

Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique) TD n°10 Description et paramétrage du mouvement d'un point

💡 Méthode : Comment travailler des exercices ?

Avant la séance de TD :

- ★ Sur une feuille de brouillon, avec un crayon à la main et le chapitre ouvert sous les yeux.
- ★ Essayer des « trucs » même si cela n'aboutit pas.
- ★ Faire des schémas complets et suffisamment grands.
- ★ Ne rien écrire sur l'énoncé de TD afin de pouvoir refaire les exercices après la correction en classe.
- ★ Réfléchir environ 10 à 15 min sur chaque exercice demandé. Si vous bloquez complètement sur une question/un exercice, passez à la suite au bout de 10 min, et me poser des questions soit directement soit par mail nvalade.pcsi@gmail.com.

Après la séance de TD :

- ★ Refaire les exercices corrigés ensemble, sans regarder le corrigé dans un premier temps.
- ★ Une fois l'exercice terminé ou si vous êtes totalement bloqué, reprendre avec le corrigé.

Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7	8
Capacités								
Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.		📌	📌	📌	📌	📌		
Identifier les degrés de liberté d'un mouvement.	📌	📌		📌	📌	📌	📌	
Choisir un système de coordonnées adapté au problème.	📌	📌	📌	📌	📌	📌	📌	📌
Étudier un mouvement à vecteur accélération constant : Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.	📌							📌
Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes sur un mouvement circulaire uniforme ou non uniforme.		📌		📌		📌	📌	
Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane.				📌				
Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.		📌		📌		📌	📌	

Parcours possibles

- ♪ Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2, n°3 (sauf Q1) + cahier d'entraînement :
- ♪ ♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°2, n°3, n°4.
- ♪ ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : exercices n°2, n°3, n°4, n°5.

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Accélération d'une cycliste 🎵

Une cycliste roule prudemment sur une voie partagée, à la vitesse $v_1 = 10,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Puis, pour rejoindre la piste cyclable réservée, elle accélère uniformément avec l'accélération a_1 . On choisit l'axe (Ox) dans la direction et le sens du mouvement de la cycliste.

Q1. Quelle est la nature du mouvement ?

Exprimer la vitesse $v_x(t)$ de la voiture à l'instant t en fonction de v_1 , a_1 et t .

Q2. Au bout de combien de temps t_1 la cycliste a-t-elle atteint la vitesse v_2 (voir les données en fin d'exercice) ?

Q3. Établir l'équation horaire $x(t)$ de la cycliste.

Q4. Exprimer puis calculer numériquement la distance parcourue à l'instant t_1 : $d_1 = x(t_1)$.

Une fois sur la route, la cycliste roule à la vitesse v_2 pendant $t_2 = 4 \text{ min}$.

Q5. Quelle est la nature du mouvement ? Quelle est la distance d_2 parcourue par la cycliste pendant ces 4 min ?

À la distance $d_3 = 20 \text{ m}$ d'un feu rouge, elle ralentit avec une décélération constante a_3 . On note $t = 0$ l'instant auquel elle commence à freiner, et on déplace l'origine O de l'axe (Ox) à l'endroit où elle commence à freiner.

Q6. Exprimer $v_x(t)$ et $x(t)$ pendant cette phase de décélération.

Q7. En déduire la durée t_3 nécessaire pour s'arrêter en fonction de a_3 et v_2 .

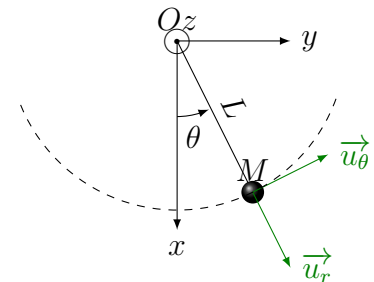
Q8. En déduire l'expression de a_2 puis en calculer sa valeur.

Données : $v_1 = 10,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; $v_2 = 25,2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $a_1 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Exercice n°2 Pendule 🎵

On considère un pendule de longueur L constante, oscillant autour de Oz , dans le plan Oxy .

On étudie le mouvement du point M accroché à l'extrémité du pendule.



Q1. Quel est le mouvement de M dans le référentiel lié au repère $Oxyz$? Quel est le système de coordonnées pertinent pour l'étudier ?

Q2. Exprimer le vecteur position.

Q3. Déterminer l'expression du vecteur vitesse du pendule en fonction de $\dot{\theta}$ et L .

Q4. En déduire l'expression de son vecteur accélération en fonction de $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ et L .

Exercice n°3 Trajectoire 🎵

Un point M décrit un mouvement d'équations paramétriques
$$\begin{cases} x(t) = \alpha \cos(\omega t) \\ y(t) = \beta \sin(\omega t) \end{cases}$$
 où α , β et ω sont des constantes positives.

Q1. Quelle est la nature de la trajectoire ? Tracer l'allure de la trajectoire. Quelle est la période de rotation ?

Q2. Exprimer les vecteurs vitesse \vec{v} et accélération \vec{a} en coordonnées cartésiennes.

Q3. Exprimer les normes du vecteur vitesse et du vecteur accélération à l'instant $t = \frac{\pi}{4\omega}$.

Exercice n°4 Centrifugeuse 🎵

Les astronautes subissent régulièrement des accélérations de $2g$ à $9g$ (avec $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, l'accélération de la pesanteur terrestre), qu'une personne non entraînée ne pourrait supporter.

Pour s'habituer à ces accélérations, Sophie Adenot, astronaute française de l'ESA (qui va se rendre à bord de l'ISS au printemps 2026), s'est entraînée dans la centrifugeuse de la NASA.

Le bras en rotation est de diamètre $D = 17,6 \text{ m}$, et tourne autour d'un axe vertical passant par le centre du bras.



La centrifugeuse respecte les deux contraintes suivantes :

- En régime permanent de rotation, la norme maximale de l'accélération doit être de $10 \times g$.
- Lors du démarrage, le bras doit atteindre $\omega_f = 30 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1}$ en $t_f = 1 \text{ min}$.

On étudie le mouvement de l'astronaute dans le référentiel terrestre.

- Q1. Représenter un schéma avec l'astronaute, la base d'étude adaptée ici, et les notations nécessaires.
- Q2. Exprimer le vecteur accélération de l'astronaute A lorsque le bras tourne à vitesse angulaire ω_1 constante.
En déduire la norme a de l'accélération.
- Q3. Où est-elle maximale ?
En déduire la valeur de ω_1 (en rad/s puis en tours/min), et de la norme de la vitesse v_1 de l'astronaute quand l'accélération vaut $10g$.
- Q4. Représenter sur le schéma les vecteurs vitesse et accélération durant cette phase.

On s'intéresse à la phase de démarrage.

- Q5. Exprimer le vecteur accélération de l'astronaute A lors du démarrage.
- Q6. On suppose que l'accélération angulaire est constante $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$.
Exprimer $\omega(t)$ au cours de la phase d'accélération en fonction de α et t .
- Q7. Déterminer la valeur de α pour que la condition citée soit vérifiée.
- Q8. Représenter sur le schéma les vecteurs vitesse et accélération durant cette phase.

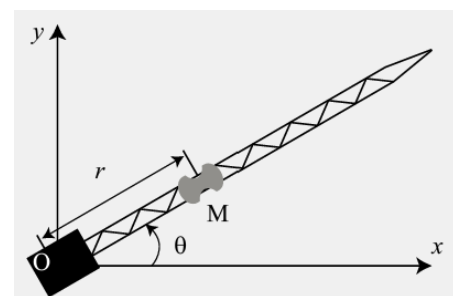
II Exercices d'approfondissement

Exercice n°5 Grue 🎵 🎵

Le bras d'une grue tourne dans un plan horizontal (Oxy) à la vitesse angulaire constante ω_0 . Sur ce bras, un chariot se déplace à vitesse constante v_0 . À l'instant initial, le chariot se trouve au centre de rotation O du bras. L'axe (Ox) est fixe par rapport au sol et confondu avec le bras de la grue à l'instant initial.

Le mouvement est observé depuis le sol. Les équations horaires du chariot

dans le repère polaire $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont donc
$$\begin{cases} r(t) = v_0 t \\ \theta(t) = \omega_0 t \end{cases}$$



- Q1. Déterminer l'expression de la trajectoire $r(\theta)$.
- Q2. Calculer r pour $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}, 2\pi, 9\frac{\pi}{4}$.
Tracer qualitativement la trajectoire du chariot. Quelle est sa nature ?
- Q3. À partir des équations horaires dans le repère polaire, établir l'expression du vecteur vitesse.
- Q4. Exprimer la vitesse en $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Les tracer sur un schéma.
- Q5. Exprimer la norme de la vitesse pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- Q6. À partir du vecteur vitesse, établir l'expression du vecteur accélération.
- Données : $v_0 = 2,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\omega_0 = \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Exercice n°6 Escalier en colimaçon ♪ ♪

Un escalier en colimaçon (hélicoïdal) est constitué de quatorze marches régulièrement disposées autour d'un pilier central. La figure de gauche (vue de dessus) fait apparaître l'angle de marche $\alpha = 30^\circ$. La figure de droite représente les quatre premières marches et définit la hauteur de marche $H = 20$ cm.

Un usager, assimilé à un point matériel M , monte à l'étage d'une démarche régulière à raison d'une marche par seconde en restant à la distance $r = 60$ cm de Oz . Sur la figure de gauche M_0 est le projeté de M suivant un plan perpendiculaire à Oz . Les croix représentent les positions successives de M_0 , pointées lorsque l'utilisateur est sur une marche.

Nous désirons étudier le mouvement de M dans le référentiel \mathcal{R} lié à l'escalier et repéré par (O, x, y, z) .

Q1. Estimer la dérivée temporelle \dot{z} de la cote z du point M . Le mouvement est-il accéléré suivant Oz ? Proposer une expression de $z(t)$ sachant que $z = 0$ à l'instant $t = 0$

Nous nous intéressons à la rotation de M_0 autour du pilier central sachant que $\theta(0) = \theta_0 = -30^\circ$ à l'instant $t = 0$.

Q2. Qualifier le mouvement de M_0 . Donner une valeur numérique de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

Q3. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération de M_0 par rapport à \mathcal{R} . Calculer sa vitesse.

Q4. Quel est le lien entre \dot{z} et $\dot{\theta}$?

Q5. Exprimer, dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, les vecteurs vitesse et accélération de M par rapport à \mathcal{R} .

Exercice n°7 Vitesse d'un point à la surface de la Terre ♪ ♪ ♪

Q1. Que vaut la latitude (approximative) de Valence?

Q2. Quel mouvement décrit un point fixe de la Terre dans le référentiel géocentrique?

Q3. Exprimer le vecteur vitesse d'un point à la surface de la Terre dans le référentiel géocentrique.

Q4. Calculer la vitesse due à la rotation de la Terre d'un point à la surface de la Terre au niveau de Valence dans le référentiel géocentrique. On rappelle que le rayon de la Terre vaut $R_T = 6370$ km.

Q5. Exprimer puis calculer numériquement l'accélération d'un point fixe situé à Valence.

Exercice n°8 Freinages par frottement ♪ ♪ ♪

On considère un objet assimilé à un point matériel M susceptible de se déplacer selon l'axe Ox .

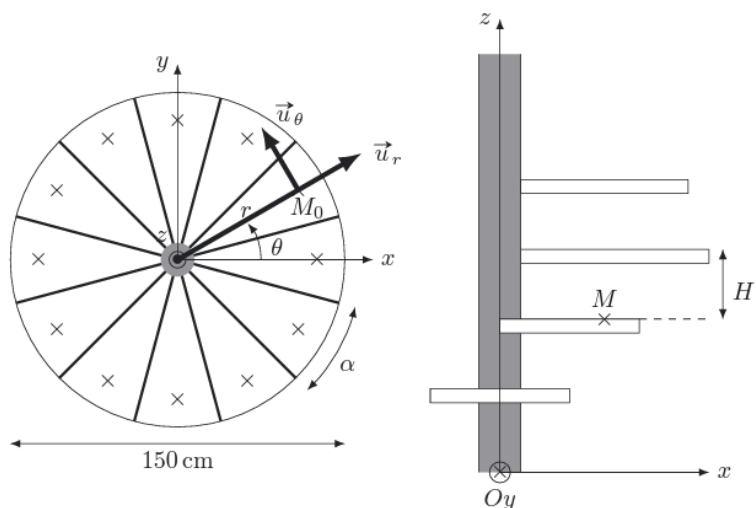
À $t = 0$, il se trouve en O et son vecteur vitesse vaut $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ avec $v_0 = 1,0$ m · s⁻¹.

Q1. L'objet subit une force de frottement solide de sorte que son vecteur accélération $\vec{a}(M)$ peut être supposé constant et égal à $\vec{a}_0 = -a_0 \vec{u}_x$ avec $a_0 = 1,0$ m · s⁻², jusqu'à son arrêt.

Déterminer sa vitesse $v_x(t)$ et sa position $x(t)$ au cours du temps ainsi que la distance totale parcourue.

Q2. L'objet subit une force de frottement fluide de sorte que son vecteur accélération $\vec{a}(M)$ est relié à sa vitesse $\vec{v}(M)$ par la relation $\vec{a}(M) = -\alpha \vec{v}(M)$ avec $\alpha = 0,10$ s⁻¹.

Déterminer sa vitesse $v_x(t)$ et sa position $x(t)$ au cours du temps ainsi que la distance maximale parcourue.



III Extrait du cahier d'entraînement de physique-chimie

Déplacements rectilignes



Entraînement 10.1 — Distance et temps de parcours.



Une voiture se déplace en ligne droite à $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Toutes les réponses seront exprimées en « heures-minutes-secondes », par exemple « 2 h 32 min 12 s ».

a) Combien de temps faut-il à cette voiture pour parcourir 100 km ?

b) Quel serait l'allongement du temps de trajet si elle roulait à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?



Entraînement 10.2 — Distance parcourue.



Une voiture se déplace en ligne droite. Initialement à l'arrêt, elle subit une accélération constante valant a_0 pendant une durée τ_1 , puis continue à vitesse constante pendant une durée τ_2 .

a) Quelle est la vitesse v_1 du véhicule à la date $t = \tau_1$?

b) Quelle est la distance parcourue durant τ_1 ?

c) Quelle est la distance totale parcourue en fonction de a_0 , τ_1 et τ_2 ?



Entraînement 10.3 — Longueur d'une piste de décollage.



Pour décoller un avion doit atteindre la vitesse de $v_d = 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en bout de piste.

Quelle est la longueur minimale L de la piste de décollage si l'avion accélère uniformément à la valeur $a = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

(a) 300 m

(b) 450 m

(c) 500 m

(d) 650 m

.....



Entraînement 10.4 — Distance de freinage.



Une voiture roule à $110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en ligne droite. En supposant que les freins imposent une décélération constante de norme $a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, déterminer la distance d'arrêt de la voiture.

(a) 37,8 m

(b) 46,7 m

(c) 55,9 m

(d) 63,5 m

.....

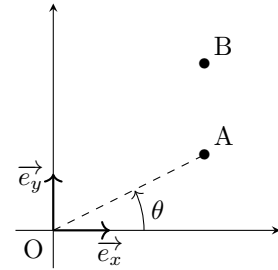
Coordonnées et projections de vecteurs

Entraînement 10.5 — Composantes de vecteurs.



On considère deux points A et B tels que la droite (AB) est parallèle à la droite (Oy). Le vecteur \vec{OA} fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Exprimer les composantes des vecteurs suivants dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de $a = \|\vec{OA}\|$, $b = \|\vec{AB}\|$ et de l'angle θ .



a) \vec{OA}

b) \vec{OB}

c) $\vec{OA} + \vec{OB}$

d) $\vec{OA} - \vec{OB}$

Entraînement 10.6 — Les coordonnées cylindriques.

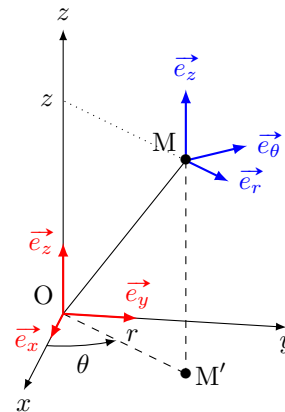


On considère le schéma ci-contre, dans lequel

- la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- et la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

sont définies.

Le point M est repéré par la donnée de r , θ et z .



a) Écrire le vecteur $\vec{OM'}$ dans la base cartésienne

b) Écrire le vecteur $\vec{OM'}$ dans la base cylindrique

c) Écrire le vecteur \vec{OM} dans la base cartésienne

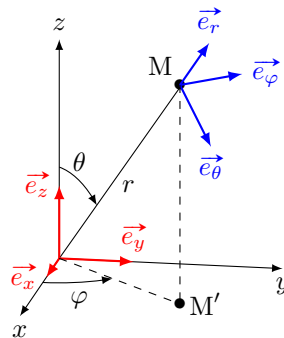
d) Écrire le vecteur \vec{OM} dans la base cylindrique



Entraînement 10.7 — Les coordonnées sphériques.



On considère le schéma ci-dessous, dans lequel la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sont définies.



Le point M est repéré par la donnée de r , θ et φ .

a) Écrire la norme de $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de r et θ

b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ dans la base cartésienne

c) Écrire le vecteur \overrightarrow{OM} dans la base cartésienne

d) Écrire le vecteur \overrightarrow{OM} dans la base sphérique

e) Écrire le vecteur \vec{e}_z dans la base sphérique



Entraînement 10.8 — Jouons au tennis.



Un élève regarde un match de tennis. Il filme un des échanges et décide d'étudier le mouvement de la balle pour en déduire sa vitesse et son accélération.

Pour cela, il utilise un logiciel d'exploitation de vidéo et remplit le tableau suivant :

t (en s)	0	0,05	0,10	0,15	0,20
x (en m)	0	0,35	0,70	1,05	1,40
y (en m)	1,5	2,09	2,66	3,21	3,74

a) Déterminer la vitesse v_0 (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) de la balle à l'instant initial

b) Déterminer l'accélération (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) de la balle à l'instant initial

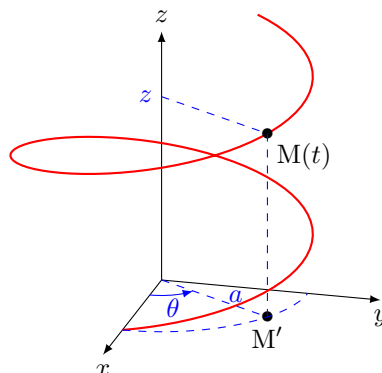
Dérivée de vecteurs

Entraînement 10.9 — Étude d'un mouvement hélicoïdal.



Le point matériel M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrit une trajectoire hélicoïdale, définie par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \times \cos(\omega t) \\ y(t) = a \times \sin(\omega t) \\ z(t) = b \times t. \end{cases}$$



a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ dans la base cartésienne

b) Déterminer la norme de la vitesse

c) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$ dans la base cartésienne

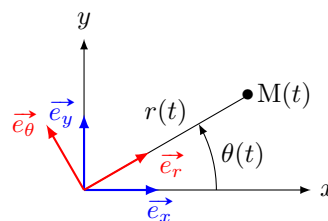
d) Déterminer la norme de l'accélération

Entraînement 10.10 — Dérivation des vecteurs unitaires de la base polaire.



On considère un point M(t) en mouvement dans le plan (xOy).

On note $r(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées de M(t) dans le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.



a) Exprimer le vecteur \vec{e}_r dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

b) En déduire la dérivée $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

c) Exprimer le vecteur \vec{e}_x dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

d) Exprimer le vecteur \vec{e}_y dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

e) En déduire l'expression de la dérivée $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ dans la base polaire



Entraînement 10.11 — Calcul d'une vitesse en coordonnées polaires.



On considère un point M dont les coordonnées polaires sont $\begin{cases} r(t) = a \times t \\ \theta(t) = b \times t^2. \end{cases}$

La vitesse en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{v}(M) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta,$$

où $\dot{r} \vec{e}_r$ est appelée *vitesse radiale* et $r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ *vitesse orthoradiale*.

a) Déterminer la dimension de a

b) Déterminer la dimension de b

c) Déterminer la vitesse radiale en fonction de a

d) Déterminer la vitesse orthoradiale en fonction de a , b et t

e) En déduire l'expression de $\vec{v}(M)$

Entraînement 10.12 — Mouvement en spirale.



Un point M(t) décrit une trajectoire en forme de spirale. Dans le repère polaire (O, \vec{e}_r , \vec{e}_θ), les coordonnées de M(t) sont :

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{-t/\tau} \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$

où r_0 , τ et ω sont des constantes positives.

a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ en coordonnées polaires.

On pourra utiliser la formule donnée dans l'entraînement précédent

L'accélération en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta.$$

b) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$

On donne les valeurs suivantes : $\omega = 4,78 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$, $\tau = 2,0 \text{ s}$ et $r_0 = 4,0 \text{ cm}$.

c) Dans ces conditions, l'accélération est-elle radiale ou orthoradiale?

d) Le mouvement de M est-il accéléré ou décéléré?

e) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire de M

Entre accélération et position

Entraînement 11.8 — Du vecteur position au vecteur accélération.



On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont, à chaque instant $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0t$ et $z(t) = z_0$.

Donner les expressions du vecteur :

a) position

b) vitesse

c) accélération ..

Entraînement 11.9 — Du vecteur accélération au vecteur position.



On considère un point M de masse m en chute libre soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$. Ce point M a été lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ et une position initiale $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donner l'expression des vecteurs :

a) accélération

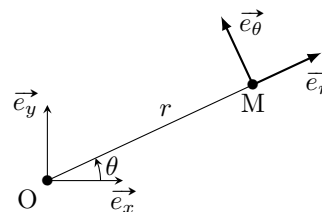
c) position

b) vitesse

Autour des coordonnées polaires

Dans ce paragraphe, on considère un point M repéré par la distance r et l'angle θ en coordonnées polaires. La distance r et l'angle θ dépendent du temps t : le point M est mobile.

On représente la situation par le schéma ci-contre.



Entraînement 11.10 — Trois calculs fondamentaux.



Décomposer dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) les vecteurs :

- a) \vec{e}_r b) \vec{e}_θ

En déduire (en dérivant) l'expression dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) des vecteurs :

- c) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ d) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

En déduire l'expression, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, des vecteurs :

- e) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ f) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

Entraînement 11.11 — Vecteur position en coordonnées polaires.



Comment s'exprime le vecteur position \overrightarrow{OM} en coordonnées polaires ?

- Ⓐ $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta$ Ⓑ $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ Ⓒ $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ Ⓓ $\overrightarrow{OM} = \theta\vec{e}_\theta$

.....

Entraînement 11.12 — Accélération en coordonnées polaires.



Déduire de ce qui précède l'expression, en fonction de \vec{e}_r et de \vec{e}_θ :

- a) du vecteur vitesse \vec{v}

- b) du vecteur accélération \vec{a}