

'hème I. Ondes et signaux (Oscillateurs)

# Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé – Corrigé

Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7
Capacités	1			1			'
Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une		4	\$		\$	4	4
bobine.							
Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une		4	\$		\$	4	4
impédance équivalente.							
Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$
Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.	\$	\$	\$	\$			
Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes			\$				
expérimentaux d'amplitude et de phase.							

## Parcours possibles

- ▶ Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2 + cahier d'entraînement : 5.2, 5.3, 5.4, 5.5
- ♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°1, n°3, n°4.
- ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : exercices n°3, n°4, n°7, n°5, n°6.

### Exercice n°0 Calculs fondamentaux du chapitre $\nabla$

- R1. Quelle est l'expression générale en régime sinusoïdal forcé de la solution de  $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{O} \dot{Z} + \omega_0^2 Z(t) = \omega_0^2 Z_{Am} \cos(\omega t)$
- R2. Donner la représentation complexe de  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ . Définir l'amplitude complexe  $S_m$ . Comment en déduire l'amplitude  $S_m$  et la phase  $\varphi$ ?
- R3. À partir de l'équation différentielle (E), établir l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{Z}_m$  de  $\underline{Z}$ .
- R4. Exprimer l'amplitude  $Z_m$  si l'amplitude complexe est  $\underline{Z_m} = \frac{Z_{Am}}{1 x^2 + j\frac{x}{O}}$ , avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .
- R5. Justifier qu'il se produit une résonance en une pulsation  $\omega_r$  que l'on exprimera en fonction de  $\omega_0$  et Q, à condition que Q vérifie une certaine condition que l'on **exprimera**.

**Tracer** qualitativement l'allure de  $Z_m$  en fonction de  $\omega$ .

Tracer qualitativement i anure de  $Z_m$  en ione de  $Z_m$ .

R6. On donne l'expression de l'amplitude complexe de l'intensité du circuit RLC série :  $\underline{I_m} = \frac{E_m/r}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ 

Exprimer son amplitude puis justifier l'existence d'une résonance quelque soit la valeur de Q. Tracer qualitativement l'allure de  $|I_m|$  en fonction de  $\omega$ .

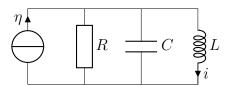
Que peut-on dire de la phase à la résonance?

### Exercices d'application directe du cours

#### Exercice n°1 Résonance en intensité du RLC parallèle

Un circuit RLC parallèle est alimenté par une source de courant idéale, traversée par une intensité  $\eta(t) = \eta_m \cos(\omega t)$ .

On souhaite étudier l'intensité du courant qui parcourt la bobine d'inductance L, recherchée sous la forme  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ .



R1. Associer les deux dipôles pouvant l'être. Reconnaître une situation connue pour pouvoir exprimer rapidement  $\underline{i}$  en fonction de  $\eta$ .



 $\mathsf{R2}.$  Montrer que l'amplitude  $\underline{I_m}$  complexe de l'intensité s'écrit sous la forme

$$\underline{I_m} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \eta_m \quad \text{où} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Déterminer les expressions de  $\omega_0$  et Q.

Solution:

On associe R et C en parallèle :  $\underline{Y_{\text{\'eq}}} = \frac{1}{R} + Cj\omega$ 

On reconnaît un pont diviseur de courant :  $\underline{i} = \frac{\underline{Y_L}}{\underline{Y_L} + \underline{Y_{\text{\'eq}}}} \underline{\eta} = \frac{\frac{1}{Lj\omega}}{\frac{1}{Lj\omega} + \frac{1}{R} + Cj\omega} \underline{\eta}$ 

 $\mbox{Ainsi}: \boxed{\frac{I_m}{1+\frac{Lj\omega}{R}-LC\omega^2}\eta_m}$ 

R3. En déduire l'expression de  $G(\omega)$  défini par le rapport  $\frac{I_m}{\eta_m}$ .

**Solution:** 

On en déduit :  $G(\omega) = \frac{|\underline{I}_m|}{\eta_m} = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega)^2 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}}$ 

R4. Déterminer les extrema de  $G(\omega)$ .

Montrer qu'il existe un phénomène de résonance pour une pulsation  $\omega_r$  que l'on exprimera, à condition que R soit supérieure à une certaine résistance  $R_c$  dont on déterminera l'expression en fonction de L et C.

**Solution:** L'expression de  $G(\omega)$  est identique à celle obtenue pour l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur dans le RLC série, en notant que  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $\frac{L}{R} = \frac{1}{Q\omega_0}$ , soit  $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ 

 $Calculs\ \grave{a}\ faire$ 

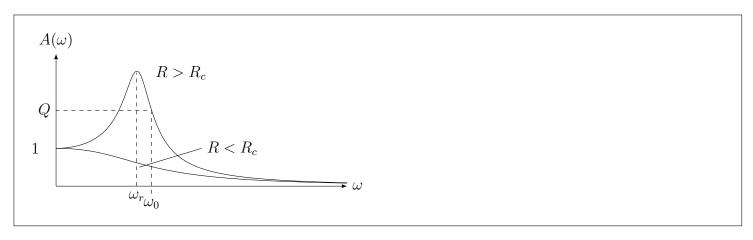
A est maximal quand le dénominateur est minimal : en  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{4R^2C}}$ , qui ne se produit que

si  $\frac{L}{4R^2C}$  < 1, soit pour  $R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ 

On identifie  $R_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ 

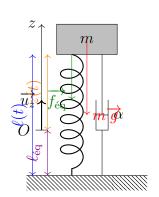
R5. Tracer l'allure de  $G(\omega)$  dans les deux cas :  $R < R_c$  et  $R > R_c$ .

**Solution:** 



#### Exercice n°2 Résonance en vitesse 🎝

Lorsqu'un moteur de compresseur fonctionne, il est à l'origine de vibrations périodiques qui peuvent entraı̂ner des déplacements importants du châssis. Pour minimiser ce phénomène, il est nécessaire de prévoir un système de suspension et d'amortissement. On assimile le moteur à un point matériel de masse m posé sur l'association d'un ressort de raideur k et de longueur à vide  $\ell_0$  avec un amortisseur exerçant une force de freinage  $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$  avec  $\overrightarrow{v}$  la vitesse du moteur et  $\alpha$  une constante positive. Pour exprimer la position du moteur z(t), on choisit un axe vertical (Oz) ascendant dont l'origine est à la position d'équilibre de la masse m.



R1. Exprimer la longueur du ressort à l'équilibre lorsque le moteur ne fonctionne pas.

Solution: Système : moteur assimilé à un point matériel de masse m.

Référentiel : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids  $m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$
- force de rappel élastique :  $\overrightarrow{f_{\text{\'el}}} = -k(\ell(t) \ell_0)\overrightarrow{u_z}$
- force de frottement fluide :  $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v} = -\alpha \dot{z} \overrightarrow{v}$
- force supplémentaire modélisant le fonctionnement du moteur :  $\overrightarrow{F} = F_0 \cos(\omega t) \overrightarrow{u_z}$

À l'équilibre, quand le moteur ne fonctionne pas,  $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$  et  $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ , et

$$\begin{array}{rcl} m\overrightarrow{g}+\overrightarrow{f_{\rm \acute{e}l}} &=& \overrightarrow{0} \\ -mg\overrightarrow{u_z}-k(\ell_{\rm \acute{e}q}-\ell_0)\overrightarrow{u_z} &=& \overrightarrow{0} \\ -k\ell_{\rm \acute{e}q}+k\ell_0-mg &=& 0 \\ \ell_{\rm \acute{e}q} &=& \ell_0-\frac{mg}{k} \end{array}$$

La longueur du ressort à l'équilibre est  $\ell_{\text{éq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k} < \ell_0$ 

R2. Exprimer la force de rappel élastique en fonction de  $k, z, \ell_{\text{\'eq}}, \ell_0, \overrightarrow{u_z}$ , puis en fonction de  $k, z, m, g, \overrightarrow{u_z}$ .

En fonctionnement, tout se passe comme si une force supplémentaire  $\overrightarrow{F} = F_0 \cos(\omega t) \overrightarrow{u_z}$  agissait sur le moteur.

R3. Établir l'équation différentielle satisfaite par z(t) lorsque le moteur fonctionne sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$



Solution: On applique le principe fondamental de la dynamique au moteur dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m \overrightarrow{a} = m \overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{\text{el}}} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{F}$$

$$m \overrightarrow{z} \overrightarrow{u_z} = -mg \overrightarrow{u_z} - k(\ell(t) - \ell_0) \overrightarrow{u_z} - \alpha \dot{z} \overrightarrow{u_z} + F_0 \cos(\omega t) \overrightarrow{u_z}$$

$$m \ddot{z} = -mg - k\ell(t) + k\ell_0 - \alpha \dot{z} + F_0 \cos(\omega t)$$

$$m \ddot{z} = -mg - k(z(t) + \ell_{\text{eq}}) + k\ell_0 - \alpha \dot{z} + F_0 \cos(\omega t)$$

$$m \ddot{z} = -mg - kz(t) - k\ell_{\text{eq}} + k\ell_0 - \alpha \dot{z} + F_0 \cos(\omega t)$$

$$m \ddot{z} = -mg - kz(t) - k\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right) + k\ell_0 - \alpha \dot{z} + F_0 \cos(\omega t)$$

$$m \ddot{z} = -kz(t) - \alpha \dot{z} + F_0 \cos(\omega t)$$

On obtient l'équation différentielle :  $\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m} z(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$ 

On s'intéresse ici à la vitesse  $v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ . En régime sinusoïdal forcé, on la cherche sous la forme  $v_z = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ .

R4. Montrer que l'amplitude complexe de la vitesse définie par  $\underline{V}=V_0~e^{j\phi}$  vérifie l'équation :

$$\underline{V}\left(\frac{\alpha}{m} + j\left(\omega - \frac{k}{m\omega}\right)\right) = \frac{F_0}{m}$$

Solution: 
$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \underline{v}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{V} e^{j\omega t}$$
  
On peut noter que :  $\underline{\ddot{z}} = \frac{\mathrm{d}\underline{v}}{\mathrm{d}t} = j\omega\underline{v}$   
et que  $\underline{z}(t) = \int \underline{e}(t) \mathrm{d}t = \frac{\underline{v}}{j\omega}$   

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$$

$$j\omega\underline{v} + \frac{\alpha}{m}\underline{v} + \frac{k}{m}\frac{\underline{v}}{j\omega} = \frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$$

$$\left(j\omega + \frac{\alpha}{m} + \frac{k}{mj\omega}\right)\underline{V}e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$$

$$V = \frac{\frac{F_0}{m}}{j\omega + \frac{\alpha}{m} + \frac{k}{mj\omega}}$$

$$V = \frac{\frac{F_0}{m}}{j\omega + 2\lambda + \frac{\omega_0^2}{j\omega}}$$

$$V = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\lambda + j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)}$$



Ainsi 
$$\underline{V} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\lambda + j\omega_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

R5. En déduire l'expression de  $\underline{V}$ , puis de  $V_0$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \frac{\alpha}{m}$  et  $\frac{F_0}{m}$ .

Solution: L'amplitude  $V_0$  est le module de  $\underline{V}$ :  $V_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{4\lambda^2 + \omega_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ 

R6. Déterminer la pulsation de résonance. Existe-t-il une condition sur  $\alpha$  pour qu'elle existe? Si oui, laquelle?

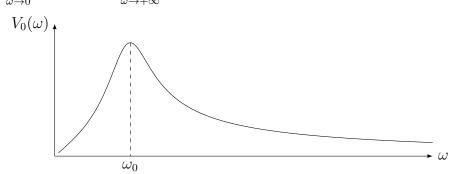
**Solution:** On reconnait la forme de l'amplitude de l'intensité dans le circuit RLC série.  $\omega$  n'apparaît qu'au dénominateur de  $V_0$ , donc  $V_0$  est maximale quand le dénominateur est minimal. Cela se produit quand  $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$  est minimal, or  $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \geq 0$  et s'annule, donc la  $V_0$  est maximal quand  $\overline{\omega = \omega_0}$ .

R7. Tracer l'allure de  $V_0(\omega)$ .

Solution: On reconnait la forme de l'amplitude de l'intensité dans le circuit RLC série.

 $V_0$  présente un extrémum quand la pulsation de l'excitation est égale à la pulsation propre.

$$\lim_{\omega \to 0} V_0(\omega) = 0 = \lim_{\omega \to +\infty} V_0(\omega)$$



R8. La pulsation vaut  $\omega = 628 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et le moteur a une masse m = 10 kg. On dispose de deux ressorts de raideur respective  $k_1 = 4,0.10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $k_2 = 1,0.10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Lequel faut-il choisir?

**Solution:** Calculons les deux pulsations propres et comparons-les à  $\omega$ .

 $\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 632 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \approx \omega$ : ce choix de constante de raideur ne paraît pas approprié, car les vibrations seront d'amplitude très importante.

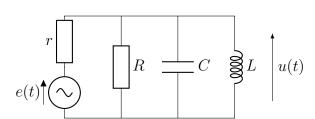
 $\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} = 316~{\rm rad}~\cdot~{\rm s}^{-1} < \omega$ : ce choix paraît plus pertinent.

Cependant, pour s'assurer que cette valeur de k est pertinent il faudrait connaître la largeur de la bande passante, pour cela il faudrait connaître la valeur de  $\alpha$  et s'assurer que  $\omega$  soit hors de la bande passante.

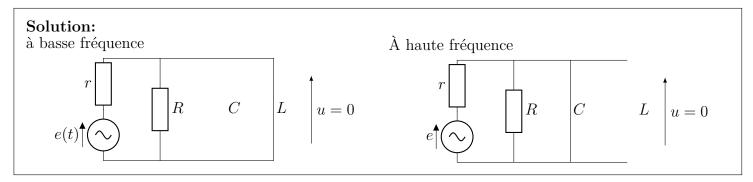


#### Exercice n°3 Circuit RLC parallèle 🎝 🎝

On considère le circuit représenté ci-contre. Il est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale :  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ .



R1. Déterminer les valeurs de l'amplitude  $U_m$  de u(t) à basse et haute fréquence en étudiant le comportement asymptotique des dipôles.



R2. Établir l'expression de l'admittance complexe au dipôle RLC parallèle.

Solution: 
$$\underline{\underline{Y} = \frac{1}{R} + Cj\omega + \frac{1}{Lj\omega} = \frac{1}{\underline{Z}}}$$

R3. Établir l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{U_m}$  de la tension u en fonction de  $E_m, r, R, L, C$  et  $\omega$ . La mettre sous la forme :  $\underline{U_m} = \frac{AE_m}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ , et identifier les expressions de A, Q et  $\omega_0$  (faites attention aux unités des différentes grandeurs!).

Solution: Pont diviseur de tension : 
$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}}{r + \underline{Z}} \underline{e} = \frac{1}{1 + r\underline{Y}} \underline{e}$$

Ainsi  $\underline{u} = \frac{1}{1 + \frac{r}{R} + rCj\omega + \frac{r}{Lj\omega}} \underline{e}$ 

Or  $e(t) = E_m \cos(\omega t) \longrightarrow \underline{e} = E_m e^{j\omega t}$  et  $u(t) = U_m \cos(\omega + \varphi) \longrightarrow \underline{u} = U_m e j(\omega t + \varphi) = \underline{U_m} e^{j\omega t}$ 

Ainsi  $\underline{U_m} = \frac{E_m}{1 + \frac{r}{R} + rCj\omega + \frac{r}{Lj\omega}}$ 

On divise par  $1 + \frac{r}{R} = \frac{R+r}{R}$ , c'est-à-dire on multiplie par  $\frac{R}{r+R}$ .

$$\underline{U_m} = \frac{E_m \frac{R}{R+r}}{1 + \frac{rR}{R+r} j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$
, que l'on identifie avec  $\underline{U_m} = \frac{AE_m}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ 

Avec  $A = \frac{R}{R+r}$  et  $A = \frac{R}$ 

R4. Justifier l'existence d'une résonance pour une pulsation que l'on exprimera.



Solution: Amplitude : 
$$U_m = \frac{AE_m}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Le numérateur ne dépend pas de  $\omega$ , le dénominateur est minimal pour  $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$  minimal, grandeur positive ou nulle, qui s'annule ne  $\omega = \omega_0$ .

Il se produit donc une résonance en  $\omega = \omega_0$ .

R5. Après avoir **rappelé la définition** de la bande passante à -3 dB, **donner** l'expression de sa largeur en fonction de  $\omega_0$  et Q.

**Solution:** La bande passante à -3 dB est l'intervalle de pulsation au sein duquel,  $U_m(\omega) > \frac{U_{m,\text{max}}}{\sqrt{2}}$ 

Elle est de largeur  $\Delta \omega = \frac{\omega_0}{Q}$ 

R6. Pour quelle pulsation la tension u(t) est-elle en phase avec le générateur e(t)?

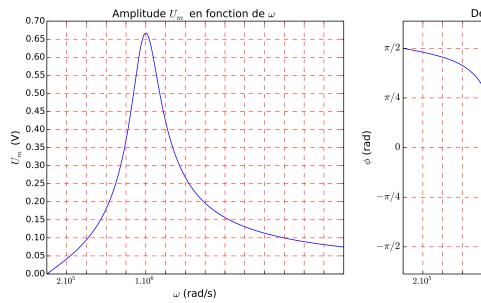
**Solution:**  $\arg(\underline{U_m}) = \arg(E_m) - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$   $\arg(\underline{U_m})$  correspond au déphasage de u par rapport à e. u et e est en phase lorsque  $\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$ 

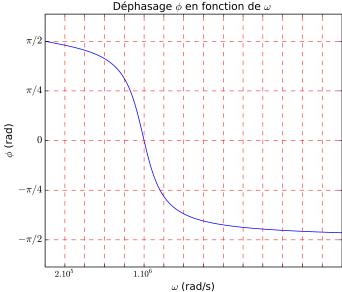
R7. Déterminer  $\omega_0$  et Q à l'aide des graphes ci-dessous. Justifier la réponse.

Solution: On lit  $\omega_0 = 1, 0.10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 

Le facteur de qualité est relié à  $\omega_0$  et à la largeur de la bande passante par  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta \omega}$ 

On lit les pulsations de coupure  $\omega_c$  telle que  $U_m(\omega_c) = \frac{U_{m,\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{0,67 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 0,47 \text{ V}$ , soit  $\omega_{c1} = 8,5.10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\omega_{c2} = 11,5.10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , donc  $\Delta\omega = 3.10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ Ainsi Q = 3,3



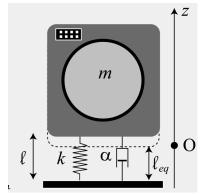




### Exercice n°4 Lave-linge 🎝 🎝

Lorsqu'un lave-linge fonctionne, un balourd provoqué par le linge en rotation provoque des vibrations du châssis et il est nécessaire de prévoir un système de suspension du tambour. On assimile le tabour lesté à un point matériel de masse m relié à une suspension modélisée par un ressort de longueur à vide  $\ell_0$  et de constante de raideur k, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce une force de frottement fluide  $\overrightarrow{f_v} = -\alpha \overrightarrow{v}$ . Le balourd provoque l'apparition d'une force supplémentaire sinusoïdale de la forme  $\overrightarrow{f_e} = A_0\omega^2\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$  où  $\omega$  est la pulsation (vitesse angulaire) du moteur.





Mécanique - Licence/CPGE, Dunod

R1. Dans un premier temps, on suppose le moteur à l'arrêt. **Exprimer** la longueur du ressort  $\ell_{eq}$  à l'équilibre en fonction de  $\ell_0$ , k, m et g.

#### Solution:

Système : Point matériel de masse m

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces :

- poids  $m \overrightarrow{g} = -mg \overrightarrow{u_z}$
- force de rappel élastique  $\overrightarrow{f_{\text{\'el}}} = -k(\ell \ell_0)\overrightarrow{u_z}$
- force de frottement fluide  $\overrightarrow{f_v} = -\alpha \overrightarrow{v}$
- force supplémentaire  $\overrightarrow{f_e} = A_0 \omega^2 \cos(\omega t) \overrightarrow{u_z}$

À l'équilibre, la force de frottement est nulle et la force supplémentaire sinusoïdale :  $m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{\text{\'e}}} + \overrightarrow{f_{e}} = \overrightarrow{0}$ 

$$-mg - k(\ell_e - \ell_0) = 0$$
, donc  $\ell_e = \ell_0 - \frac{mg}{k}$ 

R2. On pose  $z(t) = \ell - \ell_{eq}$ . Montrer que le mouvement de la masse m est régie par l'équation différentielle

$$\ddot{z} + 2\Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = A\omega^2 \cos(\omega t)$$

où l'on précisera les expressions de A,  $ω_0$  et  $\Gamma$ . Calculer  $ω_0$  et  $\Gamma$ .

#### **Solution:**

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$m \overrightarrow{d} = m \overrightarrow{g} + \overrightarrow{f_{el}} + \overrightarrow{f_{e}} + \overrightarrow{f_{v}}$$

$$m \frac{\mathrm{d}^{2}z}{\mathrm{d}t^{2}} \overrightarrow{u_{z}} = -mg \overrightarrow{u_{z}} - k(\ell(t) - \ell_{0}) \overrightarrow{u_{z}} + A_{0} \omega^{2} \cos(\omega t) \overrightarrow{u_{z}} - \alpha \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \overrightarrow{u_{z}}$$

$$m \frac{\mathrm{d}^{2}z}{\mathrm{d}t^{2}} = -mg - k(z(t) + \ell_{\mathrm{\acute{eq}}} - \ell_{0}) + A_{0} \omega^{2} \cos(\omega t) - \alpha \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$m \frac{\mathrm{d}^{2}z}{\mathrm{d}t^{2}} = -kz(t) + A_{0} \omega^{2} \cos(\omega t) - \alpha \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$m \frac{\mathrm{d}^{2}z}{\mathrm{d}t^{2}} + \alpha \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + kz(t) = A_{0} \omega^{2} \cos(\omega t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}z}{\mathrm{d}t^{2}} + \frac{\alpha}{m} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m} z(t) = \frac{A_{0}}{m} \omega^{2} \cos(\omega t)$$

$$\ddot{z} + 2\Gamma \dot{z} + \omega_{0}^{2} z = A \omega^{2} \cos(\omega t)$$

On identifie 
$$A = \frac{A_0}{m}$$
;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ;  $\Gamma = \frac{\alpha}{2m}$   
A.N.:  $\omega_0 = 30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $\Gamma = 5 \text{ s}^{-1}$ 

R3. On étudie dans la suite le régime sinusoïdal forcé à la pulsation  $\omega$ .

**Exprimer** l'amplitude  $Z_m$  des oscillations du mobile.

**Solution:** En complexe :

$$-\omega^{2} \underline{Z_{m}} + 2\Gamma i \omega \underline{Z_{m}} + \omega_{0}^{2} \underline{Z_{m}} = A\omega^{2}$$

$$\underline{Z_{m}} = \frac{A\omega^{2}}{\omega_{0}^{2} - \omega^{2} + 2i\Gamma\omega}$$

$$\underline{Z_{m}} = \frac{A}{\frac{\omega_{0}^{2}}{\omega^{2}} - 1 + \frac{2i\Gamma}{\omega}}$$

$$Z_{m} = \frac{A}{\sqrt{\left(\frac{\omega_{0}^{2}}{\omega^{2}} - 1\right)^{2} + \frac{4\Gamma^{2}}{\omega^{2}}}}$$

$$Z_{m} = \frac{A}{\sqrt{(x - 1)^{2} + \frac{4\Gamma^{2}}{\omega_{0}^{2}}}x}$$

avec 
$$x = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

R4. Tracer qualitativement  $Z_m(\omega)$ .

Solution: 
$$\lim_{\omega \to 0} Z_m = \lim_{x \to +\infty} Z_m = 0$$
  
 $\lim_{\omega \to +\infty} Z_m = \lim_{x \to 0} Z_m = A$ 

Résonance? Étudions la fonction  $g: x \mapsto (x-1)^2 + \frac{4\Gamma^2}{\omega_0^2}x$ 

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = 2(x-1) + \frac{4\Gamma^2}{\omega_0^2}$$

Elle s'annule  $2(x-1) + \frac{4\Gamma^2}{\omega_0^2} = 0$ , soit  $x = 1 - \frac{2\Gamma^2}{\omega_0^2}$ , solution qui existe à condition que  $\frac{2\Gamma^2}{\omega_0^2} < 1$ , soit

 $\Gamma < \frac{\omega_0}{2}$ , ce qui est le cas ici.



Ainsi, il se produit une résonance à la pulsation  $\omega_r=\frac{\omega_0}{\sqrt{x_r}}=\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{2\Gamma^2}{\omega_0^2}}}\approx 0,97\omega_0$   $Z_m \uparrow$ 

R5. Le tambour tourne à  $\omega = 1, 0 \cdot 10^3 \, \mathrm{tr} \cdot \mathrm{min}^{-1}$ .

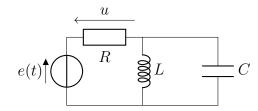
Calculer  $Z_m(\omega)$  et  $Z_{\max} = Z_m(\omega_0)$ . Vérifiez que le système est bien dimensionné pour éviter des déplacements trop importants.

**Solution:** 
$$\omega_r \approx \omega_0$$
, donc  $Z_{\text{max}} = Z_m(\omega_0) = \frac{A\omega_0}{2\Gamma} = 0,06 \text{ m}$   
 $\omega = 1, 0 \cdot 10^3 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 105 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , alors  $Z_m = 2, 1 \text{ cm}$ 

 $\underline{\text{Donn\'es}} \, : m = 10 \; \text{kg} \, ; \, k = 9 \, \cdot \, 10^3 \; \text{N} \, \cdot \, \text{m}^{-1} \, ; \, \alpha = 1 \, \cdot \, 10^2 \; \text{kg} \, \cdot \, \text{s}^{-1} \, ; \, A = 2 \, \cdot \, 10^{-2} \; \text{m}$ 

#### Exercice n°5 Circuit bouchon J J J

On considère le circuit ci-contre avec  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ . On étudie la tension aux bornes de la résistance en régime sinusoïdal forcé :  $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .



R1. Établir l'expression de  $\underline{u}$ .

On introduira la pulsation caractéristique et le facteur de qualité.

En déduire l'amplitude complexe  $\underline{U_0}$  en fonction de  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

Solution: La bobine et le condensateur en parallèle sont équivalents à un unique dipôle d'impédance complexe :  $\underline{Z_{\text{\'eq}}} = \frac{\underline{Z_C}\underline{Z_L}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_L}} = \frac{L/C}{Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}} = \frac{Lj\omega}{1 - LC\omega^2}$  Pont diviseur de tension :  $\underline{u} = \frac{R}{R + \underline{Z_{\text{\'eq}}}}\underline{e}$ 

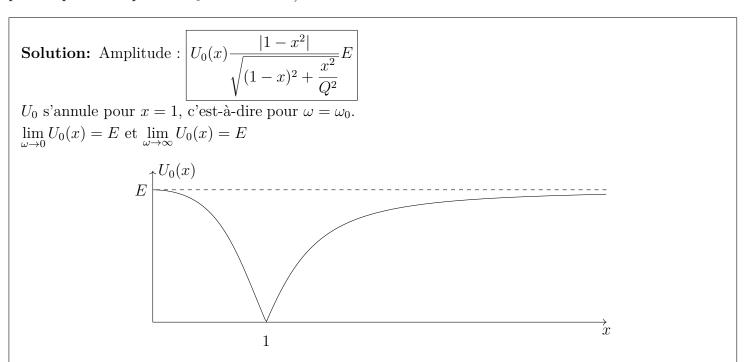
Soit 
$$\underline{u} = \frac{R}{R + \frac{Lj\omega}{1 - LC\omega^2}} \underline{e}$$
, Soit  $\boxed{\underline{U_0} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + \frac{L}{R}j\omega}E}$ 

On peut introduire  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 

Alors 
$$LC\omega^2 = x^2$$
 et  $\frac{L\omega}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}}\omega\sqrt{LC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}x = \frac{x}{Q}$ 

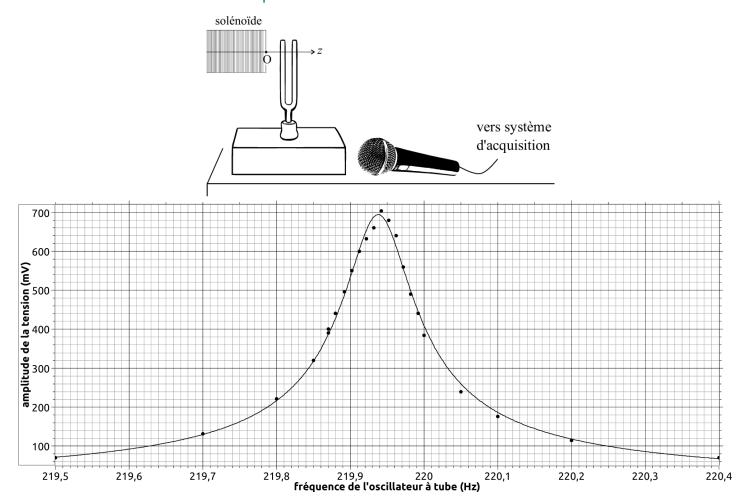


R2. Étudier et tracer le module de  $U_0$  en fonction de x. Montrer qu'il existe une anti-résonance (pulsation pour laquelle l'amplitude  $U_0$  est minimale).



### III Résolution de problèmes

Exercice n°6 Résonance d'un diapason 🎝 🎝

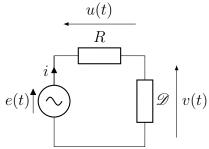


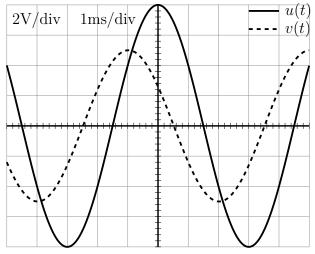
Un diapason est mis en vibration par un champ magnétique sinusoïdal créé par le solénoïde. On obtient la courbe à droite qui donne l'amplitude de la tension aux bornes du microphone enregistrant le son émis par la caisse de résonance du diapason en réponse au forçage en fréquence.

En exploitant le graphe, estimer la fréquence propre et le facteur de qualité du diapason. Commenter.

#### Exercice n°7 Nature d'un dipôle inconnu 🎝 🎝 🎝

Dans le montage ci-dessous, le GBF délivre une tension sinusoïdale e(t) de fréquence f. R est une résistance connue  $(R = 100 \,\Omega)$  et  $\mathcal{D}$  un dipôle inconnu. On visualise à l'oscilloscope v(t) et u(t) avec des calibres identiques sur les deux voies.

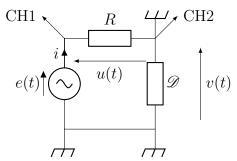




R1. Sachant que le GBF et l'oscilloscope utilisés sont tous les deux munis de prises de terre, quel problème expérimental devra-t-on résoudre pour visualiser simultanément v(t) et u(t)?

#### **Solution:**

Afin de visualiser u et v il faut placer les voies CH1 et CH2 comme indiqué ci-dessous. Il y a alors deux masses dans le circuit, et le dipôle  $\mathcal{D}$  serait alors court-circuité. Il faudra résoudre ce problème de masse.



Plusieurs solutions sont possibles. On peut utiliser un oscilloscope à entrées différentielles, qui permettent de se brancher aux bornes des dipôles sans introduire la masse dans le circuit bien que l'oscilloscope est relié à la Terre (la sécurité avant tout!). Ou un transformateur d'isolement, constitué de deux bobines identiques non reliées entre elles : la moitié du circuit est reliée à la 1<sup>re</sup> bobine, l'autre moitié à la 2<sup>e</sup> les deux n'étant pas reliées, il peut y avoir une masse dans chaque moitié du circuit. Cela fonctionne grâce au phénomène d'induction (cf partie IV du programme).

R2. On note  $\underline{Z} = X + jY$  l'impédance du dipôle  $\mathcal{D}$ . Déterminer à partir de la courbe les valeurs de X et de Y.

**Solution:** On pose  $u(t) = U_m \cos(\omega t)$  et  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ 

Commençons par lire tout ce qu'on peut sur l'oscillogramme fourni :

Amplitudes :  $U_m = 8 \text{ V}$ ;  $V_m = 5 \text{ V}$ ; Période : T=6 ms, donc f=167 Hz

Déphasage : v est en avance sur u, donc  $\varphi > 0$ , et le retard vaut  $\Delta = 1$  ms, donc  $\varphi = \frac{2\pi\Delta t}{T} = \frac{\pi}{3}$ 

Par définition de l'impédance complexe : 
$$\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}}$$
, or  $\underline{i} = \frac{\underline{u}}{R}$ , ainsi  $\underline{Z} = R \frac{\underline{v}}{udlu} = R \frac{V_m}{U_m} e^{j\varphi}$   
Ainsi  $X + jY = R \frac{V_m}{U_m} e^{j\varphi}$ , soit : 
$$\begin{cases} X = R \frac{V_m}{U_m} \cos(\varphi) = 31 \ \Omega \\ Y = R \frac{V_m}{U_m} \sin(\varphi) = 54 \ \Omega \end{cases}$$

R3. Par quel dipôle peut-on modéliser  $\mathcal{D}$ ? Donner ses caractéristiques.

Solution: La partie imaginaire est positive, on peut voir le dipôle  $\mathscr{D}$  comme l'association série d'une résistance  $r=31~\Omega$  et d'une bobine idéale d'inductance L telle que  $L\omega=54~\Omega$ , soit  $L=\frac{54~\Omega}{2\pi f}=52~\mathrm{mH}$