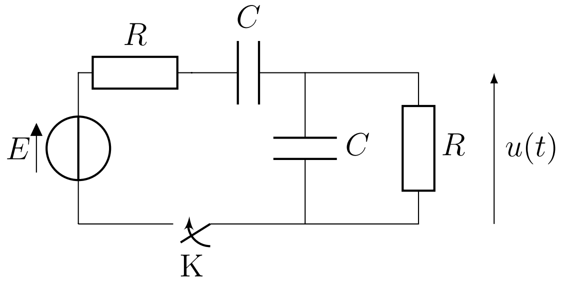


Solution:

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Pont de Wien

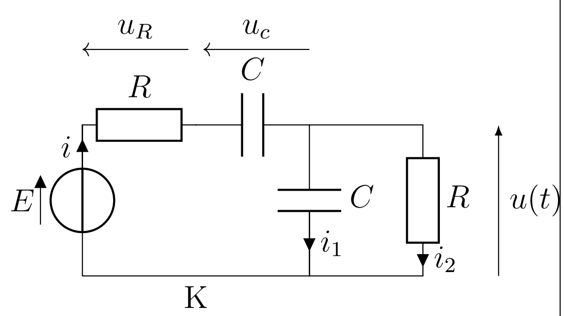
On considère le circuit représenté ci-contre, appelé pont de Wien.
Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert et les deux condensateurs, de même capacité C, sont déchargés.
On ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Les deux résistances sont identiques.



R1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u et montrer qu'elle s'écrit sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 3\omega_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

Solution:



Loi des mailles : $u + u_c + u_R = E$ (1)
Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$ (2)
Lois d'Ohm : $u = Ri_2$ (3) et $u_R = Ri$ (4)
Condensateurs : $i_1 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (5) et $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ (6)

(3) et (5) dans (2) : $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R}$ (2')

(1) : $u_c = E - u_R - u = E - Ri - u$, avec (2') : $u_c = E - R\left(C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R}\right) - u = E - RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 2u$ (1')

On injecte (1') dans (6) : $i = -RC^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - 2C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (6')

On égalise (2') et (6') : $C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R} = -RC^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - 2C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

Soit $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{(RC)^2} = 0}$, avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}$

R2. Déterminer les conditions initiales $u(t = 0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+)$.

Solution:
Les condensateurs sont initialement chargés, donc $u(0^-) = u_c(0^-) = 0$
Or la tension aux bornes des condensateurs ne peuvent pas subir de discontinuité, donc $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$ et $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$

Loi des nœuds à $t = 0^+$: $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$, avec $i_2(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = 0$, donc $i(0^+) = i_1(0^+)$

Loi des mailles à $t = 0^+$: $u_R(0^+) + \underbrace{u_c(0+)}_{=0} + \underbrace{u(0^+)}_{=0} = E$, soit $Ri(0^+) = E$

Ainsi $i_1(0^+) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{R}$, soit $\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{RC}}$

R3. En déduire l'expression de $u(t)$. Représenter graphiquement son allure.

Solution:
Équation caractéristique : $x^2 + 3\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$
Discriminant : $\Delta = 5\omega_0^2 > 0$, le régime est donc $\boxed{\text{apériodique}}$

Racines : $x = \dfrac{-3\omega_0 \pm \sqrt{5}\omega_0}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\omega_0$

Ainsi : $u(t) = Ae^{\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t} + Be^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t}$

$u(0^+) = 0 = A + B$

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Ae^{\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t}\left(-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right) + Be^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t}\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)$

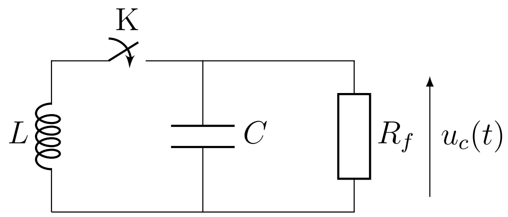
À $t = 0^+$: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E}{RC} = A\left(-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right) + B\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)$, avec $B = -A$

Ainsi $E\omega_0 = 2A\dfrac{-\sqrt{5}}{2}\omega_0$, soit $A = -\dfrac{E}{\sqrt{5}}$

Ainsi $\boxed{u(t) = \dfrac{E}{\sqrt{5}}\left(-e^{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t} + e^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t}\right) = \dfrac{E}{\sqrt{5}}e^{-\frac{3}{2}\omega_0 t} \times 2\mathrm{sh}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\omega_0 t\right)}$

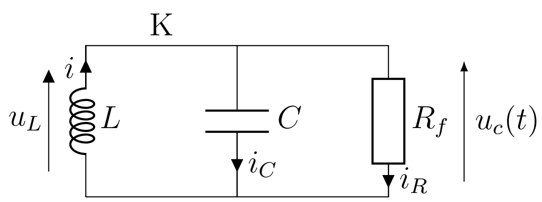
Exercice n°5 Encore un RLC !

On considère un circuit constitué d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur réel de capacité C et de résistance de fuite R_f.
Pour $t < 0$, la tension aux bornes du condensateur vaut U_0. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.
Données : $C = 5,0$ nF



R1. Établir l'équation différentielle dont u_c est solution et déterminer les expressions de la pulsation propre et du facteur de qualité en fonction de R_f, L et C.

Solution:
Loi des mailles : $u_c + u_L = 0$ (1)
Loi des nœuds : $i = i_C + i_R$ (2)
Loi d'Ohm : $u_c = Ri_R$ (3)



Condensateur : $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ (4)

Bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -u_c$ (5)

(2) dans (5) : $-u_c = L\dfrac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t} + L\dfrac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}$ (5')

(3) et (4) dans (5') : $-u_c = LC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$

Ainsi $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{LC} = 0}$

On identifie $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, avec ω_0 la pulsation propre

et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{RC}$, soit $\boxed{Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$, le facteur de qualité.

R2. Déterminer les expressions de $u_c(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+)$ en fonction de U_0, R_f, C.

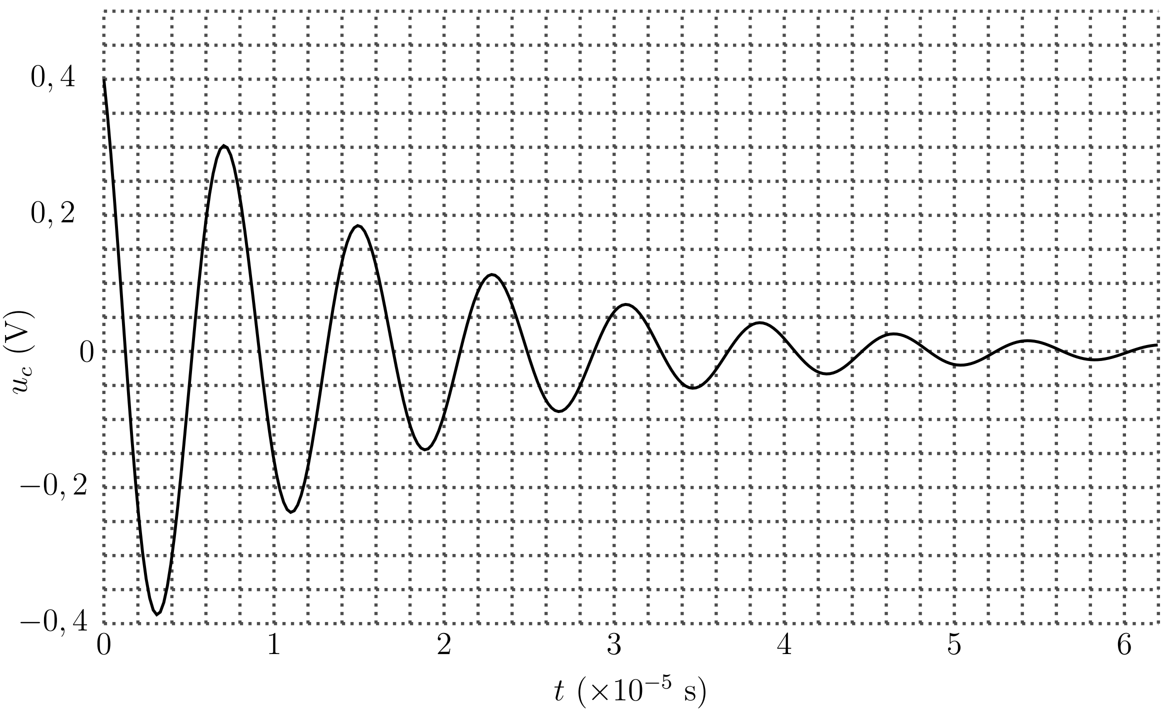
Solution: $u_c(0^-) = U_0$, or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $\boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-) = U_0}$

Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, donc $i(0^-) = 0$. Or l'intensité du courant à travers une bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$

Loi des nœuds à $t = 0^+$: $i(0^+) = i_R(0+) + i_C(0^+)$

On en déduit : $0 = \dfrac{u_c(0^+)}{R_f} + C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+)$, donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\dfrac{U_0}{R_fC}}$

On a enregistré l'évolution de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps.



R3. Établir complètement la solution $u_c(t)$ de l'équation différentielle précédente.

Solution: D'après l'évolution de $u_c(t)$, c'est un $\boxed{\text{régime pseudo-périodique}}$, donc $\boxed{Q > \dfrac{1}{2}}$

L'équation différentielle précédente n'ayant pas de 2$^{\text{e}}$ membre, on n'aura pas de solution particulière à rechercher.

Équation caractéristique : $x^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$

$Q > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta < 0$, EC possède deux racines complexes conjuguées :

$x_{1,2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \dfrac{1}{2}j\sqrt{-\Delta} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

La solution générale s'écrit : $u_c(t) = \exp\left(\Re(r)t\right)\Big(A\cos(\Im(r)t) + B\sin(\Im(r)t)\Big)$, avec $\Re(r) = -\dfrac{\omega_0}{2Q}$ et $\Im(r) = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

Soit :$u_c(t) = \exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(A\cos\left(\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}t\right) + B\sin\left(\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}t\right)\right)$

$\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$ est homogène à une pulsation.

On pose $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$, la **pseudo-pulsation**.

$\frac{\omega_0}{2Q}$ est homogène à l'inverse d'un temps, on introduit le temps caractéristique $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$

On réécrit u_c : $\boxed{u_c(t) = e^{-t/\tau}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big)}$

Déterminons les deux constantes d'intégration à l'aide des deux conditions initiales

$u_c(0^+) = U_0 = A$

$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega = -\frac{U_0}{RC}$, donc $B = \frac{U_0}{\tau\Omega} - \frac{U_0}{\Omega RC}$

Soit $\boxed{u_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos(\Omega t) + \left(\frac{1}{\Omega\tau} - \frac{1}{\Omega RC}\right)\sin(\Omega t)\right)}$

On peut simplifier :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC} &= \frac{\omega_0}{2Q} - \frac{1}{RC} \\
&= \frac{1}{2RC} - \frac{1}{RC} \\
&= -\frac{1}{2RC}
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos(\Omega t) - \frac{1}{2\Omega RC}\sin(\Omega t)\right)}$$

R4. Établir l'expression du décrément logarithmique, noté δ, défini par $\delta = \ln\left(\frac{u_c(t)}{u_c(t+T)}\right)$, où T est la pseudo-période, en fonction de ω_0, T et Q, puis en fonction de Q uniquement.

Solution:

$$\begin{aligned}
\delta &= \ln\left(\frac{u_c(t)}{u_c(t+T)}\right) \\
&= \ln\frac{U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos(\Omega t) - \frac{1}{2\Omega RC}\sin(\Omega t)\right)}{U_0 e^{-\frac{t+T}{\tau}}\left(\cos(\Omega(t+T)) - \frac{1}{2\Omega RC}\sin(\Omega(t+T))\right)} \\
&= \ln\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos(\Omega t) - \frac{1}{2\Omega RC}\sin(\Omega t)\right)}{e^{-\frac{t+T}{\tau}}\left(\cos(\Omega t) - \frac{1}{2\Omega RC}\sin(\Omega t)\right)} \\
&= \ln e^{\frac{T}{\tau}} \\
&= \frac{T}{\tau} \\
&= \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \times \frac{\omega_0}{2Q} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}
\end{aligned}$$

R5. Déterminer graphiquement la valeur du décrément logarithmique δ.

Solution:
On lit $u_c(t) = 0,3$ V ; $u_c(t+T) = 0,18$ V, donc $\delta = \ln\left(\dfrac{0,3}{0,18}\right) = 0,51$

R6. Déduire de toutes ces mesures les valeurs des composants R_f, L ainsi que la tension initiale U_0.

Solution:
Charge initiale du condensateur : $\boxed{U_0 = u_c(0) = 0,4 \text{ V}}$

$\delta = \dfrac{\omega_0 T}{2Q}$

On peut déterminer Q à l'aide de δ : $Q = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{\delta^2} + \dfrac{1}{4}} = 6,2$

$\boxed{R_f = -\dfrac{u_c(0)}{i(0)} = 1,6.10^3\ \Omega}$

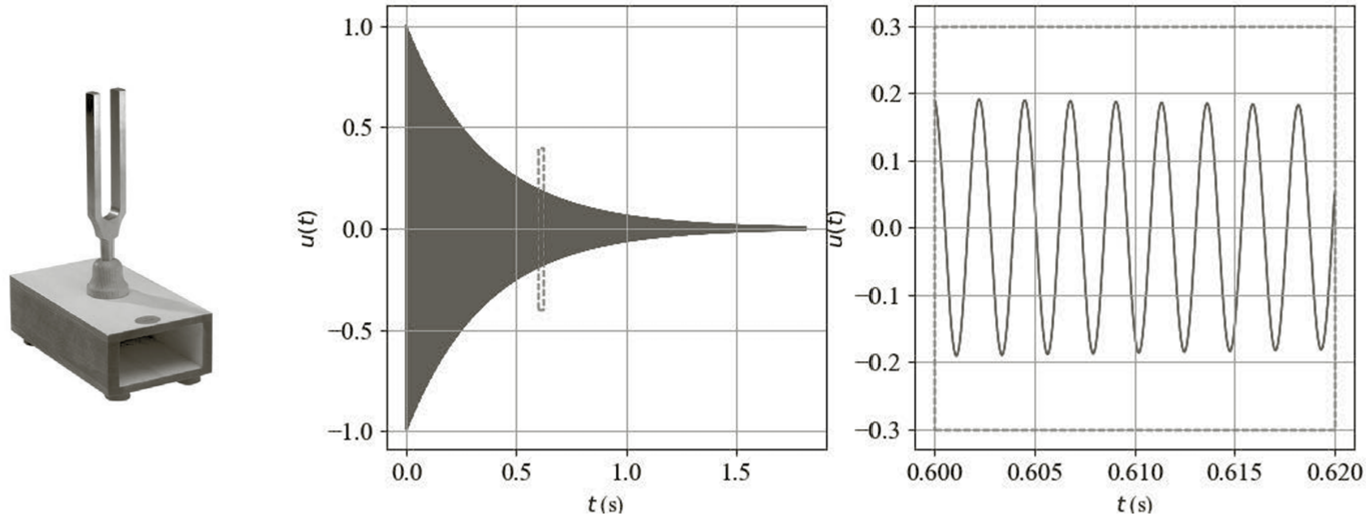
On peut maintenant déterminer ω_0 : $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{RC}$, donc $\boxed{\omega_0 = \dfrac{Q}{RC}}$

A.N. $\underline{\omega_0 = 8.10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$

On peut finir par déterminer L : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, donc $\boxed{L = \dfrac{1}{\omega_0^2 C} = 3,1.10^{-4} \text{ H}}$

Exercice n°6 Diapason

Un diapason peut être modélisé par un système masse-ressort amorti. L'amortissement provient principalement de la transmission des oscillations des tiges métalliques en vibration sonore.



R1. Rappeler l'équation différentielle canonique d'un oscillateur amorti en faisant apparaître la pulsation propre ω_0 et le coefficient de qualité Q.

Solution: Équation canonique d'un oscillateur amorti $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$

R2. À partir de l'enregistrement sonore représenté ci-dessus, estimer le facteur d'amortissement Q, la pseudo-pulsation, la pulsation propre.

Solution: Q est très élevé, donc $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$

D'après le graphe de droite : $T = \dfrac{0,618 - 0,6}{8} = 2,25.10^{-3}$ s, soit $\Omega = 2790$ rad $\cdot$ s^{-1}

Temps caractéristique de la décroissance exponentielle $\tau = 0,36$ s $= \dfrac{2Q}{\omega_0} \approx \dfrac{2Q}{\Omega}$, ainsi $Q \approx \dfrac{\Omega\tau}{2} = 502$!

Exercice n°7 Interprétation énergétique du facteur de qualité

Un corps (S), de masse $m = 50$ g, est suspendu à un point fixe O par l'intermédiaire d'un ressort vertical de raideur $k = 20$ N $\cdot$ m^{-1} et de longueur à vide $\ell_0 = 20$ cm. Lorsqu'il est animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}$, (S) est soumis de la part de l'air à une force de frottement fluide $\overrightarrow{F} = -h\overrightarrow{v}$. La position de (S) est repérée par la coordonnée $z(t)$ de son centre d'inertie M sur un axe vertical descendant Oz. On note z_{eq} la cote de M à l'équilibre.

On lâche (S) à $t = 0$ avec une vitesse nulle dans la position $z_0 = z_{eq} + a > z_{eq}$. Le référentiel $\mathscr{R}$ lié au sol est supposé galiléen.

En introduisant la variable $Z(t) = z(t) - z_{eq}$, on peut montrer que Z vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{mk}}{h}$$

On donne l'expression de Z dans le cadre du régime pseudo-périodique :

$$Z(t) = ae^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right) \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

On s'intéresse aux aspects énergétiques de ce mouvement. On se place dans l'hypothèse $Q \gg 1$.

R1. Déterminer une expression approchée de Z compte tenu de $Q \gg 1$[1].

Solution: Pour $Q \gg 1$, $\Omega \approx \omega_0$, et $\dfrac{1}{\Omega\tau} \approx \dfrac{\omega_0}{\omega_0 \times 2Q} \ll 1$

On peut simplifier $\boxed{Z(t) = ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t)}$

R2. Montrer que l'expression approchée de l'énergie mécanique $\mathscr{E}_m$ de (S) en fonction du temps s'écrit

$$\frac{1}{2}ka^2e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

<u>Indication :</u> Les énergies potentielles sont définies à une constante additive près. La constante C totale sera choisie de sorte qu'à l'équilibre, l'énergie potentielle totale est nulle, ce qui impose $C = -\dfrac{(mg)^2}{2k}$.

Solution: Vitesse :

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= ae^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}\cos(\omega_0 t) - \omega_0\sin(\omega_0 t)\right) \\
&= -ae^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{\omega_0}{2Q}\cos(\omega_0 t) + \omega_0\sin(\omega_0 t)\right) \\
&\approx -a\omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega_0 t)
\end{aligned}$$

Énergie mécanique, avec C la constante provenant des énergies potentielles définies à une constante

1. Z devra s'écrire sous la forme $Ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\Omega t + \varphi)$ où A et φ sont à déterminer en fonction de a

additive près.

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_m &= \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_{pp} + \mathscr{E}_{p,\acute{e}l} \\
&= \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgZ + \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgZ + \frac{1}{2}k(Z + z_{\acute{e}q} - \ell_0)^2 + C \\
&= \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}\sin^2(\omega_0 t) - mgae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k\left(ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t) + \frac{mg}{k}\right)^2 + C \\
&= \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}\sin^2(\omega_0 t) - mgae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k\left(a^2e^{-\frac{2t}{\tau}}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{(mg)^2}{k^2} + 2a\frac{mg}{k}e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t)\right) + C \\
&= \frac{1}{2}a^2ke^{-\frac{2t}{\tau}}(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) + ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t)(-mg + mg) + \frac{(mg)^2}{2k} + C \\
&= \frac{1}{2}ka^2e^{-\frac{2t}{\tau}} + \frac{(mg)^2}{2k} + C
\end{aligned}$$

Pour simplifier la suite, choisissons C pour que la constante additive soit nulle : $\dfrac{(mg)^2}{2k} + C = 0$

R3. Quel est le signe de la dérivée temporelle de $\mathscr{E}_m(t)$? Commenter le résultat.

Solution: $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t} < 0$

R4. Donner une expression approchée de la variation relative $\dfrac{\Delta\mathscr{E}_m}{\mathscr{E}_m} = \dfrac{\mathscr{E}_m(t+T) - \mathscr{E}_m(t)}{\mathscr{E}_m(t)}$ de l'énergie mécanique pendant une période. En déduire une interprétation énergétique du facteur de qualité Q.
On donne : $e^{-x} \approx 1 - x$ pour $x \ll 1$.

Solution:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\mathscr{E}_m}{\mathscr{E}_m} &= \frac{\mathscr{E}_m(t+T) - \mathscr{E}_m(t)}{\mathscr{E}_m(t)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}ka^2e^{-\frac{2(t+T)}{\tau}} - \frac{1}{2}ka^2e^{-\frac{2t}{\tau}}}{\frac{1}{2}ka^2e^{-\frac{2t}{\tau}}} \\
&= \frac{e^{-\frac{2t}{\tau}}(e^{-\frac{2T}{\tau}} - 1)}{e^{-\frac{2t}{\tau}}} \\
&= e^{-\frac{2T}{\tau}} - 1 \\
&\approx 1 - \frac{2T}{\tau} - 1 \\
&\approx -\frac{2T}{\tau} \\
&\approx -2 \times \frac{2\pi}{\Omega} \times \frac{\omega_0}{2Q} \\
&\approx -\frac{2\pi}{Q}
\end{aligned}$$

Le facteur de qualité est donc inversement proportionnel à la variation relative d'énergie mécanique au cours d'une période : $Q = -2\pi\dfrac{\mathscr{E}_m}{\Delta\mathscr{E}_m}$

Si Q est élevé, l'oscillateur revient à sa position d'équilibre avec un grand nombre d'oscillations, car il perd peu d'énergie à chaque oscillation.

R5. Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire en lien avec le facteur de qualité et la période propre ?

Solution: