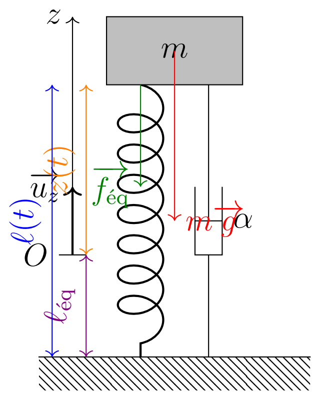
Thème I. Ondes et signaux (Oscillateurs)

TD n°7 Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé – *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6
Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.		✏	✏	✏	✏	✏
Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.		✏	✏	✏	✏	✏
Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.	✏	✏	✏	✏	✏	✏
Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.	✏	✏	✏	✏		
Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.			✏			

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Résonance en vitesse



Lorsqu'un moteur de compresseur fonctionne, il est à l'origine de vibrations périodiques qui peuvent entraîner des déplacements importants du châssis. Pour minimiser ce phénomène, il est nécessaire de prévoir un système de suspension et d'amortissement.
On assimile le moteur à un point matériel de masse m posé sur l'association d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 avec un amortisseur exerçant une force de freinage $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v}$ la vitesse du moteur et α une constante positive.
Pour exprimer la position du moteur $z(t)$, on choisit un axe vertical (Oz) ascendant dont l'origine est à la position d'équilibre de la masse m.

R1. Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre lorsque le moteur ne fonctionne pas.

Solution: Système : moteur assimilé à un point matériel de masse m.
Référentiel : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$
- force de rappel élastique : $\overrightarrow{f_{él}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z}$
- force de frottement fluide : $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v} = -\alpha\dot{z}\overrightarrow{u_z}$
- force supplémentaire modélisant le fonctionnement du moteur : $\overrightarrow{F} = F_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$

À l'équilibre, quand le moteur ne fonctionne pas, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, et

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{él}} &= \overrightarrow{0} \\ -mg\overrightarrow{u_z} - k(\ell_{éq} - \ell_0)\overrightarrow{u_z} &= \overrightarrow{0} \\ -k\ell_{éq} + k\ell_0 - mg &= 0 \\ \ell_{éq} &= \ell_0 - \frac{mg}{k} \end{aligned}$$

La longueur du ressort à l'équilibre est $\boxed{\ell_{éq} = \ell_0 - \dfrac{mg}{k} < \ell_0}$

En fonctionnement, tout se passe comme si une force supplémentaire $\overrightarrow{F} = F_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$ agissait sur le moteur.

R2. Établir l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$ lorsque le moteur fonctionne sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Solution: On applique le principe fondamental de la dynamique au moteur dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\begin{aligned}
m\overrightarrow{a} &= m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{\text{él}}} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{F} \\
m\ddot{z}\overrightarrow{u_z} &= -mg\overrightarrow{u_z} - k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z} - \alpha\dot{z}\overrightarrow{u_z} + F_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z} \\
m\ddot{z} &= -mg - k\ell(t) + k\ell_0 - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t) \\
m\ddot{z} &= -mg - k(z(t) + \ell_{\text{éq}}) + k\ell_0 - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t) \\
m\ddot{z} &= -mg - kz(t) - k\ell_{\text{éq}} + k\ell_0 - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t) \\
m\ddot{z} &= -mg - kz(t) - k\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right) + k\ell_0 - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t) \\
m\ddot{z} &= -kz(t) - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

On obtient l'équation différentielle : $\boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$

R3. On cherche pour la vitesse une solution de la forme $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = V_0\cos(\omega t + \phi)$.

Établir l'équation vérifiée par l'amplitude complexe de la vitesse $\underline{V} = V_0 e^{j\phi}$.

Solution: $v(t) = V_0\cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \underline{v}(t) = V_0 e^{j(\omega t+\phi)} = \underline{V}e^{j\omega t}$

On peut noter que : $\underline{\ddot{z}} = \frac{\mathrm{d}\underline{v}}{\mathrm{d}t} = j\omega\underline{v}$

et que $\underline{z}(t) = \int \underline{e}(t)\mathrm{d}t = \frac{\underline{v}}{j\omega}$

$$\begin{aligned}
\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) &= \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \\
\underline{\ddot{z}} + \frac{\alpha}{m}\underline{\dot{z}} + \frac{k}{m}\underline{z} &= \frac{F_0}{m}e^{j\omega t} \\
j\omega\underline{v} + \frac{\alpha}{m}\underline{v} + \frac{k}{m}\frac{\underline{v}}{j\omega} &= \frac{F_0}{m}e^{j\omega t} \\
\left(j\omega + \frac{\alpha}{m} + \frac{k}{mj\omega}\right)\underline{V}e^{j\omega t} &= \frac{F_0}{m}e^{j\omega t} \\
\underline{V} &= \frac{\frac{F_0}{m}}{j\omega + \frac{\alpha}{m} + \frac{k}{mj\omega}} \\
\underline{V} &= \frac{\frac{F_0}{m}}{j\omega + 2\lambda + \frac{\omega_0^2}{j\omega}} \\
\underline{V} &= \frac{\frac{F_0}{m}}{2\lambda + j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\underline{V} = \dfrac{\frac{F_0}{m}}{2\lambda + j\omega_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$

R4. Exprimer V_0 en fonction de ω et des paramètres $\lambda = \dfrac{\alpha}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\dfrac{F_0}{m}$.

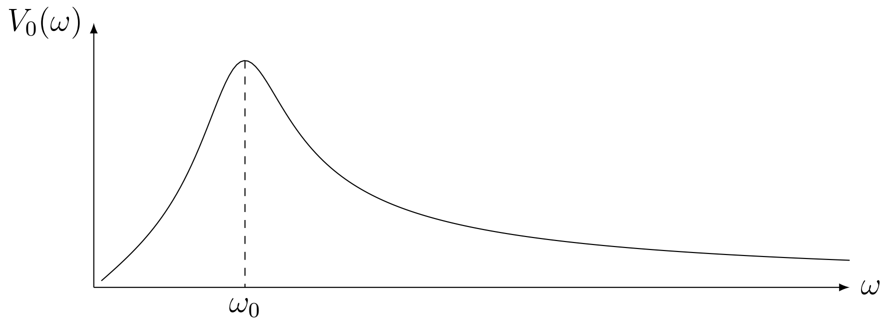
Solution: L'amplitude V_0 est le module de $\underline{V}$: $\boxed{V_0 = \dfrac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{4\lambda^2 + \omega_0^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$

R5. Étudier l'existence d'une résonance. Dépend-elle du facteur de qualité ?

Solution: On reconnait la forme de l'amplitude de l'intensité dans le circuit RLC série.
ω n'apparaît qu'au dénominateur de V_0, donc V_0 est maximale quand le dénominateur est minimal. Cela se produit quand $\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ est minimal, or $\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \geq 0$ et s'annule, donc la V_0 est maximal quand $\boxed{\omega = \omega_0}$.
V_0 présente un extrémum quand la pulsation de l'excitation est égale à la pulsation propre.

R6. Tracer l'allure de $V_0(\omega)$.

Solution: On reconnait la forme de l'amplitude de l'intensité dans le circuit RLC série.
$\lim\limits_{\omega \to 0} V_0(\omega) = 0 = \lim\limits_{\omega \to +\infty} V_0(\omega)$

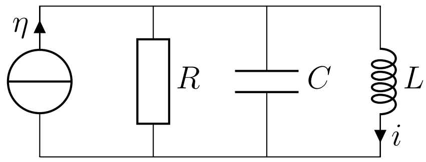


R7. La pulsation vaut $\omega = 628$ rad $\cdot$ s^{-1} et le moteur a une masse $m = 10$ kg. On dispose de deux ressorts de raideur respective $k_1 = 4,0.10^6$ N $\cdot$ m^{-1} et $k_2 = 1,0.10^6$ N $\cdot$ m^{-1}. Lequel faut-il choisir ?

Solution: Calculons les deux pulsations propres et comparons-les à ω.
$\omega_{01} = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}} = 632$ rad $\cdot$ s^{-1} $\approx \omega$: ce choix de constante de raideur ne paraît pas approprié, car les vibrations seront d'amplitude très importante.
$\omega_{02} = \sqrt{\dfrac{k_2}{m}} = 316$ rad $\cdot$ s^{-1} $< \omega$: ce choix paraît plus pertinent.
Cependant, pour s'assurer que cette valeur de k est pertinent il faudrait connaitre la largeur de la bande passante, pour cela il faudrait connaître la valeur de α et s'assurer que ω soit hors de la bande passante.

Exercice n°2 Résonance en intensité du RLC parallèle

Un circuit RLC parallèle est alimenté par une source de courant idéale, traversée par une intensité $\eta(t) = \eta_m \cos(\omega t)$.
La bobine d'inductance L est parcourue par un courant d'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.
On pose $G = \dfrac{I_m}{\eta_m}$.



R1. Établir l'expression de l'amplitude $\underline{I_m}$ complexe de l'intensité.

Solution:
On associe R et C en parallèle : $\underline{Y_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{R} + Cj\omega$

On reconnaît un pont diviseur de courant : $\underline{i} = \dfrac{\underline{Y_L}}{\underline{Y_L} + \underline{Y_{\text{éq}}}}\underline{\eta} = \dfrac{\dfrac{1}{Lj\omega}}{\dfrac{1}{Lj\omega} + \dfrac{1}{R} + Cj\omega}\underline{\eta}$

Ainsi : $\boxed{\underline{I_m} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{Lj\omega}{R} - LC\omega^2}\eta_m}$

R2. En déduire l'expression de $G(\omega)$.

Solution:
On en déduit : $\boxed{G(\omega) = \dfrac{|\underline{I_m}|}{\eta_m} = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega)^2 + \left(\dfrac{L\omega}{R}\right)^2}}}$

R3. Déterminer les extrema de $G(\omega)$ et montrer qu'il existe un phénomène de résonance en intensité quand $R > R_c$, avec R_c une valeur critique de la résistance dont on donnera l'expression.

Solution: L'expression de $A(\omega)$ est identique à celle obtenue pour l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur dans le RLC série, en notant que $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\dfrac{L}{R} = \dfrac{1}{Q\omega_0}$, soit $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

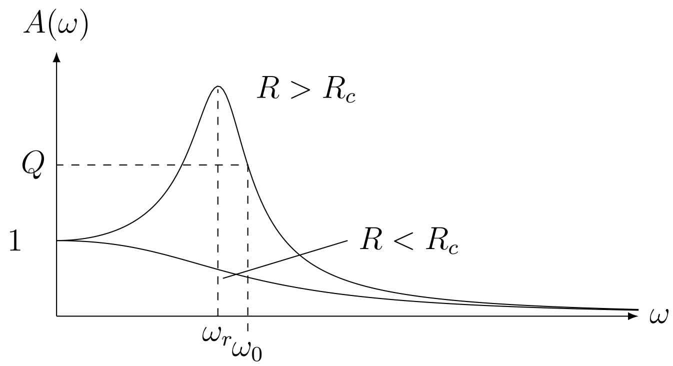
Calculs à faire

A est maximal quand le dénominateur est minimal : en $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \dfrac{L}{4R^2C}}$, qui ne se produit que si $\dfrac{L}{4R^2C} < 1$, soit pour $\boxed{R > \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

On identifie $\boxed{R_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

R4. Tracer l'allure de $G(\omega)$ dans les deux cas : $R < R_c$ et $R > R_c$.

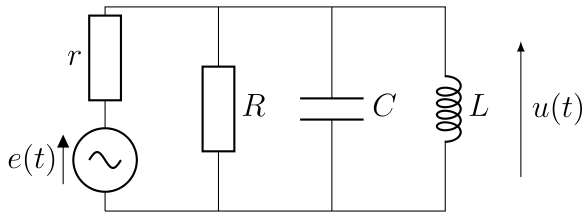
Solution:



II Exercices d'approfondissement

Exercice n°3 Circuit RLC parallèle

On considère le circuit représenté ci-contre.
Il est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale : $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



R1. Déterminer les valeurs de l'amplitude U_m de $u(t)$ à basse et haute fréquence en étudiant le comportement asymptotique des dipôles.

R2. Établir l'expression de l'admittance complexe au dipôle RLC parallèle.

Solution: $\boxed{\underline{Y} = \dfrac{1}{R} + Cj\omega + \dfrac{1}{Lj\omega} = \dfrac{1}{\underline{Z}}}$

R3. Établir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U_m}$ de la tension u en fonction de E_m, r, R, L, C et ω.
La mettre sous la forme : $\underline{U_m} = \dfrac{AE_m}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$, et identifier les expressions de A, Q et ω_0 (faites attention aux unités des différentes grandeurs !).

Solution: Pont diviseur de tension : $\underline{u} = \dfrac{\underline{Z}}{r + \underline{Z}}\underline{e} = \dfrac{1}{1 + r\underline{Y}}\underline{e}$

Ainsi $\underline{u} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{r}{R} + rCj\omega + \dfrac{r}{Lj\omega}}\underline{e}$

Or $e(t) = E_m \cos(\omega t) \longrightarrow \underline{e} = E_m e^{j\omega t}$ et $u(t) = U_m \cos(\omega + \varphi) \longrightarrow \underline{u} = U_m ej(\omega t + \varphi) = \underline{U_m}e^{j\omega t}$

Ainsi $\boxed{\underline{U_m} = \dfrac{E_m}{1 + \dfrac{r}{R} + rCj\omega + \dfrac{r}{Lj\omega}}}$

On divise par $1 + \dfrac{r}{R} = \dfrac{R + r}{R}$, c'est-à-dire on multiplie par $\dfrac{R}{r + R}$.

$\underline{U_m} = \dfrac{E_m \dfrac{R}{R + r}}{1 + \dfrac{rR}{R + r} j\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}$, que l'on identifie avec $\underline{U_m} = \dfrac{AE_m}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

Avec $\boxed{A = \dfrac{R}{R + r}}$ et

$\dfrac{Q}{\omega_0} = \dfrac{rR}{r+R}C$ et $Q\omega_0 = \dfrac{rR}{(R+r)L}$, soit $\boxed{Q = \dfrac{rR}{r+R}\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$ et $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

R4. Pour quelle pulsation la tension $u(t)$ est-elle en phase avec le générateur $e(t)$?

Solution: $\arg(\underline{U_m}) = \arctan\left(Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$

$\arg(\underline{U_m})$ correspond au déphasage de u par rapport à e.

u et e est en phase lorsque $\arctan\left(Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega = \omega_0}$

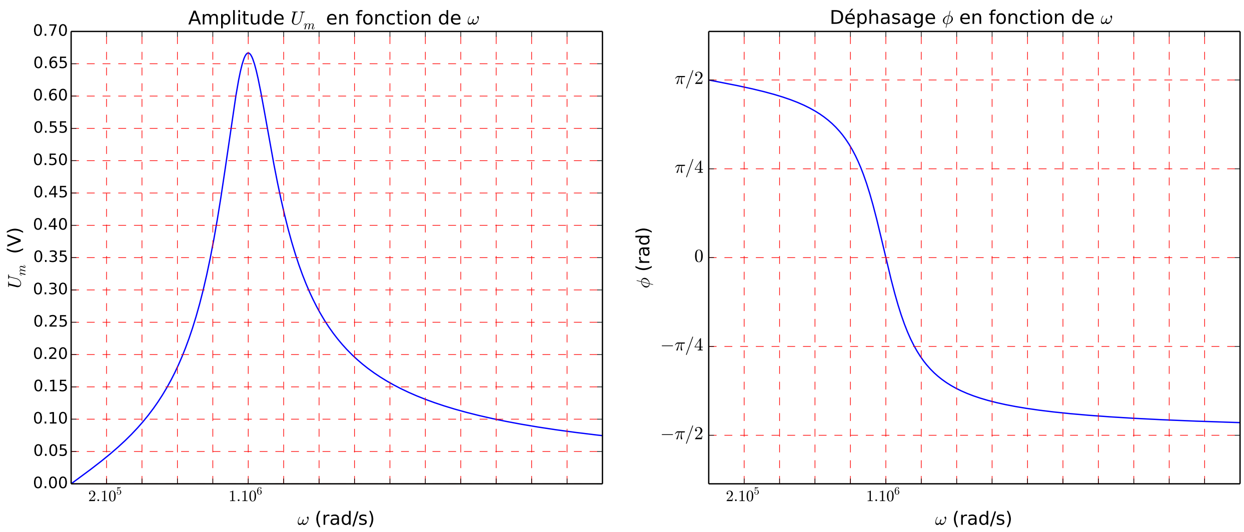
R5. Déterminer ω_0 et Q à l'aide des graphes ci-dessous. Justifier la réponse.

Solution: On lit $\boxed{\omega_0 = 1,0.10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$

Le facteur de qualité est relié à ω_0 et à la largeur de la bande passante par $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$

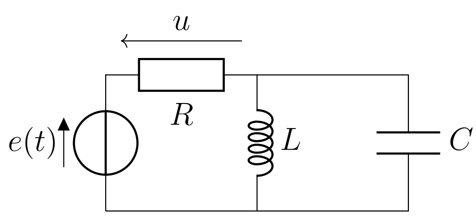
On lit les pulsations de coupure ω_c telle que $U_m(\omega_c) = \dfrac{U_{m,\max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{0,67 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 0,47$ V, soit $\omega_{c1} = 8,5.10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_{c2} = 11,5.10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, donc $\Delta\omega = 3.10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Ainsi $\boxed{Q = 3,3}$



Exercice n°4 Circuit bouchon

On considère le circuit ci-contre avec $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.
On étudie la tension aux bornes de la résistance en régime sinusoïdal forcé : $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$.



R1. Établir l'expression de $u(t)$ à l'aide des impédances complexes.
On introduira la pulsation caractéristique et le facteur de qualité.
En déduire l'amplitude complexe $\underline{U_0}(x)$ où $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite.

Solution: La bobine et le condensateur en parallèle sont équivalents à un unique dipôle d'impédance complexe : $\underline{Z_{\text{éq}}} = \dfrac{\underline{Z_C}\,\underline{Z_L}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_L}} = \dfrac{L/C}{Lj\omega + \dfrac{1}{Cj\omega}} = \dfrac{Lj\omega}{1 - LC\omega^2}$ Pont diviseur de tension : $\underline{u} = \dfrac{R}{R + \underline{Z_{\text{éq}}}}\underline{e}$

Soit $\underline{u} = \dfrac{R}{R + \dfrac{Lj\omega}{1 - LC\omega^2}}\underline{e}$, Soit $\boxed{\underline{U_0} = \dfrac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + \dfrac{L}{R}j\omega}E}$

On peut introduire $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

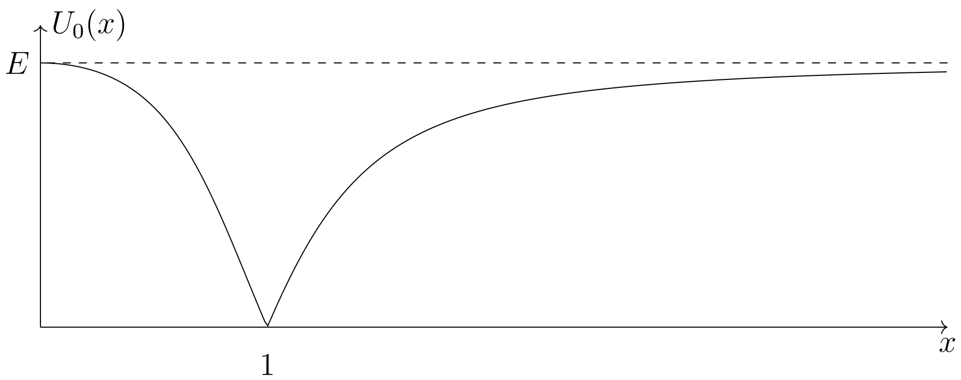
Alors $LC\omega^2 = x^2$ et $\dfrac{L\omega}{R} = \dfrac{L}{R\sqrt{LC}}\omega\sqrt{LC} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}x = \dfrac{x}{Q}$

R2. Étudier et tracer le module de U_0 en fonction de x. Montrer qu'il existe une anti-résonance (pulsation pour laquelle l'amplitude U_0 est nulle).

Solution: Amplitude : $\boxed{U_0(x)\dfrac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1-x)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}E}$

U_0 s'annule pour $x = 1$, c'est-à-dire pour $\omega = \omega_0$.

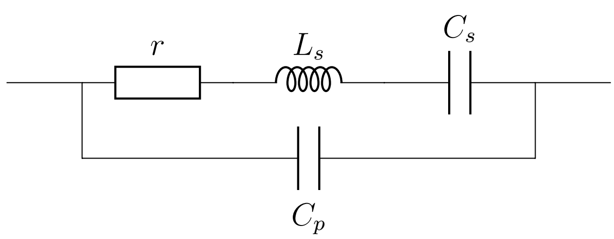
$\lim\limits_{\omega \to 0} U_0(x) = E$ et $\lim\limits_{\omega \to \infty} U_0(x) = E$



Exercice n°5 Oscillateur à quartz

L'oscillateur à cristal est la solution naturelle lorsque la fréquence des oscillations doit être stable et précise. Un oscillateur à quartz permet d'obtenir des oscillations dont la fréquence est comprise entre quelques dizaines de kHz et quelques dizaines de MHz.

On utilise un quartz de fréquence 3,2768 MHz. Le schéma équivalent du quartz est représenté sur la figure ci-contre.



R1. Montrer que l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z_Q}(j\omega)$ du quartz s'exprime en fonction de la pulsation ω selon la relation :

$$\underline{Z_Q}(j\omega) = \frac{1 + jC_s\omega(r + jL_s\omega)}{j(C_s + C_p)\omega + j^2 C_s C_p \omega^2 (r + jL_s\omega)}$$

Solution:

$$\begin{aligned}\underline{Z_Q}(\omega) &= \frac{1}{C_p j\omega + \dfrac{1}{r + L_s j\omega + \dfrac{1}{C_s j\omega}}} \\ &= \frac{1 + rC_s j\omega + j^2\omega^2 L_s C_s}{C_s j\omega + C_p j\omega(rC_s j\omega + j^2\omega^2 L_s C_s + 1)} \\ &= \frac{1 + jC_s\omega(r + jL_s\omega)}{j(C_s + C_p)\omega + C_p C_s j\omega(r + j\omega L_s)}\end{aligned}$$

R2. On néglige la résistance r du quartz. Donner l'expression simplifiée de l'impédance complexe $\underline{Z_Q}(j\omega)$. En déduire la valeur de l'impédance du quartz en continu.

Solution: On néglige r :

$$\begin{aligned}\underline{Z_Q}(\omega) &= \frac{1 + jC_s\omega(r + jL_s\omega)}{j(C_s + C_p)\omega + C_p C_s j\omega(r + j\omega L_s)} \\ &\approx \frac{1 - L_s C_s \omega^2}{j(C_s + C_p)\omega + j^2\omega^2 C_s C_p \times jL_s\omega}\end{aligned}$$

R3. En négligeant la résistance r du quartz, montrer que l'expression simplifiée de l'impédance complexe peut se mettre sous la forme :

$$\underline{Z_Q}(j\omega) = \frac{1}{jC_{\text{éq}}\omega} \frac{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

En déduire par identification les expressions de la capacité équivalente $C_{\text{éq}}$, ainsi que des pulsations ω_1 et ω_2.

Solution:

$$\begin{aligned}\underline{Z_Q}(\omega) &\approx \frac{1 - L_s C_s \omega^2}{j(C_s + C_p)\omega + j^2\omega^2 C_s C_p \times jL_s\omega} \\ &\approx \frac{1 - L_s C_s \omega^2}{j(C_s + C_p)\omega\left(1 - \omega^2 \dfrac{C_s C_p}{C_p + C_s} L_s\right)}\end{aligned}$$

On peut identifier : $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{L_s C_s}}}$; $\boxed{C_{\text{éq}} = C_s + C_p}$; $\boxed{\omega_2 = \sqrt{\dfrac{C_s + C_p}{C_p C_s L_s}} = \omega_1 \times \sqrt{1 + \dfrac{C_s}{C_p}}}$

R4. Le système possède deux fréquences de résonance définies par : $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi}$ (fréquence de résonance série) et $f_2 = \dfrac{\omega_2}{2\pi}$ (fréquence de résonance parallèle). Montrer que $f_1 < f_2$.

Solution: $\omega_2 = \omega_1 \times \sqrt{1 + \dfrac{C_s}{C_p}} > \omega_1$, donc $\boxed{f_1 < f_2}$

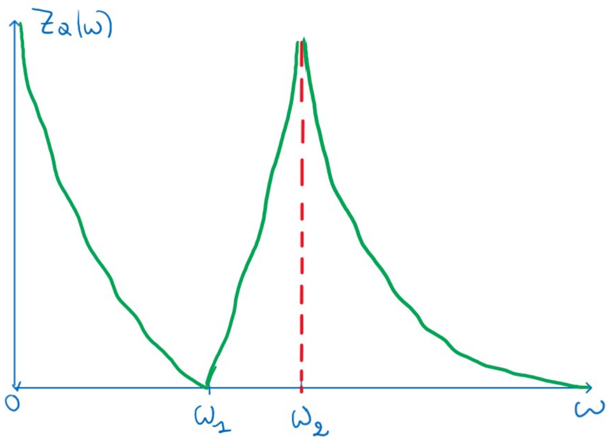
R5. Déterminer la valeur des fréquences f_1 et f_2 ainsi que l'écart $f_1 - f_2$ pour le quartz considéré.
On prendra $L_s = 66,266$ mH ; $C_s = 3,56.10^{-14}$ F ; $C_p = 8,9.10^{-12}$ F

Solution: $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = 3276799$ Hz et $f_2 = 3283346$ Hz
Soit $f_1 - f_2 = 6547$ Hz

R6. Étudier les variations du module et de l'argument de $\underline{Z_Q}(j\omega)$ en fonction de la pulsation ω.

Solution: $Z_Q(\omega) = \dfrac{1}{C_{\text{éq}}\omega} \times \dfrac{\left|1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\right|}{\left|1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_2^2}\right|}$

$\lim\limits_{\omega \to 0} Z_Q(\omega) = +\infty$ et $\lim\limits_{\omega \to \infty} Z_Q(\omega) = 0$
$Z_{\text{éq}}$ s'annule en ω_1, et diverge en ω_2.



$\underline{Z_Q}(j\omega) = -\dfrac{j}{C_{\text{éq}}\omega} \dfrac{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$ est imaginaire pur, donc l'argument vaut $\pm\dfrac{\pi}{2}$

ω	0		ω_1		ω_2		$+\infty$
$1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}$		$+$	0	$-$		$-$	
$1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_2^2}$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$\Im(\underline{Z_Q})$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$\arg(\underline{Z_Q}) = +\dfrac{\pi}{2}$ pour $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ et $\arg(\underline{Z_Q}) = -\dfrac{\pi}{2}$ pour $\omega \in [0, \omega_1] \cup]\omega_2, +\infty[$.

R7. En déduire la nature de l'impédance du quartz à l'intérieur des différents intervalles de pulsation définis par ω_1 et ω_2. Conclure.

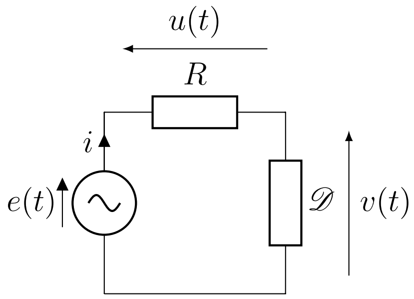
Solution: Le quartz se comporte donc comme une bobine idéale dans l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ et comme un condensateur idéal dans l'intervalle $\omega \in [0, \omega_1] \cup]\omega_2, +\infty[$.

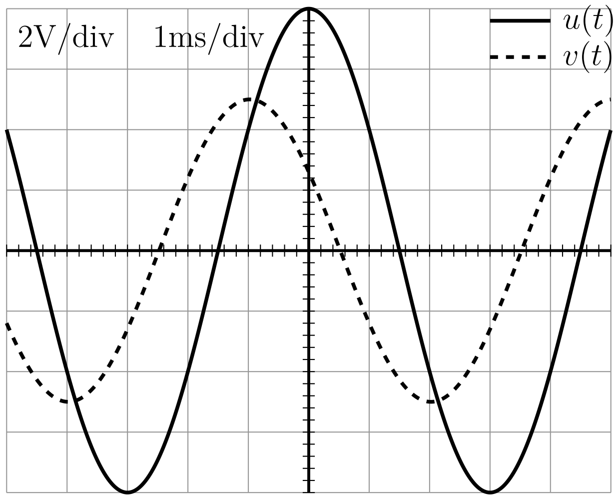
III Résolution de problèmes

Exercice n°6 Nature d'un dipôle inconnu

Dans le montage ci-dessous, le GBF délivre une tension sinusoïdale $e(t)$ de fréquence f.
R est une résistance connue ($R = 100\ \Omega$) et $\mathscr{D}$ un dipôle inconnu.

On visualise à l'oscilloscope $v(t)$ et $u(t)$ avec des calibres identiques sur les deux voies.

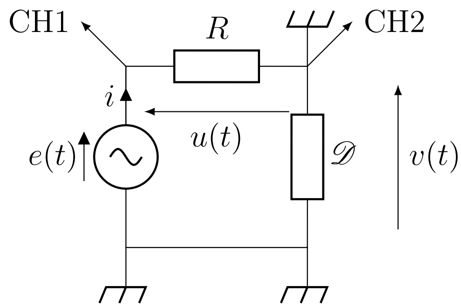




R1. Sachant que le GBF et l'oscilloscope utilisés sont tous les deux munis de prises de terre, quel problème expérimental devra-t-on résoudre pour visualiser simultanément $v(t)$ et $u(t)$?

Solution:

Afin de visualiser u et v il faut placer les voies CH1 et CH2 comme indiqué ci-dessous. Il y a alors deux masses dans le circuit, et le dipôle $\mathscr{D}$ serait alors court-circuité. Il faudra résoudre ce problème de masse.



Plusieurs solutions sont possibles. On peut utiliser un oscilloscope à entrées différentielles, qui permettent de se brancher aux bornes des dipôles sans introduire la masse dans le circuit bien que l'oscilloscope est relié à la Terre (la sécurité avant tout !). Ou un transformateur d'isolement, constitué de deux bobines identiques non reliées entre elles : la moitié du circuit est reliée à la 1$^{\text{re}}$ bobine, l'autre moitié à la 2$^{\text{e}}$ les deux n'étant pas reliées, il peut y avoir une masse dans chaque moitié du circuit. Cela fonctionne grâce au phénomène d'induction (cf partie IV du programme).

R2. On note $\underline{Z} = X + jY$ l'impédance du dipôle $\mathscr{D}$.
Déterminer à partir de la courbe les valeurs de X et de Y.

Solution: On pose $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$

Commençons par lire tout ce qu'on peut sur l'oscillogramme fourni :

Amplitudes : $U_m = 8$ V ; $V_m = 5$ V ;

Période : $T = 6$ ms, donc $f = 167$ Hz

Déphasage : v est en avance sur u, donc $\varphi > 0$, et le retard vaut $\Delta = 1$ ms, donc $\varphi = \dfrac{2\pi\Delta t}{T} = \dfrac{\pi}{3}$

Par définition de l'impédance complexe : $\underline{Z} = \dfrac{\underline{v}}{\underline{i}}$, or $\underline{i} = \dfrac{\underline{u}}{R}$, ainsi $\underline{Z} = R\dfrac{\underline{v}}{udlu} = R\dfrac{V_m}{U_m}e^{j\varphi}$

Ainsi $X + jY = R\dfrac{V_m}{U_m}e^{j\varphi}$, soit : $\boxed{\begin{cases} X = R\dfrac{V_m}{U_m}\cos(\varphi) = 31\ \Omega \\ Y = R\dfrac{V_m}{U_m}\sin(\varphi) = 54\ \Omega \end{cases}}$

R3. Par quel dipôle peut-on modéliser $\mathscr{D}$? Donner ses caractéristiques.

Solution: La partie imaginaire est positive, on peut voir le dipôle $\mathscr{D}$ comme l'association série d'une résistance $r = 31\ \Omega$ et d'une bobine idéale d'inductance L telle que $L\omega = 54\ \Omega$, soit $L = \dfrac{54\ \Omega}{2\pi f} = 52\ \mathrm{mH}$

IV Extraits du cahier d'entrainement de physique-chimie

Nombres complexes et association de dipôles

Entraînement 5.1 — Un entraînement fondamental.

Un nombre complexe peut se mettre sous les formes suivantes :

- $\underline{Z} = a + \mathrm{j}b$ avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire ;
- $\underline{Z} = Z_0 \exp(\mathrm{j}\varphi) = Z_0\big(\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)\big)$ avec $Z_0 \geqslant 0$ son module et $\varphi \in \mathbb{R}$ un argument.

a) Exprimer Z_0 en fonction de a et b. ....

b) On suppose $a \neq 0$. Exprimer $\tan(\varphi)$ en fonction de a et b. ....

On suppose que $\varphi \in\,]-\pi, \pi]$.

c) Si $a \geqslant 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$ (c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$ (e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$
(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$ (d) $\varphi \in\,]-\pi, 0]$ (f) $\varphi \in\,]-\pi/2, 0]$

....

d) Si $a > 0$ et $b \leqslant 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$ (c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$ (e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$
(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$ (d) $\varphi \in\,]-\pi, 0]$ (f) $\varphi \in\,]-\pi/2, 0]$

....

Entraînement 5.2 — Impédances complexes des composants de base.

Les impédances complexes d'un résistor de résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C auxquels on impose une pulsation ω sont respectivement :

$$\underline{Z}_R = R, \qquad \underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega \qquad \text{et} \qquad \underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}.$$

Calculer le module Z_0 et l'argument $\varphi \in\,]-\pi, \pi]$ de chacune de ces impédances.

a) Z_0 de $\underline{Z}_R$. ... c) Z_0 de $\underline{Z}_L$. ... e) Z_0 de $\underline{Z}_C$. ...

b) φ de $\underline{Z}_R$. .... d) φ de $\underline{Z}_L$. .... f) φ de $\underline{Z}_C$. ....

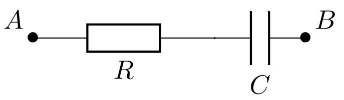
Entraînement 5.3 — Associations de dipôles.

On rappelle la règle pour déterminer l'impédance complexe équivalente à celle de dipôles associés :

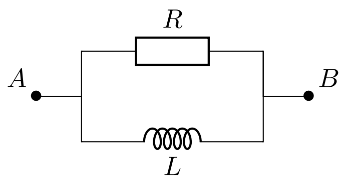
- si les dipôles sont en série : $\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_i \underline{Z}_i$
- si les dipôles sont en parallèle : $\underline{Z}_{\text{eq}} = \dfrac{1}{\sum_i 1/\underline{Z}_i}$.

À l'aide de ces règles, déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}_{\text{AB}}$ des associations de dipôles suivants :

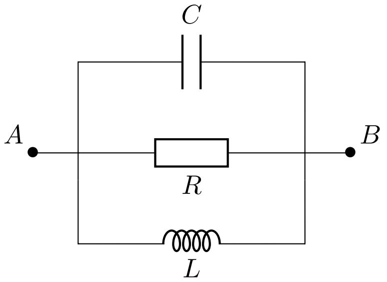
a)



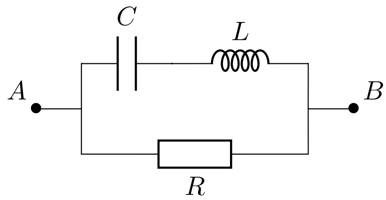
b)



c)



d)



a) $\underline{Z}_{\text{AB}} =$ ....

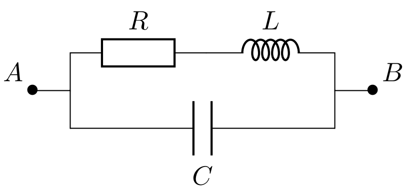
b) $\underline{Z}_{\text{AB}} =$ ....

c) $\underline{Z}_{\text{AB}} =$ ....

d) $\underline{Z}_{\text{AB}} =$ ....

Entraînement 5.4 — À la recherche de la bonne impédance.

Un groupe d'étudiants doit trouver l'impédance $\underline{Z}_{\mathrm{AB}}$ du dipôle AB ci-dessous :



Quelle proposition correspond à l'impédance du dipôle AB ?

(a) $\underline{Z}_{\mathrm{AB}} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega}{1 - LC\omega^2 + \mathrm{j}RC\omega}$ (b) $\underline{Z}_{\mathrm{AB}} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega}{1 + LC\omega^2 + \mathrm{j}RC\omega}$ (c) $\underline{Z}_{\mathrm{AB}} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega}{1 + LC\omega^2 - \mathrm{j}RC\omega}$

....

Signaux périodiques

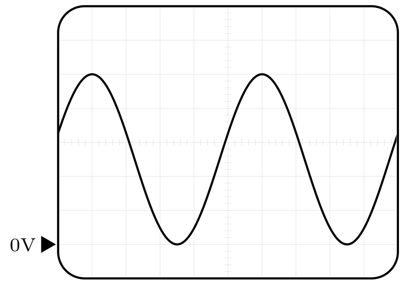
Entraînement 5.5 — Analyse du signal provenant d'un GBF.

En TP, un élève observe à l'oscilloscope la tension délivrée par un générateur de basses fréquences (GBF).

Aider cet élève à analyser le signal de tension mesuré ci-contre en déterminant sa fréquence f_0 et son amplitude U_0.

a) f_0 ....

b) U_0 ....



base de temps : 20 µs/division
calibre vertical : 1 V/division

Entraînement 5.6 — Expression d'une tension.

Nous disposons d'une tension sinusoïdale $u(t)$ de période $T_0 = 1\,\mathrm{ms}$, d'amplitude $U_0 = 2\,\mathrm{V}$ et de phase à l'origine $\varphi = 0\,\mathrm{rad}$.

Parmi les propositions ci-dessous laquelle correspond à l'expression littérale de cette tension $u(t)$?

(a) $u(t) = U_0 \cos\left(\dfrac{t}{T_0}\right)$

(b) $u(t) = \dfrac{U_0}{2} \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0} t\right)$

(c) $u(t) = \dfrac{U_0}{2} \cos\left(\dfrac{t}{T_0}\right)$

(d) $u(t) = U_0 \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0} t\right)$

....