Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)
Chapitre n°11 Lois de Newton

Isaac Newton (1643 - 1727) : physicien, mathématicien et philosophe anglais, surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, aussi appelée « mécanique newtonienne », à partir des trois lois universelles du mouvement et de la loi universelle de la gravitation.

Pré-requis

- Seconde : Thème Mouvement et interactions
  - Modélisation d'une action par une force. Caractéristiques d'une force. Exemples de forces : force d'interaction gravitationnelle ; poids ; force exercée par un support et par un fil.
  - Principe des actions réciproques.
  - Principe d'inertie.
- Première : Thème Mouvement et interactions
  - Interactions fondamentales et introduction à la notion de champ : Force de gravitation et champ de gravitation.
- Terminale : Thème Mouvement et interactions
  - Centre de masse d'un système. Référentiel galiléen. Équilibre d'un système.
  - Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme.
- PCSI : Thème Mouvement et interactions
  - Chapitre n°12 : Description et paramétrage du mouvement d'un point

Objectifs du chapitre

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la cinématique, c'est-à-dire à la description du mouvement, sans se préoccuper des causes. Ce chapitre traite de la dynamique, qui fait le lien entre les causes du mouvement, les actions mécaniques exercées sur le système, et le mouvement du système.

— Énoncer les lois de Newton.

— Étudier différents mouvements.

Plan du cours

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – 🙂 – ☹ – Définir le centre d'inertie.

2 – 🙂 – ☹ – Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points en fonction de la masse totale et du vecteur vitesse du centre d'inertie.

3 – 🙂 – ☹ – Définir référentiel galiléen – Énoncer le principe d'inertie.

4 – 🙂 – ☹ – Énoncer la 3e loi de Newton.

5 – 🙂 – ☹ – Énoncer le principe fondamental de la dynamique.

6 – 🙂 – ☹ – Donner la méthode de résolution d'un exercice de mécanique.

7 – 🙂 – ☹ – Donner les expressions de la force gravitationnelle et du poids.

8 – 🙂 – ☹ – Étudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement : établir les équations horaires et l'équation de la trajectoire.

9 – 🙂 – ☹ – Étudier le mouvement d'un système soumis à une force de frottement fluide : établir l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse, en déduire la vitesse limite. Établir une équation équation adimensionnée.

10 – 🙂 – ☹ – Modéliser le comportement élastique d'un matériau par la loi de Hooke. Donner les limites de cette loi.

11 – 🙂 – ☹ – À partir des lois de Coulomb sur le frottement, déterminer : une condition d'équilibre (sur une pente par exemple) ; une distance de freinage ; l'équation du mouvement.

12 – 🙂 – ☹ – Établir l'équation du mouvement du pendule simple.
Linéariser l'équation différentielle obtenue. Commenter.

I Cadre de l'étude et lois générales de la dynamique

I.1 Système

Les systèmes étudiés dans ce chapitre sont soit assimilés à des **points matériels** (de taille très petite par rapport aux obstacles rencontrés), soit des **solides en translation dont on décrira le mouvement du centre de masse**.

I.2 Référentiel galiléen et principe d'inertie

Capacité exigible : **Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.**

Définition

- Un **point matériel est isolé** s'il n'est soumis à aucune action mécanique extérieure.
- Un **point matériel est pseudo-isolé** s'il est soumis à des actions mécaniques extérieures qui se compensent, c'est-à-dire de résultante nulle.

Énoncé du principe d'inertie – définition des référentiels galiléens

Il existe une classe privilégiée de référentiels, appelés **référentiels galiléens**, dans lesquels un point matériel isolé ou pseudo-isolé persévère dans un mouvement rectiligne uniforme.

À retenir

Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Exemples :

— Le **référentiel terrestre** peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durées très petites devant 24 h et sur des distances très petites devant le rayon de la Terre. Il sera utilisé pour étudier le mouvement d'objets à la surface (ou à proximité) de la Terre.

— Le **référentiel géocentrique** peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durées très petites devant 1 année. Il sera utilisé pour étudier le mouvement des satellites autour de la Terre. Le phénomène des marées s'explique par la nature non galiléenne du référentiel géocentrique.

— Le **référentiel héliocentrique** peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durées allant jusqu'à plusieurs millions d'années. Pour l'instant, aucune expérience n'a mis en évidence le caractère non galiléen de ce référentiel.

I.3 Actions mécaniques

I.3.a) Actions mécaniques et forces

Définition : Actions mécaniques et forces

- Les **actions mécaniques** sont l'ensemble des causes subies par un système de la part d'autres systèmes pouvant modifier, provoquer ou empêcher son mouvement. Elles peuvent également déformer l'objet.
- Les actions mécaniques peuvent être à distance (poids, action exercée par un aimant) ou de contact (frottement, réaction du support).
- Les forces sont représentées mathématiquement par des **vecteurs**. Une force est donc caractérisée par son point d'application, sa direction, son sens et son intensité (la norme du vecteur). Elles s'expriment en Newton (N).
- Les **forces ne dépendent pas du référentiel** et sont additives, c'est-à-dire un système soumis à deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ est soumis à la résultante $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$

I.3.b) Réaliser un bilan des actions mécaniques

Capacité exigible : Établir un bilan des forces sur un système, ou plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur une figure.

Méthode

Après avoir **défini le système étudié et précisé le référentiel d'étude**, il est nécessaire de

— **réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures subies par le système étudié** ;

— **représenter les forces sur un schéma**, pour cela, prendre l'habitude de faire des GRANDS schémas avec des angles positifs, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et non égaux à $\frac{\pi}{4}$.

I.3.c) Principe des actions réciproques

À connaître : Principe des actions réciproques

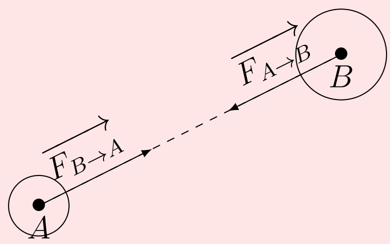
Soient deux corps A et B en interaction :

— le corps A exerce sur B la force $\overrightarrow{F_{A\to B}}$;

— le corps B exerce sur A la force $\overrightarrow{F_{B\to A}}$.

Les forces $\overrightarrow{F_{A\to B}}$ exercée par A sur B et $\overrightarrow{F_{B\to A}}$ exercée par B sur A sont :

- portées par la droite (AB) : $\overrightarrow{F_{B\to A}} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$;
- opposées : $\overrightarrow{F_{B\to A}} = -\overrightarrow{F_{A\to B}}$



I.4 Masse et centre d'inertie

I.4.a) Masse

<u>Capacité exigible</u> : Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé.

En physique, la masse est une **grandeur physique positive intrinsèque d'un corps**. En physique newtonienne, qui est le cadre de notre étude, c'est une **grandeur extensive**, c'est-à-dire que la masse d'un corps formé de parties est la somme des masses de ces parties. Elle est **conservative**, c'est-à-dire qu'elle **reste constante pour un système fermé** n'échangeant pas de matière avec son environnement.

L'**unité de masse** est le **kilogramme** dans le Système international d'unités (SI).

I.4.b) Centre d'inertie d'un système de points

<u>Capacité exigible</u> : Énoncer la définition du barycentre. Utiliser son associativité. Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène.

Définition : centre d'inertie

On définit le **<u>centre d'inertie G</u>** d'un système de points $\mathcal{S} = \{M_i(m_i)\}_{i\in[1,n]}$ par :

$$\forall \text{ point } O \quad \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i\overrightarrow{OM_i}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i\overrightarrow{GM_i}\right)$$

G est le barycentre des points M_i affectés des coefficients m_i.

Exercice de cours A

Q1. Déterminer la position du centre d'inertie G d'un système de deux masse m_1 et m_2, avec $m_1 = m$ et $m_2 = 2m$.

Q2. Déterminer la position du centre d'inertie G d'une tige cylindrique de rayon R, de longueur L et de masse m répartie uniformément.

I.5 Quantité de mouvement et principe fondamental de la dynamique

I.5.a) Quantité de mouvement d'un point matériel

Définition : Quantité de mouvement d'un point matériel

La **quantité de mouvement** d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ est définie par :

$$\overrightarrow{p(M/\mathscr{R})} = m\,\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$$

$\left\|\overrightarrow{p(M/\mathscr{R})}\right\|$ s'exprime en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

I.5.b) Quantité de mouvement d'un système de points

Définition : Quantité de mouvement d'un système de points

La **quantité de mouvement d'un système $\mathcal{S}$ de points $\{M_i(m_i)\}_{i\in[1,n]}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$** est la somme des quantités de mouvement de chaque point dans $\mathscr{R}$:

$$\overrightarrow{p(\mathcal{S}/\mathscr{R})} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{p(M_i/\mathscr{R})} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{v(M_i/\mathscr{R})}$$

Capacité exigible : **Établir l'expression de la quantité de mouvement d'un système restreint au cas de deux points sous la forme $\vec{p} = m\overrightarrow{v(G/\mathscr{R})}$.**

À maîtriser : Quantité de mouvement d'un système de points

On considère un système constitué de deux points matériels $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$.

Q1. Exprimer la quantité de mouvement du système en fonction des vecteurs positions $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$.

Démonstration :

Soit $\mathcal{S} = (M_1(m_1), M_2(m_2))$: $\vec{p}(\mathcal{S}/\mathscr{R}) = m_1\vec{v}(M_1/\mathscr{R}) + m_2\vec{v}(M_2/\mathscr{R})$

Q2. En utilisant la définition du centre d'inertie, établir que $\overrightarrow{p(\mathcal{S}/\mathscr{R})} = m\overrightarrow{v(G/\mathscr{R})}$, avec m la masse totale du système, soit $m = m_1 + m_2$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\vec{p}(\mathcal{S}/\mathscr{R}) &= m_1\vec{v}(M_1/\mathscr{R}) + m_2\vec{v}(M_2/\mathscr{R})\\
\vec{p}(\mathcal{S}/\mathscr{R}) &= m_1\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}\\
\vec{p}(\mathcal{S}/\mathscr{R}) &= \frac{\mathrm{d}m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}\\
\text{or } (m_1+m_2)\overrightarrow{OG} &= m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\vec{p}(\mathcal{S}/\mathscr{R}) = \frac{\mathrm{d}m\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t} = m\vec{v}(G/\mathscr{R})}$

À retenir : Quantité de mouvement d'un système de points

La **quantité de mouvement d'un système $\mathcal{S}$ de masse m et de centre d'inertie G** dans le référentiel $\mathscr{R}$ s'écrit

$$\overrightarrow{p(\mathcal{S}/\mathscr{R})} = m\,\overrightarrow{v(G/\mathscr{R})}$$

I.6 Principe fondamental de la dynamique

À retenir : Théorème de la quantité de mouvement

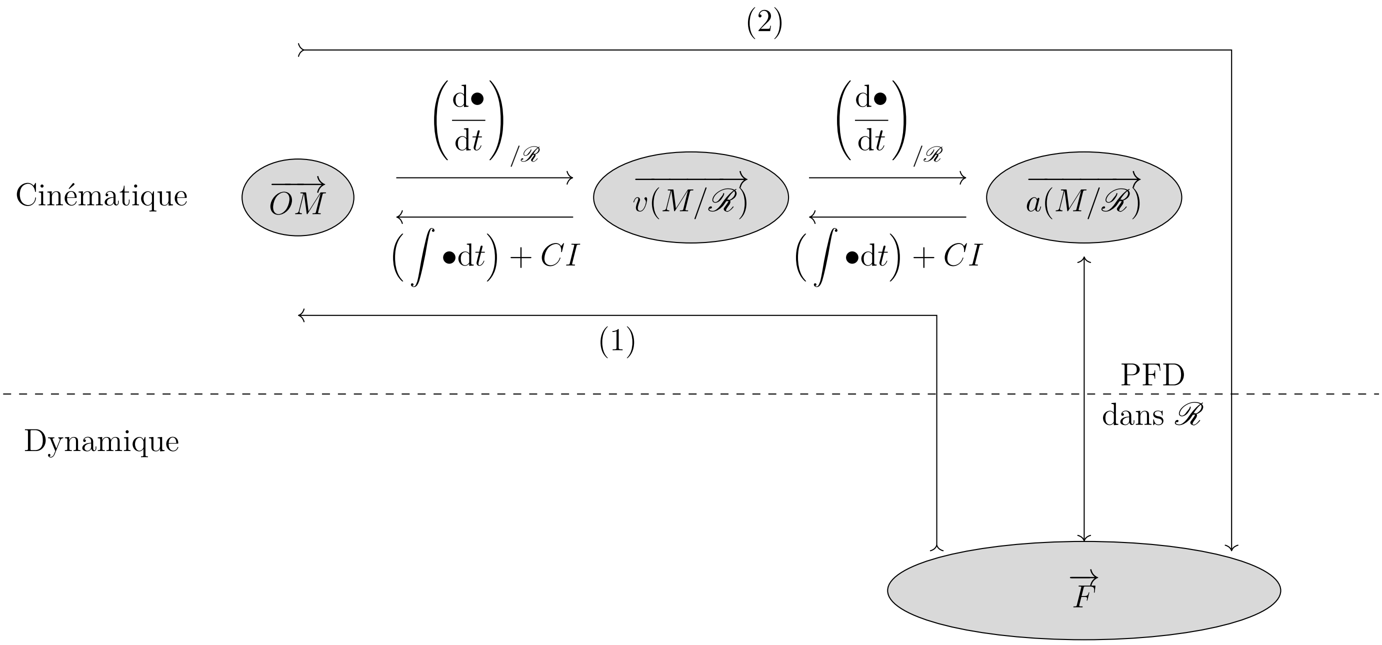
Soit un système $\mathcal{S}$, dont on étudie le mouvement dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen.
Le **théorème de la quantité de mouvement** ou **Principe Fondamental de la Dynamique** exprime que la dérivée temporelle de la quantité de mouvement du système $\mathcal{S}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ galiléen est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{p(\mathcal{S}/\mathscr{R})}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}\left(m\,\overrightarrow{v(G/\mathscr{R})}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$$

Pour un système $\mathcal{S}$ fermé, de masse m constante, on peut l'écrire sous la forme :

$$m\,\overrightarrow{a(G/\mathscr{R})} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$$

avec $\overrightarrow{p(\mathcal{S}/\mathscr{R})}$ la quantité de mouvement du solide et $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$ la résultante des forces extérieures au système.
La loi de la quantité de mouvement pour un solide permet de déterminer le mouvement de son centre d'inertie G, de la même façon qu'on étudiait le mouvement d'un point matériel.



(1) : Si la résultante des forces exercées sur M est connue, on peut remonter au vecteur vitesse $\overrightarrow{a(M/\mathscr{R})}$, puis au vecteur position $\overrightarrow{OM}$
(2) : Si le mouvement est connu, c'est-à-dire $\overrightarrow{OM}$ ou $\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}$ ou $\overrightarrow{a(M/\mathscr{R})}$ connu, on peut déterminer la résultante des forces qui s'exercent sur M

I.7 Résolution d'un problème de mécanique

- *Données :*
  - — Système étudié (objet dont on étudie le mouvement) : $M(m)$;
  - — Conditions initiales : vecteurs position et vitesse initiaux (à l'instant $t = 0$ pris pour origine des temps)
  - — Hypothèses sur le mouvement : frottements ...
- *But* : trouver le mouvement de M dans le référentiel $\mathscr{R}$ à tout instant t, ou déterminer l'expression d'une force « inconnue ».

Méthode

① Définir le **<u>système</u>** étudié (=l'objet dont on étudie le mouvement).

② Préciser le **<u>référentiel d'étude</u>** $\mathscr{R}_g$, ainsi que le repère cartésien $\left(O; \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$ lié au référentiel.
En 1ère année, ce référentiel sera supposé galiléen à l'échelle de l'expérience.

③ Choisir le **<u>système de coordonnées adapté</u>** à la description du mouvement.
Faire un **<u>SCÉMA clair</u>** et de taille suffisante sur lequel vous représentez le système, le référentiel $\mathscr{R}_g$ et la base choisie.
Introduire les notations nécessaires associées aux grandeurs utiles dont seules les valeurs sont fournies (par exemple : m pour la masse, v_0 pour la vitesse initiale).

④ Faire un **<u>bilan des actions mécaniques</u>** précis et complet : les nommer et en donner leurs expressions.
<u>Représenter toutes les forces</u> sur le schéma précédent.
⚠ Attention à ne pas oublier les forces de liaison (réaction du support notamment).

⑤ Écrire « J'**<u>applique le Principe Fondamental de la Dynamique</u>** au système dans le référentiel terrestre / du laboratoire galiléen ». *(D'autres méthodes seront vues dans la suite du cours de mécanique, on verra que certaines sont plus adaptées selon le problème posé.)*

⑥ **<u>Projeter les équations vectorielles</u>** dans la base associée au système de coordonnées choisi pour repérer M.

⑦ Déterminer l'**expression littérale** de la grandeur demandée (force, équations horaires, équation de la trajectoire...) en prenant garde à **vérifier l'homogénéité**.
On fait enfin l'éventuelle application numérique, sans omettre l'**unité**.

Méthode : Schémas

Les schémas doivent toujours :

- — être grands ;
- — avec la base de projection adaptée (cartésienne, polaire, cylindrique ou sphérique) représentée ;
- — avec toutes les forces dont on connait les caractéristiques représentées dessus ;
- — les angles doivent être :
  - — positifs,
  - — compris entre 0 et 90 ° ,
  - — et très différents de 45 ° (sinon le cos et le sin ont la même valeur et vous risquez de les confondre lors des projections).

Attention

Même si vous avez des valeurs numériques dans un énoncé, il ne faut JAMAIS remplacer les grandeurs (m, v_0 ...) par leurs valeurs numériques dans le calcul (exclusivement à la fin pour l'A.N. : dernière ligne !)

II Mouvements dans le champ de pesanteur terrestre uniforme

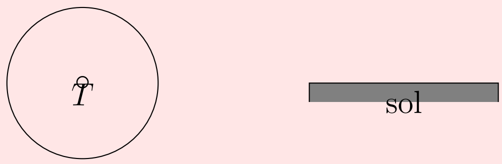
II.1 Interaction gravitationnelle et poids

À proximité de la Terre, un point M de masse m subit la force gravitationnelle exercée par la Terre : $\overrightarrow{F_{T\to M}} = -G\dfrac{mM_T}{TM^2}\dfrac{\overrightarrow{TM}}{TM}$, qui est portée par la droite (TM) passant par le centre de la Terre et est dirigée vers le centre de la Terre. En première approximation, et dans le cadre où le référentiel terrestre peut être considéré galiléen à l'échelle des expériences étudiées, nous pouvons **assimiler la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur l'objet au poids de l'objet** *(Cf cours de 2e année PC)*.

À connaître : le poids

Le poids de l'objet de masse m s'écrit $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$, avec $\overrightarrow{g}$ le vecteur champ de pesanteur terrestre. Le poids :

- s'exerce au centre d'inertie de l'objet ;
- est dirigé selon la verticale du lieu considéré ;
- est dirigé vers le centre de la Terre ;
- et est de norme mg, avec à la surface de la Terre, $g \approx 9,8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ (on peut considérer g uniforme jusqu'à des altitudes de quelques kilomètres).



Attention : Ne pas confondre g et G

- G est la constante universelle de gravitation, elle vaut $G = 6,67.10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$, partout dans l'Univers (puisque universelle !)
- g est le champ de pesanteur dont la valeur dépend de l'astre sur lequel on se trouve et la distance à l'astre. Sur terre, g vaut environ $9,8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, mais elle varie d'un point à l'autre du globe (de $9,78\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ à l'équateur à $9,83\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ aux pôles) et avec l'altitude.

II.2 Chute libre

<u>Capacité exigible :</u> **Étudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.**

Exemple de cours à maîtriser : le mouvement parabolique

Soit un ballon de football modélisé par un point matériel M de masse $m = 400$ g, ne subissant que son poids (frottements négligés). On étudie ce système dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On choisit (Oz) la verticale ascendante et (Oxy) le plan horizontal. À $t = 0$, le ballon est lancé depuis l'origine O du repère avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ contenue dans le plan (Oxz) de norme $v_0 = 25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et faisant un angle $\psi = 30°$ avec (Ox).

Q1. Schématiser la situation.

Q2. Au cours du mouvement, que peut-on dire du vecteur accélération ?

Q3. Par intégrations successives, établir les équations horaires du mouvement : $\begin{cases} x(t) & = \\ y(t) & = \\ z(t) & = \end{cases}$

Q4. Établir l'équation cartésienne $z(x)$ de la trajectoire. Dessiner l'allure de la trajectoire. Représenter dessus également le vecteur vitesse et le vecteur accélération à différents instants.

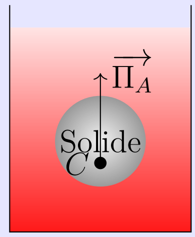
Attention
L'équation différentielle issue du PFD est du second ordre et son intégration conduit donc à l'introduction de deux constantes d'intégration.

II.3 Poussée d'Archimède

Définition : Poussée d'Archimède

Tout corps au repos ou en mouvement dans un fluide subit de la part de ce fluide une action mécanique, la **poussée d'Archimède** (qui est égale à la résultante des forces de pression s'exerçant dessus, *cf partie de statique des fluides en fin d'année*) qui possède les caractéristiques suivantes :

- point d'application : centre de masse du fluide déplacé C (centre de masse du fluide qui occuperait la place du corps s'il n'était pas là) ;
- direction : verticale du lieu considéré (droite passant par le point d'application et le centre de la Terre) ;
- sens : du centre de la Terre vers le point d'application (« vers le haut ») ;
- norme : égale au poids du fluide déplacé $\left\|\overrightarrow{\Pi_A}\right\| = m_{\text{fluide déplacé}}\, g$.



Ainsi la **poussée d'Archimède est opposée au poids du fluide déplacé** : $\overrightarrow{\Pi_A} = -m_{\text{fluide déplacée}}\,\overrightarrow{g}$.
Dans le cas où le fluide est homogène (corps uniquement dans l'eau, ou dans l'air, et pas entre deux fluides), la poussée d'Archimède s'écrit :

$$\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{fluide déplacé}}\,\overrightarrow{g}$$

Cela sera davantage développé dans le chapitre 26 Statique des fluides.

Méthode : Prise en compte de la poussée d'Archimède ?

La poussée d'Archimède s'exerce dans la même direction que le poids et dans le sens opposé, il faut comparer ces deux forces. La poussée d'Archimède s'écrit $\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{fluide déplacé}}\,\overrightarrow{g}$ et le poids $\overrightarrow{P} = \rho_{\text{système}} V_{\text{système}}\,\overrightarrow{g}$, et en général $V_{\text{fluide déplacé}} = V_{\text{système}}$. La poussée d'Archimède peut être négligée devant le poids lorsque la masse volumique du fluide est négligeable devant la masse volumique du système.

- La **poussée d'Archimède peut être négligée** pour un solide plein dans l'air.
- La **poussée d'Archimède ne peut pas être négligée**, pour un solide vide (par ex. ballon de baudruche) dans l'air ou un solide quelconque dans un liquide.

II.4 Frottements fluides

Capacité exigible : **Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée.**

II.4.a) Modèles

Un corps en mouvement dans un fluide subit la force de trainée, ou force de frottement fluide. La trainée a pour direction celle du mouvement, elle est opposée au mouvement et est d'autant plus importante que la vitesse du corps est importante.
Il n'existe pas de « formule théorique » pour la force de frottement fluide. Des études expérimentales ont conduit à deux expressions pour la force de frottement fluide selon la vitesse du corps :

— à « faible vitesse » : $\overrightarrow{f} = -k_1\overrightarrow{v}$, avec $k_1 > 0$;
— à « vitesse élevée » : $\overrightarrow{f} = -k_2\left\|\overrightarrow{v}\right\|\overrightarrow{v}$, avec $k_2 > 0$.

Les coefficients k_1 et k_2 sont déterminés expérimentalement ; ils dépendent du fluide et de l'objet en mouvement (forme et matière).
Le cadre d'utilisation de chaque expression sera précisé en $2^{\text{ème}}$ année dans le cours de mécanique des fluides.

II.4.b) Frottements fluides linéaires

Exemple de cours à maîtriser : Prise en compte des frottements fluides linéaires

Dans un viscosimètre à bille, une bille en acier de rayon $R = 3,0$ mm est lâchée dans un cylindre rempli d'huile (de masse volumique ρ_h).

La mesure du temps de chute Δt entre deux repères distants de d permet d'obtenir la viscosité du liquide.

Pour une sphère de rayon R dans un fluide de viscosité η, la force de frottement fluide est modélisée par la formule de Stokes : $\overrightarrow{f} = -6\pi R\eta\overrightarrow{v}$.

On choisit l'axe (Oz) vertical descendant.

Q1. Effectuer un bilan des forces, on prendra en compte la poussée d'Archimède.

Q2. Établir l'équation différentielle vérifiée par v_z.

Q3. Déterminer la vitesse limite atteinte par la bille.

Q4. Mettre l'équation différentielle précédente sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}v_z = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$$

où on explicitera les expressions de τ et v_{lim} .

Q5. On suppose que la bille a atteint sa vitesse limite entre les deux repères. On mesure $\Delta t = 4,0$ s pour $d = 20$ cm. En déduire la viscosité de l'huile.

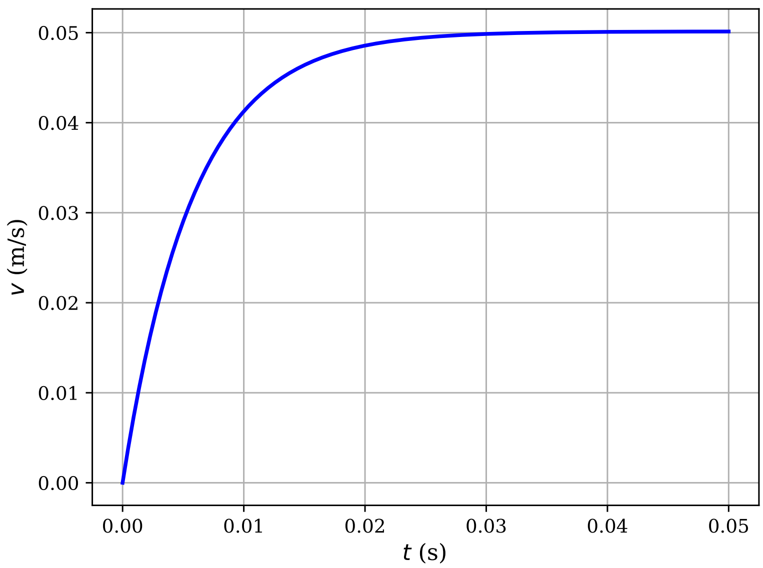
Q6. Calculer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire et commenter.

Données :

— masse volumique de l'huile $\rho_h = 0,90$ kg · m^{-3} ;

— masse volumique de l'acier $\rho_a = 7,8 \cdot 10^3$ kg · m^{-3} ;

— accélération de la pesanteur : $g = 9,81$ m · s^{-2}.



II.4.c) Frottements fluides quadratiques

Exemple de cours à maîtriser : Frottements fluides quadratiques

Pour les mouvements dans l'air, à des vitesses plus élevées, le modèle linéaire ne permet pas de rendre compte des observations expérimentales. Dans ce cas, on utilise le modèle quadratique :

$$\overrightarrow{f} = -\frac{1}{2}\rho C_x S v \overrightarrow{v}$$

où ρ est la masse volumique de l'objet, S l'aire du solide selon la direction perpendiculaire au déplacement. Le coefficient C_x, appelé coefficient de traînée dépend principalement de la forme de l'objet.
Les parachutistes ($m = 80$ kg) peuvent changer leur vitesse en chute libre en changeant la position de leur corps.
On choisit l'axe (Oz) vertical descendant.

Q1. Déterminer l'équation vérifiée par v_z.

Q2. Exprimer la vitesse limite atteinte par le parachutiste.

Q3. En assimilant le parachutiste à un pavé, calculer sa vitesse limite lorsqu'il se place horizontalement, puis lorsqu'il se place verticalement.

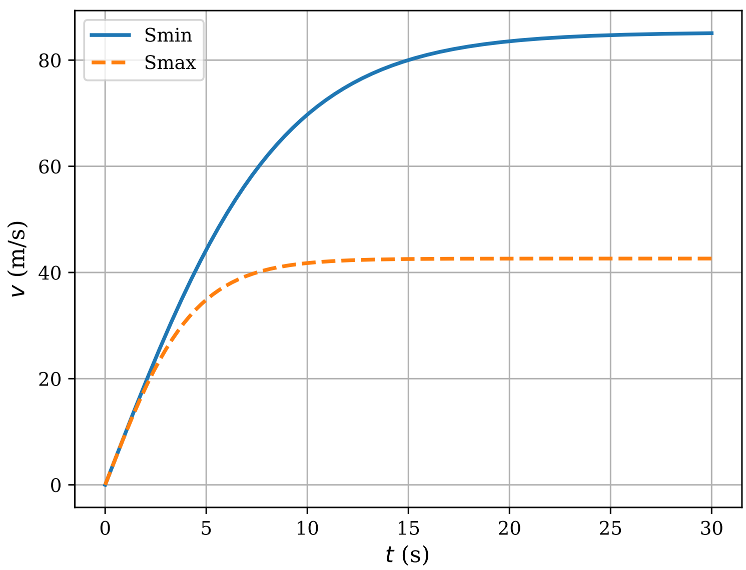
Q4. Il n'est pas possible d'identifier la constante de temps τ dans ce cas. Pour cela, on peut établir une équation différentielle adimensionnée en posant $V^* = \dfrac{v_z}{v_{\text{lim}}}$ et $t^* = \dfrac{t}{\tau}$
Établir l'équation différentielle adimensionnée, vérifiée par V^* et la mettre sous la forme :

$$\tau \frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t} + (V^*)^2 = 1$$

En déduire l'expression et la valeur de la constante de temps τ. Faire l'application numérique.

Données :

- masse volumique de l'air : $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- Coefficient de pénétration dans l'air : $C_x = 0,9$
- Surface du corps : $S_{\text{max}} = 0,8 \text{ m}^2$ et $S_{\text{min}} = 0,2 \text{ m}^2$.



III Le pendule simple

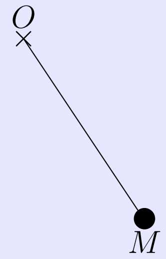
III.1 Tension d'un fil

Définition : Tension du fil

Un fil, infiniment souple, tendu, exerce sur un objet accroché à une de ses extrémités une force de contact, appelée **tension du fil** et notée $\overrightarrow{T}$, dont les caractéristiques sont :

- Direction : celle du fil ;
- Sens : d'une extrémité du fil vers l'autre ;
- Norme : T dépend des autres forces mises en jeu et du mouvement, on la détermine a posteriori une fois le mouvement déterminé.

  Pour un fil idéal, inextensible et de masse négligeable, la norme $\left\|\overrightarrow{T}\right\|$ est uniforme le long du fil.



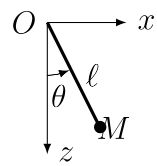
Si le fil n'est pas tendu, la tension est nulle.

III.2 Mouvement du pendule simple

Capacité exigible : Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

Exemple de cours à maîtriser : le pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'un point M de masse m accroché à l'extrémité d'un fil inextensible, sans masse et sans rigidité, dont l'autre extrémité O est fixe dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire galiléen.
On néglige les frottements dus à l'air.



Q1. Quel est le mouvement du point M ? Quel est le système de coordonnées adapté ? Le représenter sur un schéma.

Q2. Faire le bilan des forces et représenter les forces sur le schéma précédent.

Q3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique.

Q4. Sur quel vecteur de la base choisie faut-il projeter le PFD afin d'en déduire l'équation différentielle du mouvement ?
Établir l'équation différentielle du mouvement. Quelle est la nature de cette équation différentielle ?

On se place, dans la suite, dans le cadre des mouvements de petite amplitude : θ reste petit devant 1 rad.

Q5. Linéariser l'équation différentielle dans ce cas. À quel type de système déjà étudié cette année l'équation différentielle correspond-elle ?

Q6. La résoudre avec les conditions initiales suivantes : $\theta(0) = \theta_0$ et $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0}$.

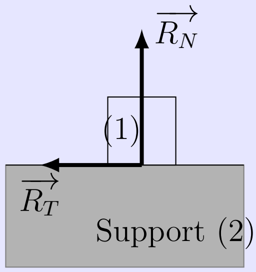
IV Mouvements sur un support solide

IV.1 Réaction du support

Définition : Réaction du support

Lorsque le système étudié repose sur un support solide, le support exerce sur lui une action mécanique, appelée **réaction du support**, que l'on décompose en deux composantes :

- la **réaction normale**, notée $\overrightarrow{R_N}$:
  - de direction : orthogonale au support ;
  - de sens : dirigée du support vers le système ;
  - de point d'application : le point de contact ;
  - de norme : $\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$, qui dépend des autres actions mécaniques en jeu (cf § suivant).
- la **réaction tangentielle (= force de frottement solide)**, notée $\overrightarrow{R_T}$:
  - de direction : tangente au support ;
  - de sens : qui dépend du mouvement du système par rapport à celui du support (cf § suivant) ;
  - de point d'application : le point de contact ;
  - de norme : $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|$,qui dépend des autres actions mécaniques en jeu et du mouvement (cf § suivant).



IV.2 Lois de Coulomb sur le frottement solide

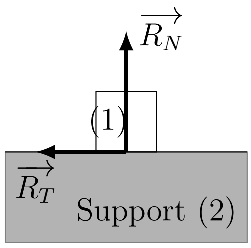
Définition : Vitesse de glissement

On considère un système (1) en translation en contact avec un support (2).

On définit la **vitesse de glissement** du système 1 par rapport au support 2 : $\boxed{\overrightarrow{v_g(1/2)} = \overrightarrow{v(1/\mathscr{R})} - \overrightarrow{v(2/\mathscr{R})}}$

Les **lois de Coulomb du frottement solide** (lois phénoménologiques : obtenues expérimentalement) fournissent une relation entre les composantes tangentielle et normale de la réaction du support.
Elles vous seront systématiquement fournies, vous devez savoir les exploiter.
On considère un système (1) en translation en contact avec un support (2).

La réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ et la réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ exercées par le support sur le système sont reliées par les **lois de Coulomb du frottement** :



- **S'il n'y a pas glissement** : $\overrightarrow{v(1/\mathscr{R})} = \overrightarrow{v(2/\mathscr{R})} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_g(1/2)} = \overrightarrow{0}$, alors $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < f_s \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$, avec f_s le **coefficient de frottement statique** [sans dimension, sans unité].
- **S'il y a glissement du système sur le support** : $\overrightarrow{v(1/\mathscr{R})} \neq \overrightarrow{v(2/\mathscr{R})} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_g(1/2)} \neq \overrightarrow{0}$, alors :
  - $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{R_T} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{v_g(1/2)} \\ \overrightarrow{R_T} \cdot \overrightarrow{v_g(1/2)} < 0 \end{array}\right\}$ $\overrightarrow{R_T}$ est dans le sens opposé au vecteur vitesse de glissement
  - $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_d \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ avec f_d le **coefficient de frottement dynamique** [sans dimension, sans unité].

$\boxed{f_d < f_s}$, mais comme souvent les deux ne sont pas très différents, nous les confondrons la plupart du temps.

REMARQUES

- Un **contact sans frottement**, c'est-à-dire avec un coefficient de frottement $f = 0$, impose une **réaction purement normale**.
- Lorsqu'on cherche à montrer que le contact entre le système et son support est rompu, on peut le déterminer par le fait que $\boxed{\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}\ \textbf{lorsqu'il n'y a plus de contact}}$.

Quelques valeurs de f_d et f_s :

Matériaux	pneus/béton sec	pneus/béton mouillé	bois/bois	Corde/bois	chaussure/glace
f_s	1	0,7	0,5	0,5	0,1
f_d	0,7-0,8	0,5	0,3	0,3	0,05

Attention – Erreur à ne pas commettre

Attention à « poids et réaction du support se compensent » ou « poids et réaction normale du support se compensent » : ceci est faux dans la plupart des cas !

IV.3 Exploitation des lois de Coulomb

Capacité exigible : Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.

Exemple de cours à maîtriser : Freinage

On étudie le mouvement d'une pierre de curling, lancée, à l'instant $t = 0$, à la vitesse $v_0 = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Elle décrit un mouvement rectiligne.
Les frottements dûs à la glace sont modélisés par les lois de Coulomb sur le frottement solide de coefficient de frottement $f = 0,015$.

Q1. Réaliser un schéma de la situation, y placer les axes nécessaires.

Q2. Effectuer un bilan des forces. Les représenter sur le schéma.

Q3. Par application du PFD, exprimer la norme de la réaction normale. En déduire la norme, puis l'expression du vecteur $\overrightarrow{R_T}$.

Q4. Obtenir l'équation du mouvement, puis l'intégrer deux fois pour obtenir l'équation horaire qui donne la position de la pierre en fonction du temps.

Q5. Déterminer l'instant t_f d'arrêt de la pierre, puis la distance parcourue avant son arrêt.

Exemple de cours à maîtriser : Équilibre en présence de frottements solides

Une alpiniste est debout sur la face rocheuse d'une montagne. Les semelles et les talons de ses chaussures ont un coefficient de frottement statique de 0,5.
On souhaite répondre à la question : quelle est la pente maximale du rocher sur lequel l'alpiniste peut se maintenir sans glisser ?

Q1. Réaliser un schéma du problème, sur lequel on indiquera la base adaptée judicieusement placée.

Q2. Après avoir effectuer un bilan des forces, écrire la conséquence de l'équilibre.

Q3. En déduire les expressions des composantes des réactions normale et tangentielle.

Q4. En exploitant la loi de Coulomb, déterminer la condition sur l'angle pour que l'alpiniste puisse ne pas glisser.

Méthode

La mise en œuvre des lois de Coulomb nécessite souvent de faire une hypothèse concernant la présence ou l'absence de glissement, que l'on traduit par une équation assortie d'une condition de validité.

- **Je fais l'hypothèse de non glissement** :
  1. Je connais le mouvement du système : $\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})} = \overrightarrow{v(\text{support}/\mathscr{R})}$ ($= \overrightarrow{0}$ si le support est fixe dans le référentiel d'étude).
  2. En appliquant le PFD, j'en déduis l'expression des forces $\overrightarrow{R_N}$ et $\overrightarrow{R_T}$ (en effet je connais $\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R})$, puisque je connais le vecteur vitesse).
  3. Je vérifie l'hypothèse en comparant $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|$ et $f_s\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$:
     — Si $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < f_s\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$, l'hypothèse est vérifiée : le système ne glisse pas ;
     — Sinon, l'hypothèse n'est pas vérifiée, et il faut supposer que le système glisse sur le support.
- **Je fais l'hypothèse de glissement** :
  1. Je connais la relation entre $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ grâce à la loi de Coulomb : $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f_d\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$.
     Le sens de $\overrightarrow{R_T}$ est opposé au sens de la vitesse de glissement :
     — Si le support est fixe et que le sens du mouvement est connu, le sens de $\overrightarrow{R_T}$ est connu.
     — Si le support est mobile et/ou que le sens du mouvement est inconnu, il en est de même pour $\overrightarrow{R_T}$, et donc il ne faut rien supposer ; le sens de $\overrightarrow{R_T}$ sera déduit de la vérification de l'hypothèse.
  2. En appliquant le PFD, j'en déduis l'expression du vecteur vitesse et du vecteur position.
  3. Je vérifie l'hypothèse en contrôlant que :
     — la vitesse de glissement n'est pas nulle ;
     — et $\overrightarrow{R_T} \cdot \overrightarrow{v_g(1/2)} < 0$, ce qui permet par ailleurs de déterminer le sens de $\overrightarrow{R_T}$ si cela n'était pas possible avant.

Application

À la caisse du supermarché, vous posez sur le tapis votre boîte de céréales préférée. La caissière / le caissier met en route le tapis roulant à une accélération constante $\overrightarrow{a}(T/\mathscr{R}_T) = a_0\overrightarrow{u_x}$ dans le référentiel terrestre.

Q1. Expérimentalement vous constatez que votre boîte ne glisse pas sur le tapis roulant. En déduire l'expression du vecteur vitesse de la boîte de céréales dans le référentiel terrestre.

Q2. Par application du PFD déterminer les composantes R_T et R_N de la réaction du support. Quel est le sens de $\overrightarrow{R_T}$? Interpréter.

Q3. À quelle condition sur le coefficient statique entre le tapis roulant et la boîte de céréales l'hypothèse « la boîte ne glisse pas » est valide ?