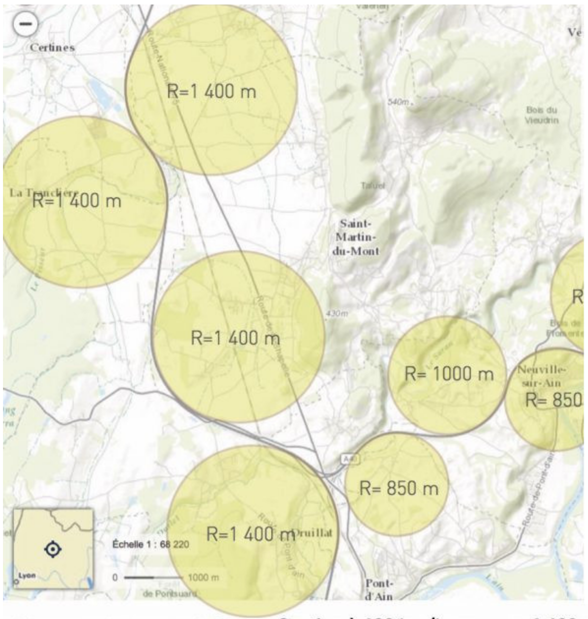
Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

Chapitre n°10 Description et paramétrage du mouvement d'un point



Mesure : Autoroute A40 **Section à 130 km/h : rayon = 1 400 m**
Section à 110 km : rayon > 850 m

Quel est le rayon de courbure minimal des courbes d'une autoroute ? Pourquoi le rayon de courbure des courbes d'une autoroute ne sont-ils pas les mêmes selon la vitesse limite ?

Objectifs du chapitre

— Définir les vecteurs cinématiques : position, vitesse et accélération.

— Décrire les trois systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

— Exprimer les vecteurs cinématiques dans les trois systèmes de coordonnées.

— Étudier quelques mouvements classiques.

Pré-requis

- Seconde. Décrire un mouvement : système, référentiel, relativité du mouvement, position, trajectoire d'un point, vecteur déplacement d'un point, vecteur vitesse d'un point, mouvement rectiligne.
- Première. Mouvement d'un système : vecteur variation de vitesse
- Terminale. Décrire un mouvement : vecteur position, vitesse et accélération d'un point, coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour un mouvement circulaire ; mouvement rectiligne uniformément accéléré, mouvement circulaire uniforme.

Plan du cours

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – 🙂 – 🙁 – Décrire le système de coordonnées cartésiennes. *On attend : la définition des coordonnées cartésiennes d'un point, la définition de la base cartésienne, et le schéma du tout.*

2 – 🙂 – 🙁 – Exprimer le déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes, en déduire les composantes du vecteur vitesse. *On s'appuiera sur un dessin*

3 – 🙂 – 🙁 – Établir les expressions des composantes du vecteur position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes.

4 – 🙂 – 🙁 – Décrire le système de coordonnées cylindriques. *On attend : la définition des coordonnées cylindriques d'un point, la définition de la base cylindrique, et le schéma du tout.*

5 – 🙂 – 🙁 – Exprimer le déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques, en déduire les composantes du vecteur vitesse. *On s'appuiera sur un dessin*

6 – 🙂 – 🙁 – Établir les expressions des composantes du vecteur position, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques.

7 – 🙂 – 🙁 – Décrire le système de coordonnées sphériques. *On attend : la définition des coordonnées sphériques d'un point, la définition de la base sphérique, et le schéma du tout.*

8 – 🙂 – 🙁 – Exprimer le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques. *On s'appuiera sur un dessin*

9 – 🙂 – 🙁 – Pour un mouvement à vecteur accélération constant, établir l'expression du vecteur vitesse et vecteur position en fonction du temps.
Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

10 – 🙂 – 🙁 – Pour un mouvement circulaire uniforme ou non uniforme, établir les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.

11 – 🙂 – 🙁 – Définir la base de Frenet.

12 – 🙂 – 🙁 – Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base de Frenet.

I Cadre de l'étude

I.1 Systèmes : Point matériel et solide

Dans le cours de mécanique, nous étudierons le mouvement de deux types de systèmes : les points matériels et les solides.

Définition : Solide

Un **solide** est un système matériel indéformable dont la distance entre deux points quelconque du système reste constante :

$$\forall\ A,\ B \in \ \text{solide} \quad AB = \text{cste au cours du temps}$$

Exemples : une chaise, une boule de billard
Contre-exemple : une voiture (les roues peuvent tourner indépendamment de la carrosserie, et les distances entre certains points des roues et la carrosserie peuvent varier), un ballon de football, un ressort,...

Quand peut-on assimiler un solide à un point matériel ? Un solide peut être assimilé à un point matériel :

- si ses **dimensions sont très petites** devant l'échelle du problème que l'on étudie. Il n'y a donc pas « d'obstacle » lié à sa dimension, tout se passe comme s'il était ponctuel.
- s'il n'a qu'un **mouvement de translation**, et pas de rotation sur lui-même (ou bien si on ne s'intéresse pas à ce mouvement de rotation). En effet un point ne peut pas avoir un mouvement de rotation sur lui-même puisqu'il n'a pas de dimension dans l'espace : ça n'a pas de sens … Un point ne peut être qu'en mouvement de translation.

Exemple : Dans l'étude du mouvement de la Terre autour du Soleil, on peut considérer la Terre (qui n'est pourtant pas si petite que ça !) comme un objet ponctuel, car son diamètre est négligeable devant les éventuels obstacles (distances interastrales). Mais dans ce cas on étudie uniquement le mouvement du centre d'inertie de la Terre autour du Soleil, et on n'étudie pas le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même.

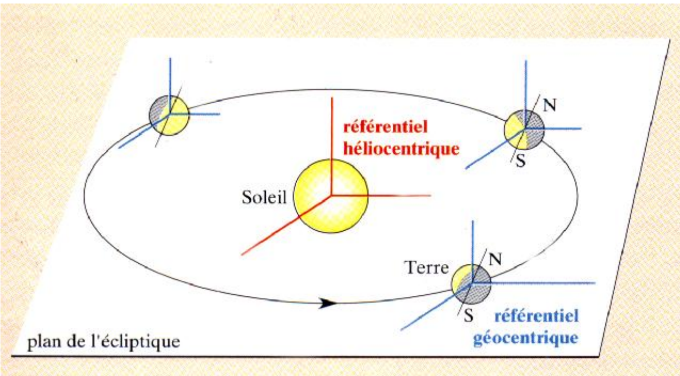
I.2 Référentiel d'observation

Il est nécessaire **avant de commencer à décrire tout mouvement de définir « une référence » de temps et d'espace : c'est le référentiel.**

Définition : Référentiel

Un **référentiel** $\mathscr{R}$ est défini par la donnée :

- d'**un repère d'espace** : c'est un **solide de référence** par rapport auquel on va étudier le mouvement auquel.
  On choisit une origine O (=un point fixe par rapport au solide) et trois axes orthogonaux fixes également par rapport au solide.
- et d'**un repère de temps** : défini par une **horloge** et une origine des temps ($t = 0$).



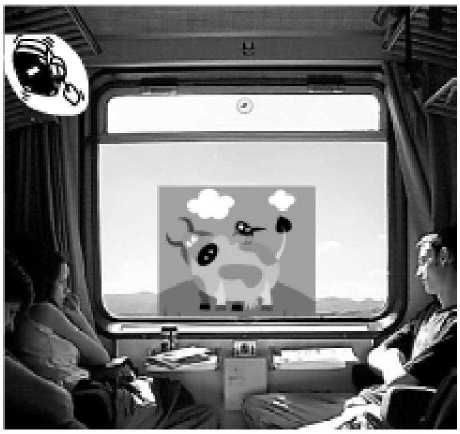
Définitions : Référentiels usuels en mécanique

	Référentiel de Kepler (héliocentrique)	**Référentiel géocentrique**	**Référentiel terrestre** (ou référentiel du laboratoire).
Centre	Centre de gravité S du Soleil (quasiment confondu avec le centre du système solaire) Remarque : Référentiel de Copernic : centre est le centre de gravité du système solaire.	Centre T de la Terre	Un point O à la surface de la Terre.
Axes	Axes Sx, Sy, Sz dirigés vers 3 étoiles lointaines considérées comme fixes.	Axes Tx, Ty, Tz parallèles respectivement à Sx, Sy, Sz (directions fixes, ne suivent pas le mouvement de rotation de la Terre)	Directions fixes suivant la Terre dans son mouvement dont une définissant la verticale au lieu considéré.
Utilisation	Étude des mouvements des planètes autour du Soleil	Étude des mouvements des satellites autour de la Terre	Étude des mouvements à la surface de la Terre

I.3 Cadre de la mécanique classique

I.3.a) Cadre de la mécanique classique

Exemple :
On considère un voyageur dans un train qui a mal calé sa valise dans le casier de rangement. Le train roule à vitesse constante et à un certain moment, la valise tombe.
➪ La nature de la trajectoire est-elle la même pour le voyageur immobile sur son siège et pour la vache immobile dans le pré voisin de la voie ?
➪ La durée de la chute est-elle la même pour le voyageur et pour la vache ?
➪ La taille de la valise, la distance parcourue par la valise est-elle la même pour le voyageur et pour la vache ?



À retenir : Cadre de la mécanique classique

En mécanique classique :

- Le **temps est absolu** : les intervalles de temps sont les mêmes quelque soit le référentiel d'observation.
- Les **distances ont un caractère absolu** : les distances sont les mêmes quelque soit le référentiel d'observation.
- Le **mouvement est relatif**.

I.3.b) Limites de la mécanique classique

- Lorsque les **vitesses « sont proches » de la vitesse de la lumière** (en pratique si $v > c/10$), les lois de la mécanique classique ne rendent plus compte des observations. Il est alors nécessaire de se placer dans le cadre de la **relativité**.
  Le **temps et les longueurs ne sont pas absolus** en relativité : ils dépendent du référentiel dans lequel ils sont mesurés.
  En se limitant au cas où les deux référentiels d'étude sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre (cadre de la relativité restreinte), on observe deux effets qui ne sont pas expliqués par la mécanique classique :
  - **Dilatation des durées.**
    Le temps n'est pas absolu mais relatif.
    Considérons un observateur à bord d'un vaisseau, qui avance à une vitesse v constante par rapport au sol, à bord duquel un signal lumineux est envoyé, perpendiculairement à la direction du mouvement du vaisseau entre deux miroirs. Il mesure une certaine durée Δt_v du trajet.

Un observateur situé au niveau du sol mesure également la durée du trajet Δt_s de la lumière entre les deux miroirs. Entre l'émission et la réception, le vaisseau s'est avancé, et la lumière a donc parcouru une distance plus grande pour l'observateur au sol.

D'après le deuxième postulat de la relativité qui stimule l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide par changement de référentiel, la durée mesurée par l'observateur au sol est supérieure à la durée mesurée par l'observateur à bord du vaisseau : il y a dilatation des durées pour les observateurs situés dans un référentiel en mouvement par rapport à celui où se produisent les événements.

On peut montrer que $\Delta t_s = \dfrac{\Delta t_v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

- **Contraction des longueurs.**

  L'espace non plus n'est pas absolu.

  Un observateur en mouvement par rapport à un objet trouve que la longueur de l'objet, dans la direction du mouvement, est plus courte que la longueur mesurée par un observateur immobile par rapport à l'objet.

■ Lorsque les **distances** mises en jeu (objet, distances caractéristiques du mouvement) deviennent **« faibles »**, c'est-à-dire si elles ne sont pas très grandes devant la longueur d'onde de De Broglie (cf chapitre de mécanique quantique : $\lambda_{\mathrm{dB}} = h/p$, avec h la constante de Planck et p la quantité de mouvement), la mécanique classique ne rend plus compte des observations. Il faut alors utiliser la **mécanique quantique**.
Tout objet physique possède à la fois des caractéristiques corpusculaires (particule) et ondulatoires : c'est la **dualité onde-corpuscule**.
Une particule quantique n'est plus localisée et cela n'a plus de sens de parler de la trajectoire de la particule. L'onde associée à une particule est de longueur d'onde λ_{dB}.

II Décrire un mouvement

Méthode : Avant de commencer un exercice de mécanique, il faut :

1. **Définir précisément le système étudié**. Il s'agit de définir l'objet dont on va étudier le mouvement : il faut savoir de qui/quoi on parle avant de commencer à en parler.
2. **Définir précisément le référentiel d'étude**. Il s'agit de définir précisément par rapport à quoi on étudie le mouvement du système défini précédemment. Il faudra préciser les trois axes liés au référentiel et son origine.
3. **Introduire toutes les notations nécessaires** pour résoudre le problème quand elles n'ont pas été définies dans l'énoncé.

Dans la suite de cette partie, on appelle M le point matériel dont on étudie le mouvement (c'est-à-dire le système), dans le référentiel $\mathscr{R}$. On note O, un point fixe du référentiel $\mathscr{R}$.

II.1 Décrire la position

Définition : Vecteur position

Soit M un point et un référentiel $\mathscr{R}$ dont O est un point fixe.
Le **vecteur position** de M dans $\mathscr{R}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Définition : Équations horaires

Soit un référentiel $\mathscr{R}$ muni d'un repère $(O; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ et M un point repéré par ses coordonnées (x_1, x_2, x_3).

Les **équations horaires** (paramétriques) du point M est la donnée des 3 équations : $\begin{cases} x_1 &= f(t) \\ x_2 &= g(t) \\ x_3 &= h(t) \end{cases}$

Définition : Trajectoire

La **trajectoire** dans un repère d'un point M est la courbe de l'ensemble des positions occupées par M au cours du temps.

II.2 Vecteur vitesse

II.2.a) Définition

Définition : Vecteur vitesse

Le **vecteur vitesse du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$** est le vecteur

$$\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}}$$

Le vecteur vitesse est tangent à chaque instant à la trajectoire du point M.
La norme $\left\|\overrightarrow{v}\right\|$ du vecteur vitesse (souvent notée v) s'exprime en $\mathrm{m.s^{-1}}$

Attention – À ne pas confondre

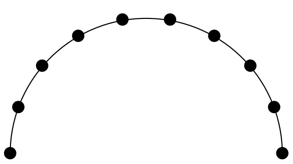
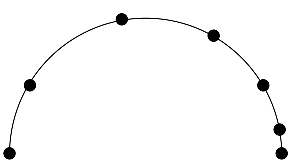
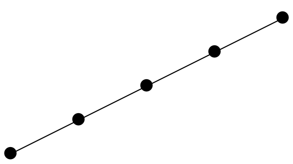
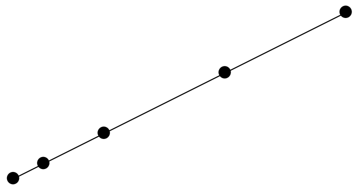
- Il ne faut pas confondre :
  - Le **vecteur vitesse** $\overrightarrow{v}$: il est caractérisé par une direction, un sens et une norme ;
  - La **norme du vecteur vitesse** $\left\|\overrightarrow{v}\right\|$ (souvent notée v) : c'est un scalaire (nombre) nécessairement positif ;
  - Les **composantes du vecteur vitesse** : ce sont des scalaires (nombres) algébriques, pouvant être positifs ou négatifs et qui sont au nombre de 3 pour caractériser le vecteur vitesse dans une base orthonormée directe *(cf poly vecteurs)*.
- La notation « v » est à réserver uniquement pour la norme du vecteur vitesse.
- Parler de « vitesse » n'est pas assez précis. On parlera donc toujours de « **vecteur** vitesse » ou de « **norme du vecteur** vitesse » ou de « **composante selon . . . du vecteur** vitesse ».

II.2.b) Mouvements uniformes

Définition : Mouvements uniformes

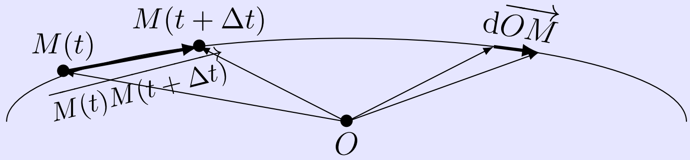
- Un mouvement est **UNIFORME** ssi la **NORME DU VECTEUR VITESSE est constante**.
- Un mouvement est **RECTILIGNE UNIFORME** ssi le **VECTEUR vitesse est constant**.

Exercice de cours A Pour chacun des 4 mouvements proposés ci-dessous, la position a été marquée à intervalle de temps régulier. Au cours de ces mouvements, la norme du vecteur vitesse est-elle constante ? le vecteur vitesse est-il constant ?

			
√ $\left\|\overrightarrow{v}\right\| =$ **cste** ○ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{cst}}$	○ $\left\|\overrightarrow{v}\right\| =$ cste ○ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{cst}}$	√ $\left\|\overrightarrow{v}\right\| =$ **cste** √ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathbf{cst}}$	○ $\left\|\overrightarrow{v}\right\| =$ cste ○ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{cst}}$

II.3 Vecteur déplacement élémentaire

Définition : Vecteur déplacement élémentaire



- Entre t et $t+\Delta t$, le point M se déplace de $\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OM}(t)$.
- Si la durée Δt devient très petite, on définit le **vecteur déplacement élémentaire du point** M, que l'on note $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. Le vecteur déplacement élémentaire est **toujours tangent à la trajectoire**.

À retenir : Lien entre $\mathrm{d}\vec{OM}$ et $\vec{v}(M/\mathscr{R})$

$$\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R}) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}} \Leftrightarrow \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})\mathrm{d}t$$

II.4 Vecteur accélération

Définition : Vecteur accélération

Le **vecteur accélération du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$** est le vecteur

$$\overrightarrow{a(M/\mathscr{R})} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v(M/\mathscr{R})}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{/\mathscr{R}}$$

La norme $\left\|\overrightarrow{a}\right\|$ du vecteur accélération (souvent notée a) s'exprime en m.s^{-2}

Attention – À ne pas confondre

- Il ne faut pas confondre le **vecteur accélération** $\overrightarrow{a}$, la **norme du vecteur accélération** et les **composantes du vecteur accélération**.
- La notation « a » est à réserver uniquement pour la norme du vecteur accélération.
- Parler d'« accélération » n'est pas assez précis. On parlera donc toujours de « **vecteur** accélération » ou de « **norme du vecteur** accélération » ou de « **composante selon … du vecteur** accélération ».

Définitions : Mouvement uniforme

- Un **mouvement est uniforme** dans le référentiel $\mathscr{R}$ ssi la NORME du vecteur vitesse dans $\mathscr{R}$ est constante :

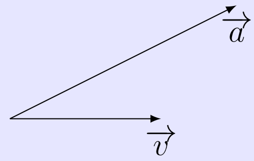
$$\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 = \text{cste} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{v}}$$

- Un **mouvement est rectiligne uniforme** dans le référentiel $\mathscr{R}$ ssi le VECTEUR vitesse dans $\mathscr{R}$ est constant (en direction, sens et norme) :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{constant}} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}}$$

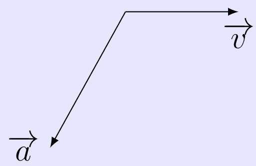
Définitions : Mouvements accéléré et décéléré

- Un **mouvement est accéléré** dans le référentiel $\mathscr{R}$ ssi la NORME du vecteur vitesse dans $\mathscr{R}$ augmente au cours du temps :



$$\left\|\vec{v}\right\| \nearrow \Leftrightarrow \left\|\vec{v}\right\|^2 \nearrow \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\left(\left\|\vec{v}\right\|^2\right)}{\mathrm{d}t} = 2\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} > 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{v}\cdot\vec{a} > 0}$$

- Un **mouvement est décéléré** dans le référentiel $\mathscr{R}$ ssi la NORME du vecteur vitesse dans $\mathscr{R}$ diminue au cours du temps :



$$\left\|\vec{v}\right\| \searrow \Leftrightarrow \left\|\vec{v}\right\|^2 \searrow \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\left(\left\|\vec{v}\right\|^2\right)}{\mathrm{d}t} = 2\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} < 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{v}\cdot\vec{a} < 0}$$

Dans les 3 parties suivantes, nous allons décrire les trois systèmes de coordonnées permettant de décrire le mouvement d'un point.

III Système de coordonnées cartésiennes

III.1 Description du système de coordonnées cartésiennes

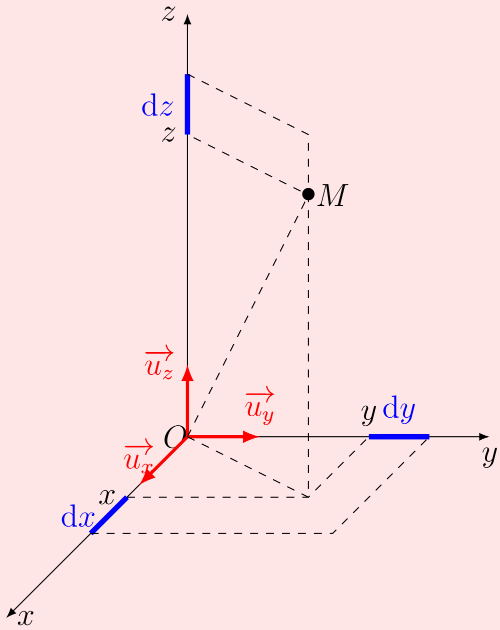
Capacité exigible : Décrire le système de coordonnées cartésiennes.
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cartesiennes.php

À retenir : Système de coordonnées cartésiennes

Cordonnées cartésiennes de M : ce sont les trois distances algébriques x, y, z.

Base cartésienne : $\left(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z}\right)$, base orthonormée directe, **liée** au référentiel $\mathscr{R}$ d'étude, où

- « ortho » : vecteurs orthogonaux deux à deux ;
- « normée » : les trois vecteurs sont de norme 1 $\left\|\vec{u_x}\right\| = \left\|\vec{u_y}\right\| = \left\|\vec{u_z}\right\| = 1$;
- « directe » : $\vec{u_z} = \vec{u_x} \wedge \vec{u_y}$
  La direction du 3e vecteur est donnée avec la règle de la main droite, sur cette main, le pouce représente le 1er vecteur, l'index représente le 2e vecteur et le majeur représente la direction du 3e vecteur.



Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u_x} + y(t)\vec{u_y} + z(t)\vec{u_z}$$

Expression de la norme du vecteur position :

$$OM = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

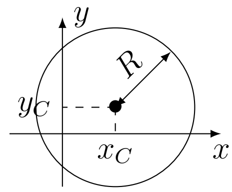
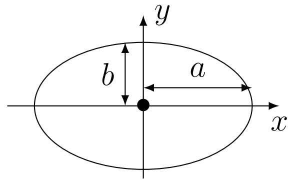
III.2 Exemples de trajectoires

Capacité exigible : Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle. Identifier une ellipse à l'aide de sa représentation paramétrique ($x = a\cos(\omega t), y = b\cos(\omega t - \varphi)$) et la tracer dans les cas particuliers $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ et $\varphi = \pi$.

En coordonnées cartésiennes, la **connaissance complète** du mouvement nécessite la **donnée des équations horaires (paramétriques)** $\begin{cases} x(t) & = \\ y(t) & = \\ z(t) & = \end{cases}$

Il est fréquent, notamment quand le mouvement est plan (à 2 dimensions), que l'on se serve de l'**équation cartésienne de la trajectoire** ($z(x)$ ou $x(y)$ ou ...). Dans ces cas-là, le temps n'apparaît plus dans l'équation : on perd de l'information.

Quelques exemples que vous devez reconnaître : *c'est-à-dire on n'exige pas de vous que vous puissiez donner l'équation cartésienne et/ou les équations horaires associées à une courbe, mais que vous puissiez reconnaître la nature de la trajectoire à partir de l'équation cartésienne et/ou des équations horaires.*

Équations horaires	Équation cartésienne	Nature de la trajectoire
$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) + x_C \\ y(t) = R\sin(\omega t) + y_C \end{cases}$	$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$	Cercle de rayon R et de centre (x_C, y_C). 
$\begin{cases} x(t) = a\cos(\omega t) \\ y(t) = b\cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$	Si $\varphi = \pm\pi/2$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Ellipse de centre O, d'axes (Ox) et (Oy), de demi grand axe a et demi petit axe $b < a$.  Rq : Si $a = b$, on retrouve le cas du cercle.
	Si $\varphi = 0$: $y = \frac{b}{a}x$ Si $\varphi = \pi$: $y = -\frac{b}{a}x$	Droite de pente $\pm b/a$ (pensez au mode XY de l'oscilloscope !)

III.3 Vecteurs vitesse et accélération

Capacité exigible : Établir les composantes du vecteur-vitesse, du vecteur-accélération dans le cas des coordonnées cartésiennes.

À maîtriser : Établir les vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes

R1. Établir l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes.

R2. En déduire l'expression de sa norme.

> **Solution:** Vecteur vitesse de M dans $\mathscr{R}$: $\vec{v}(M/\mathscr{R}) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$, avec $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u_x} + y(t)\vec{u_y} + z(t)\vec{u_z}$.
> Les trois vecteurs de la base cartésiennes sont fixes dans le référentiel d'étude, donc ils sont constants, donc leurs dérivées sont nulles.
> Par conséquent : $\boxed{\vec{v}(M/\mathscr{R})} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{u_x} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{u_y} + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u_z}$
> Norme : $\left\|\vec{v}(M/\mathscr{R})\right\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

R3. Établir l'expression du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes.

R4. En déduire l'expression de sa norme.

Solution: Vecteur accélération de M dans $\mathscr{R}$: $\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R}) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t}$

Soit $\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R}) = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u_x} + \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u_y} + \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u_z}}$

Norme : $\left\|\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R})\right\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

À connaître : Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{v} = \dot{x}\ \overrightarrow{u_x} + \dot{y}\ \overrightarrow{u_y} + \dot{z}\ \overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

$\dot{x}(t)$ est la composante du vecteur vitesse selon $\overrightarrow{u_x}$, ce que l'on note : $v_x(t) = \dot{x}(t)$, c'est une grandeur algébrique qui est positive si le mouvement a lieu dans le sens du vecteur $\overrightarrow{u_x}$, négative si le mouvement a lieu dans le sens opposé au sens du vecteur $\overrightarrow{u_x}$.

À connaître : Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{a} = \ddot{x}\ \overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\ \overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\ \overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$$

$\ddot{x}(t)$ est la composante du vecteur accélération selon $\overrightarrow{u_x}$, ce que l'on note : $a_x(t) = \ddot{x}(t)$, c'est une grandeur algébrique qui peut être positive ou négative.

III.4 Mouvement uniformément accéléré

À maîtriser : Étudier un mouvement de vecteur accélération constant

On considère un point M en mouvement avec un vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ constant : $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{u_y}$, où α est une constante. À $t = 0$, M se trouve en O et a un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$, avec $v_0 > 0$.

R1. Faire un schéma de la situation.

Solution:

R2. Par intégrations successives du vecteur accélération, déterminer les coordonnées du vecteur vitesse puis les équations horaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

Solution:

On intègre par rapport au temps : $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \alpha t + C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$

Or $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u_x}$, donc $C_2 = 0 = C_3$ et $C_1 = v_0$: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \alpha t \\ 0 \end{pmatrix}$

On intègre une deuxième fois : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} v_0 t + C_4 \\ \alpha \dfrac{t^2}{2} + C_5 \\ C_6 \end{pmatrix}$

Or à $t = 0$, le système est à l'origine, donc $x(0) = 0 = y(0) = z(0)$, donc $C_4 = C_5 + C_6 = 0$.

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ \alpha \dfrac{t^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}$

On a les équations horaires : $\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \alpha \dfrac{t^2}{2} \\ z(t) = 0 \end{cases}}$

$\forall t$, $z(t) = 0$, donc le mouvement a lieu dans le plan (Oxy).

R3. En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire $y(x)$.

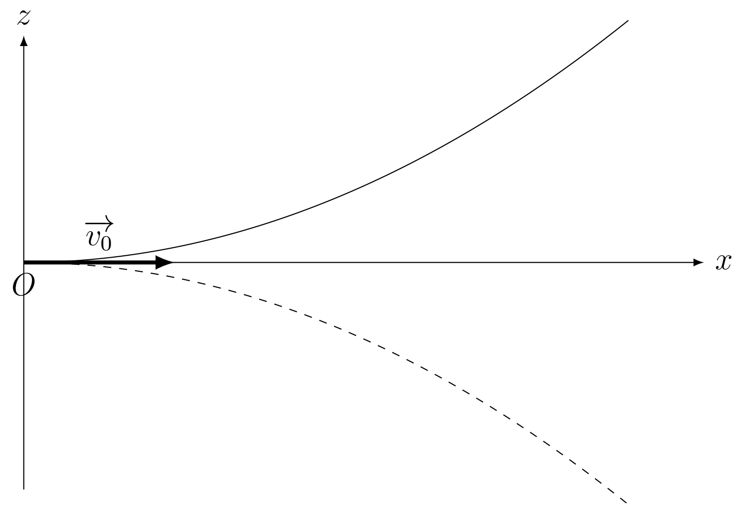
Solution: On isole t de $x(t)$: $t = \dfrac{x}{v_0}$

On injecte dans $y(t)$: $\boxed{y(x) = \alpha \dfrac{x^2}{2v_0^2}}$, la trajectoire est parabolique

R4. Représenter la trajectoire dans les deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$. On représentera sur la trajectoire, le vecteur accélération et le vecteur vitesse en différents points.

Solution: Si $\alpha > 0$: concavité tournée vers le haut

Si $\alpha < 0$: concavité tournée vers le bas (en pointillés)



III.5 Vecteur déplacement élémentaire

Capacité exigible : Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans le cas des coordonnées cartésiennes, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur-vitesse.

À maîtriser : Établir le vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes

R1. Exprimer le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ lorsque x varie de $\mathrm{d}x$, avec y et z restant constants.

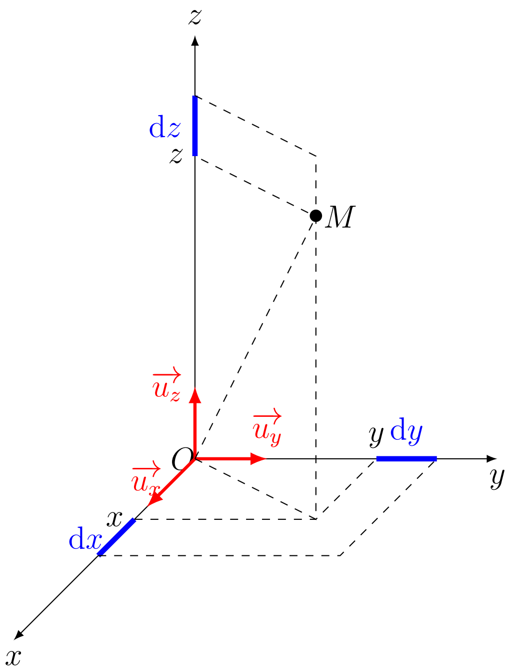
Solution: $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}$
ATTENTION : $\mathrm{d}x$ est un scalaire algébrique, qui est positif si le déplacement a lieu dans le sens de $+\overrightarrow{u_x}$, négatif sinon. Le sens du déplacement est contenu DANS $\mathrm{d}x$.

R2. Procéder de même dans les directions $\overrightarrow{u_y}$ quand seul y varie et $\overrightarrow{u_z}$ quand seul z varie.

Solution: Pour un déplacement uniquement selon $\overrightarrow{u_y}$: $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y}$
Pour un déplacement uniquement selon $\overrightarrow{u_z}$: $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$

R3. En déduire l'expression générale du vecteur déplacement élémentaire.

Solution: $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}}$



R4. En déduire le vecteur vitesse.

Solution:
$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

À connaître : Vecteur déplacement élémentaire

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\ \overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\ \overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\ \overrightarrow{u_z}$$

$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ sont les composantes du vecteur déplacement élémentaire. Ce sont des grandeurs algébriques qui peuvent être positives ou négatives.

IV Système de coordonnées cylindro-polaires

IV.1 Mouvements plans : système de coordonnées polaires

IV.1.a) Description du système de coordonnées polaires

Capacité exigible : Décrire le système de coordonnées polaires planes.

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/polaires_FJ.php

À connaître : Système de coordonnées polaires planes

Coordonnées polaires de M : Pour repérer le point M dans le plan, on peut utiliser :

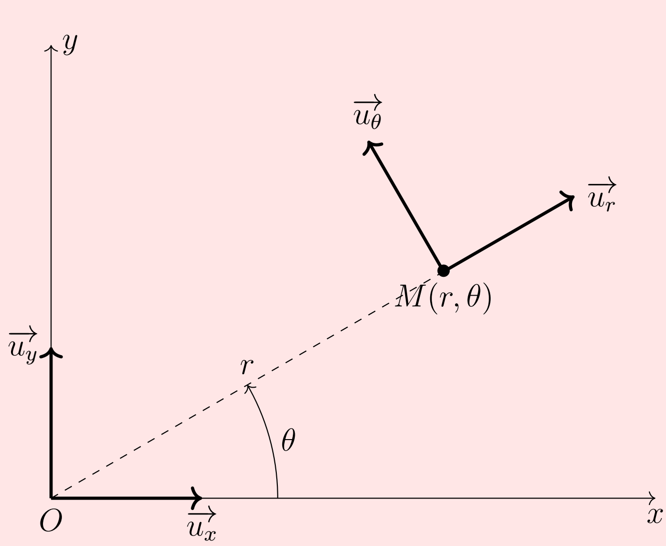
- la distance entre l'origine du repère et M : $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$;
- et l'angle $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OM}}\right)$

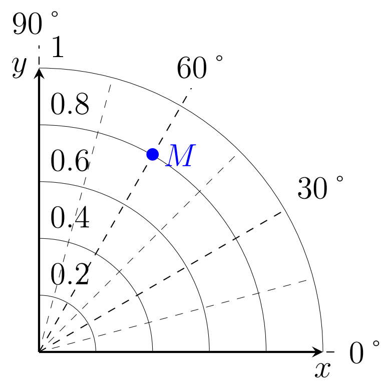
Les coordonnées polaires de M sont (r, θ).
Pour décrire tout le plan : $r \in [0, +\infty[$; $\theta \in [0, 2\pi[$
Base polaire : $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$, où :

- $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$, vecteur unitaire dans le sens de $\overrightarrow{OM}$;
- $\overrightarrow{u_\theta}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_r}$ et choisi dans le sens des θ croissants.

C'est une **base locale** (ou **mobile**), c'est-à-dire qui se déplace en même temps que le point M.
Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r(t)\overrightarrow{u_r}$$





Attention

Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ sont des vecteurs locaux, « attachés » au point M, ils se déplacent avec M.
Par conséquent ils dépendent de θ et de t : $\overrightarrow{u_r}(\theta(t))$ et $\overrightarrow{u_\theta}(\theta(t))$.
Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}\theta} \neq \overrightarrow{0}$; $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta} \neq \overrightarrow{0}$; $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} \neq \overrightarrow{0}$; $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} \neq \overrightarrow{0}$

À maîtriser : Dérivées des vecteurs de la base polaire

R1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ dans la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$.

Solution:

— Vecteur $\overrightarrow{u_r}$? Écrivons-le : $\overrightarrow{u_r} = \alpha\overrightarrow{u_x} + \beta\overrightarrow{u_y}$

— Composante de $\overrightarrow{u_r}$ selon $\overrightarrow{u_x}$ = projection de $\overrightarrow{u_r}$ selon $\overrightarrow{u_x}$:
$\alpha = \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_x} = \underbrace{\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|}_{=1} \times \underbrace{\left\|\overrightarrow{u_x}\right\|}_{=1} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_x}}\right)$, avec$\widehat{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_x}} = \theta$
Ainsi $\alpha = \cos(\theta)$

— Composante de $\overrightarrow{u_r}$ selon $\overrightarrow{u_y}$ = projection de $\overrightarrow{u_r}$ selon $\overrightarrow{u_y}$:
$\beta = \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_y} = \underbrace{\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|}_{=1} \times \underbrace{\left\|\overrightarrow{u_y}\right\|}_{=1} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_y}}\right)$, avec $\widehat{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_y}} = \frac{\pi}{2} - \theta$
Ainsi $\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin(\theta)$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\overrightarrow{u_y}}$

— Vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$? Écrivons-le : $\overrightarrow{u_\theta} = \gamma\overrightarrow{u_x} + \delta\overrightarrow{u_y}$

— Composante de $\overrightarrow{u_\theta}$ selon $\overrightarrow{u_x}$ = projection de $\overrightarrow{u_\theta}$ selon $\overrightarrow{u_x}$:
$\gamma = \overrightarrow{u_\theta} \cdot \overrightarrow{u_x} = \underbrace{\left\|\overrightarrow{u_\theta}\right\|}_{=1} \times \underbrace{\left\|\overrightarrow{u_x}\right\|}_{=1} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_x}}\right)$, avec $\widehat{\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_x}} = \frac{\pi}{2} + \theta$
Ainsi $\gamma = -\sin(\theta)$

— Composante de $\overrightarrow{u_\theta}$ selon $\overrightarrow{u_y}$ = projection de $\overrightarrow{u_\theta}$ selon $\overrightarrow{u_y}$:
$\delta = \overrightarrow{u_\theta} \cdot \overrightarrow{u_y} = \underbrace{\left\|\overrightarrow{u_\theta}\right\|}_{=1} \times \underbrace{\left\|\overrightarrow{u_y}\right\|}_{=1} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_y}}\right)$, avec $\widehat{\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_y}} = \theta$
Ainsi $\beta = \cos(\theta)$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta)\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\overrightarrow{u_y}}$

R2. Calculer $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t}$. Les exprimer en fonction de $\dot{\theta}$, $\overrightarrow{u_r}$ et de $\overrightarrow{u_\theta}$.

Solution:
$\dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dfrac{d\Big(\cos(\theta)\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\overrightarrow{u_y}\Big)}{dt}$, or $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ sont constants.
Ainsi $\dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dfrac{d\cos(\theta)}{dt}\overrightarrow{u_x} + \dfrac{d\sin(\theta)}{dt}\overrightarrow{u_y}$
Par dérivée de fonction composée : $\dfrac{d\cos(\theta)}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt} \times \dfrac{d\cos(\theta)}{d\theta} = -\dot{\theta}\sin(\theta)$
et $\dfrac{d\sin(\theta)}{dt} = \dot{\theta}\cos(\theta)$
Soit $\dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\Big(-\sin(\theta)\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\overrightarrow{u_y}\Big)$, soit $\boxed{\dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$
$\dfrac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \dfrac{d\Big(-\sin(\theta)\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\overrightarrow{u_y}\Big)}{dt}$, or $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ sont constants.
Ainsi $\dfrac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \dfrac{d-\sin(\theta)}{dt}\overrightarrow{u_x} + \dfrac{d\cos(\theta)}{dt}\overrightarrow{u_y}$
Soit $\dfrac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\Big(\cos(\theta)\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\overrightarrow{u_y}\Big)$, soit $\boxed{\dfrac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}}$

IV.1.b) Mouvements circulaires

Capacité exigible : Mouvement circulaire uniforme et non uniforme. Exprimer les composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération en coordonnées polaires planes. Identifier les liens entre les composantes du vecteur-accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur-vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction du vecteur-accélération dans la concavité d'une trajectoire plane.

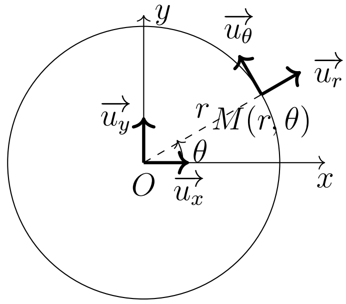
À maîtriser : Étudier le mouvement circulaire uniforme

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/circ_unif_FJ.php

On considère un point M décrivant un cercle de rayon R et dont la norme v du vecteur vitesse reste constante au cours du mouvement.

R1. Faire un schéma de la situation et choisir un paramétrage adapté. Exprimer le vecteur position.

Solution: Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r}$ avec R constant.



R2. Déterminer le vecteur vitesse. En déduire la norme du vecteur vitesse.

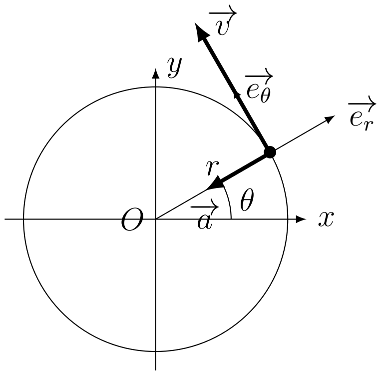
Solution: R est constant
$\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R}) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{dR\overrightarrow{u_r}}{dt}$, soit $\boxed{\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R}) = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$
Norme : $\boxed{\|\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})\| = R|\dot{\theta}|}$

R3. Déterminer le vecteur accélération. L'exprimer en fonction de v, R et $\overrightarrow{u_r}$. Que peut-on dire de ce vecteur accélération ?

Solution: R est constant
De plus, le mouvement étant uniforme, $\|\overrightarrow{v}\|$ est constant, or $\|\overrightarrow{v}\| = R|\dot{\theta}|$, donc $\dot{\theta}$ est constant sur un mouvement circulaire uniforme.
$\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R}) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}R\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t}$, soit $\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R}) = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}}$
Le vecteur accélération n'est pas nul, car la direction du vecteur vitesse varie.

R4. Représenter sur le schéma précédent les vecteurs vitesse et accélération à différents instants.

Solution:
Le vecteur vitesse est tangente à la trajectoire circulaire.
Le vecteur accélération est dirigé vers le centre du cercle.



Attention – Erreur à ne pas commettre

Pour un mouvement circulaire uniforme : $\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \text{cste} \Rightarrow \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a} = 0$, mais $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{\text{constante}}$ et $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$.

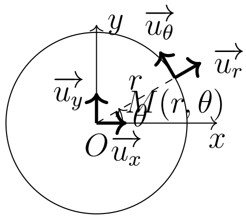
À maîtriser :Étudier le mouvement circulaire non uniforme

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/circ_accelere_FJ.php

On considère un point M décrivant un cercle de rayon R (avec $\left\|\overrightarrow{v}\right\|$ qui varie).

R1. Faire un schéma et choisir un paramétrage adapté. Exprimer le vecteur position.

Solution:



R2. Déterminer le vecteur vitesse. En déduire la norme du vecteur vitesse.

Solution: Le mouvement est toujours circulaire, donc R est constant.
$\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R}) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}R\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t}$, soit $\boxed{\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R}) = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$
Norme : $\boxed{\|\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})\| = R|\dot{\theta}|}$

R3. Déterminer le vecteur accélération.

Solution:
Ici, le mouvement n'est plus uniforme, donc $\|\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})\|$ varie au cours du mouvement, c'est-à-dire $\dot{\theta}(t)$ varie au cours du mouvement.

Vecteur accélération : $\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R}) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{u_\theta}(t)}{\mathrm{d}t}$

Soit $\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R}) = R\dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}(t)\overrightarrow{u_\theta}(t)}{\mathrm{d}t} = R\Big(\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t}\Big)$

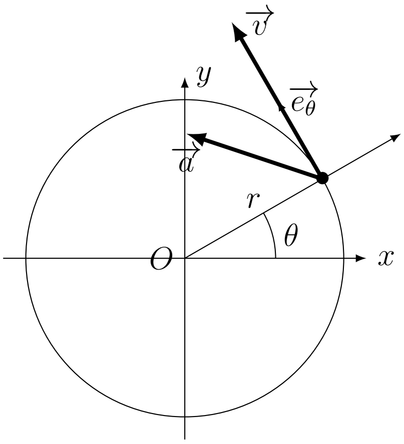
Soit $\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathscr{R}) = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = -\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$

R4. Que peut-on dire de ce vecteur accélération ? On distinguera les cas où $\left\|\overrightarrow{v}\right\|$ augmente et où $\left\|\overrightarrow{v}\right\|$ diminue.

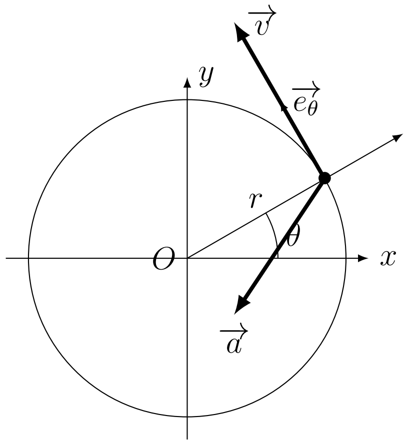
Solution:
La composante selon $\overrightarrow{u_r}$ est toujours négative et provient de la variation de la direction du vecteur vitesse, le vecteur accélération est toujours dirigé vers l'intérieur du cercle.
La composante selon $\overrightarrow{u_\theta}$ dépend du sens d'évolution de $\dot{\theta}$, c'est-à-dire à la fois du sens du mouvement (signe de $\dot{\theta}$) et du sens d'évolution de $\|\overrightarrow{v}\|$. Elle provient de la variation de la norme du vecteur vitesse.

R5. Représenter les vecteurs vitesse et accélération à différents instants dans les deux cas.

Solution:



Mouvement accéléré dans le sens θ croissant : $\dot{\theta} > 0$.



Mouvement décéléré dans le sens θ croissant : $\dot{\theta} > 0$.

$\overrightarrow{v}$ est toujours tangente au cercle.
$\overrightarrow{a}$ est toujours dirigé vers l'intérieur du cercle.
Si le mouvement est accéléré, alors $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a} > 0$.
si le mouvement est décéléré, alors $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a} < 0$.

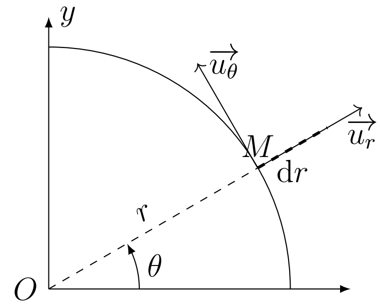
IV.1.c) Vecteur déplacement élémentaire

<u>Capacité exigible</u> : Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans le cas des coordonnées cylindriques, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur-vitesse.

À maîtriser : Vecteur déplacement élémentaire en coordonnées polaires

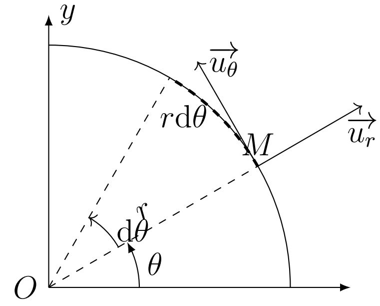
R1. .

Pour un déplacement infinitésimal dans la direction de $\overrightarrow{u_r}$, quand seul r varie de $\mathrm{d}r$.



Vecteur déplacement élémentaire : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r}$

R2. Lors d'un déplacement infinitésimal dans la direction de $\overrightarrow{u_\theta}$, quand seul θ varie de $\mathrm{d}\theta$, M décrit un arc de cercle de rayon r et d'angle au sommet $\mathrm{d}\theta$.
Il se déplace de $r\mathrm{d}\theta$



Vecteur déplacement élémentaire : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$

R3. Dans le cas général : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$

R4. En déduire l'expression du vecteur vitesse :
$$\overrightarrow{v}(M/\mathscr{R}) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_r} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_\theta}$$

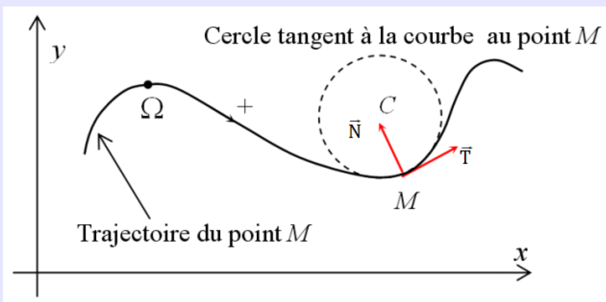
IV.2 Mouvement plan et base de Frenet

Capacité exigible : Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.

Pour l'étude d'un mouvement plan dont on connaît la trajectoire, il peut être intéressant d'utiliser la base de Frenet (Jean-Baptiste Frenet (1816-1900), mathématicien, astronome français).

Définition : Base de Frenet

La base de Frenet est constituée de **deux vecteur unitaires orthogonaux** entre eux, notés $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$. Les deux vecteurs sont liés au point M dont on décrit le mouvement.



- $\overrightarrow{T}$ est tangent à la trajectoire au point M, et dirigé dans le sens du mouvement.
- $\overrightarrow{N}$ est orthogonal à $\overrightarrow{T}$ et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la courbe.

À connaître : Vecteurs vitesse et accélération dans la base de Frenet

■ Le **vecteur vitesse** est tangentiel à la courbe, donc par définition de $\overrightarrow{T}$:

$$\overrightarrow{v}(t) = v(t)\overrightarrow{T}$$

où v est la norme du vecteur vitesse

- Le **vecteur accélération** s'écrit :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} + \frac{\left(v(t)\right)^2}{R(t)}\overrightarrow{N}$$

Où $R(t)$ est le rayon de courbure de la courbe au point M, c'est-à-dire le rayon du cercle qui épouse le mieux la forme de la trajectoire au point M.

Visualisation du cercle osculateur : https://openprocessing.org/sketch/664470

Attention – À ne pas confondre

Il ne faut pas confondre la base de Frenet et la base polaire.
Le vecteur $\overrightarrow{T}$ est toujours tangent à la trajectoire, ce qui n'est pas le cas de $\overrightarrow{u_\theta}$, sauf pour un mouvement circulaire.
Le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ est dans la direction et le sens de $\overrightarrow{OM}$, ce qui n'est pas le cas du vecteur $\overrightarrow{N}$ qui est toujours dirigé vers la concavité de la courbe.

IV.3 Mouvements dans l'espace : système de coordonnées cylindriques

IV.3.a) Description du système de coordonnées cylindriques

Capacité exigible : Décrire le système de coordonnées cylindriques.
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cylindriques.php

À connaître : Système de coordonnées cylindriques

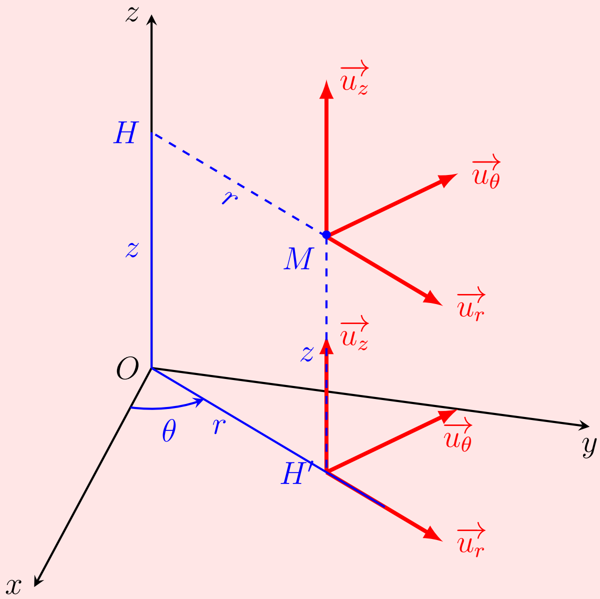
Coordonnées cylindriques : Pour repérer M, on peut utiliser :

- la distance entre l'axe (Oz) et M : $r = HM = OH' \in [0, +\infty[$, avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz) et H' le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) ;
- l'angle $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OH'}}\right) \in [0, 2\pi[$;
- et l'altitude $z = \overline{H'M} = \overline{OH} \in]-\infty, +\infty[$.

Les coordonnées cylindriques de M sont (r, θ, z).
Base cylindrique : $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$, où :

- $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{HM}}{r} = \frac{\overrightarrow{OH'}}{r}$, vecteur unitaire dans le sens de $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OH'}$;
- $\overrightarrow{u_\theta}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_r}$, dans un plan parallèle (Oxy), et choisi dans le sens des θ croissants ;
- $\overrightarrow{u_z}$ est le troisième vecteur unitaire de la base cartésienne.

C'est une **base locale/mobile**.



Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OH'} + \overrightarrow{H'M} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$$

Attention – Erreur à ne pas commettre

- r est la distance entre l'axe (Oz) et le point M, ce N'EST PAS la distance au point O.
- $\boxed{\overrightarrow{u_r} \text{ est le vecteur unitaire dans le sens de } \overrightarrow{HM}}$ avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz) (et non le vecteur unitaire dans le sens de $\overrightarrow{OM}$).

- Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ sont des vecteurs locaux, « attachés » au point M, ils bougent avec M. Par conséquent ils dépendent de θ et de t : $\overrightarrow{u_r}(\theta(t))$ et $\overrightarrow{u_\theta}(\theta(t))$.

IV.3.b) Vecteurs vitesse et accélération

Capacité exigible : Établir les composantes du vecteur-vitesse, du vecteur-accélération dans le cas des coordonnées cylindriques.

À maîtriser : Vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

R1. Dériver le vecteur position par rapport au temps pour déterminer le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques.

R2. En déduire l'expression de sa norme.

Solution:

$\overrightarrow{OM} = r(t)\overrightarrow{u_r}(t) + z(t)\overrightarrow{u_z}$

$$\vec{v}(M/\mathscr{R}) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r(t)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

Ainsi $\boxed{\vec{v}(M/\mathscr{R}) = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}}$

R3. Dériver le vecteur vitesse par rapport au temps pour déterminer le vecteur accélération en coordonnées cylindriques.

Solution:

$$\vec{a}(M/\mathscr{R}) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(M/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}(M/\mathscr{R}) &= \frac{\mathrm{d}\dot{r}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}}{\mathrm{d}t} \\
\vec{a}(M/\mathscr{R}) &= \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}) + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\vec{a}(M/\mathscr{R}) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t)\right)\overrightarrow{u_r}(t) + \left(2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)\right)\overrightarrow{u_\theta}(t) + \ddot{z}(t)\overrightarrow{u_z}}$

À connaître : Vecteurs vitesse et accélération

$$\vec{v} = \dot{r}\ \overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\ \overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\ \overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\ \overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

IV.3.c) Vecteur déplacement élémentaire

Capacité exigible : Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans le cas des coordonnées cylindriques, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur-vitesse.

À maîtriser : Vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques

R1. En reproduisant les raisonnements menés pour le vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes et polaires, établir l'expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques.

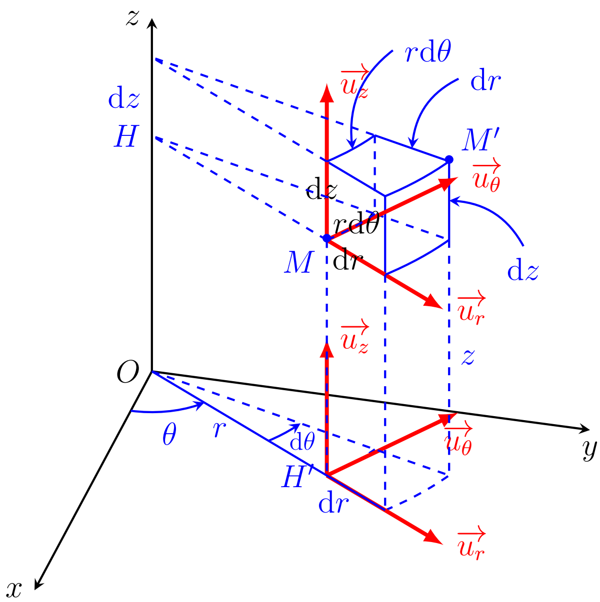
Solution:

R2. En déduire le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques.

Solution:

À connaître : Vecteur déplacement élémentaire

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\ \overrightarrow{u_r} + r\ \mathrm{d}\theta\ \overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\ \overrightarrow{u_z}$$



V Système de coordonnées sphériques

V.1 Repérage sur la globe terrestre

Repérage sur la globe terrestre

À l'instar du repérage sur le globe terrestre utilisé en **géographie** (altitude h, latitude λ et longitude Φ) ou à l'aide d'un GNSS (système de positionnement par satellites), le repérage **sphérique** d'un point M dans l'espace utilise la **distance** $r = OM$ au centre O du repère et deux **angles** θ et φ, respectivement la `co-latitude` et la `longitude`.

Si on utilise le repérage sphérique d'un point M situé sur Terre :

- on choisit de faire coïncider le centre O du repère cartésien $(Oxyz)$ avec le centre de la Terre. Ainsi, $r = OM = R_T + h$ où R_T est le rayon terrestre (on suppose que la Terre est une sphère parfaite) et h l'altitude de M par rapport au niveau de la mer.
- l'axe (Oz) coïncide avec l'axe **Nord/Sud** et est orienté du *Sud* vers le *Nord*.
- en plaçant l'axe (Ox) sur le méridien de Greenwich, $\varphi = \Phi$ ou $\varphi = 360° - \Phi$ selon que le point M se trouve à l'Est ou à l'Ouest du méridien de Greenwich.
- le plan (Oxy) coïncide avec le **plan équatorial** et $\theta = 90° - \lambda$ ou $\theta = 90° + \lambda$ selon que M se trouve dans l'hémisphère Nord ou Sud.

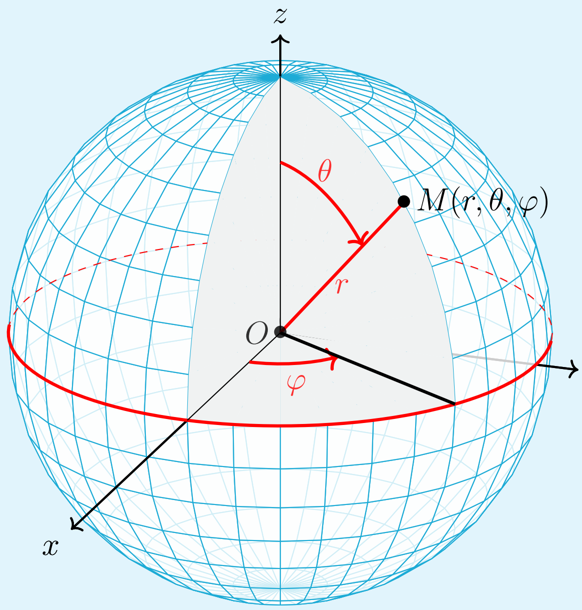


FIGURE 1 – Repérage sphérique du point M

Terminologie pour le globe terrestre

- Un **parallèle** est un cercle imaginaire situé dans un plan parallèle au plan équatorial (donc orthogonal à l'axe (Oz)) et d'altitude nulle $h = 0$.
  Tout point se déplaçant sur un parallèle conserve une **(co-)latitude** constante (λ, θ constants).
- L'**équateur** est le parallèle situé dans le plan équatorial ($\lambda = 0$, $\theta = 90°$).
- Un **méridien** est un demi-cercle d'altitude nulle reliant les deux pôles.
  Tout point se déplaçant sur un méridien conserve une **longitude** constante (Φ, φ constants).

Exemple 1. Les coordonnées de la ville de Valence sont :

— distance au centre $r = R_T + h \approx R_T = 6370$ km car $h = 120$ m $= 0,120$ km.

— co-latitude $\theta = 45°$ (latitude géographique : 45° Nord).

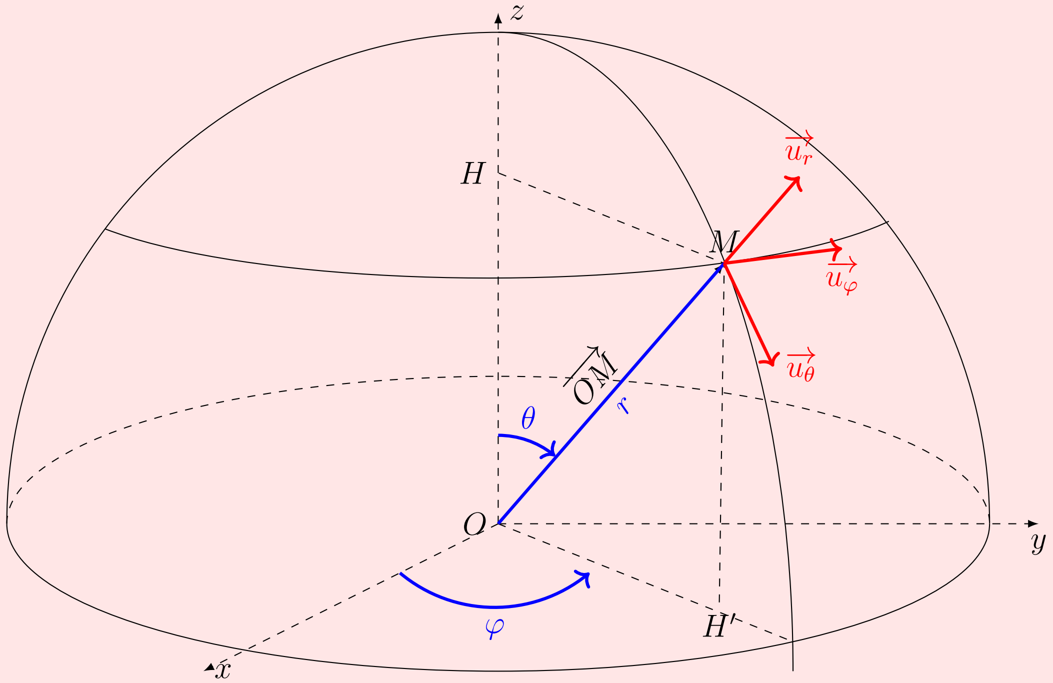
— longitude $\varphi = 5°$ (longitude géographique : 5° Est par rapport au méridien de référence qui passe par la ville de Greenwich en Angleterre)

V.2 Description du système de coordonnées sphériques

Capacité exigible : Décrire le système de coordonnées sphériques.

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_spheriques.php

À connaître : Système de coordonnées sphériques



Coordonnées sphériques de M : $M(r, \theta, \varphi)$, où

- $r = OM$, est la distance entre le centre O et M ; avec $r \in [0, +\infty[$;
- $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{OM}}\right)$; avec $\theta \in [0, \pi]$;
- $\varphi = \left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OH'}}\right)$, où H' est le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) ; avec $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Base sphérique : $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\right)$ est une **base locale**, où :

- $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$, vecteur unitaire dans le sens de $\overrightarrow{OM}$;
- $\overrightarrow{u_\theta}$ est le vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u_r}$, tangent au méridien qui passe par M, et orienté dans le sens des θ croissants ;
- $\overrightarrow{u_\varphi}$ est le vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$, tangent au parallèle qui passe par M, et orienté dans le sens des φ croissants.

Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} =$$

Attention – Erreur à ne pas commettre

Les coordonnées sphériques r et θ ne sont pas définies comme les coordonnées cylindriques r et θ.
Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ de la base sphérique ne sont pas définis comme les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ de la base cylindrique.

V.3 Vecteur déplacement élémentaire

Capacité exigible : Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans le cas des coordonnées sphériques, construire le trièdre local associé.

À maîtriser : vecteur déplacement élémentaire en coordonnées sphériques

R1. .

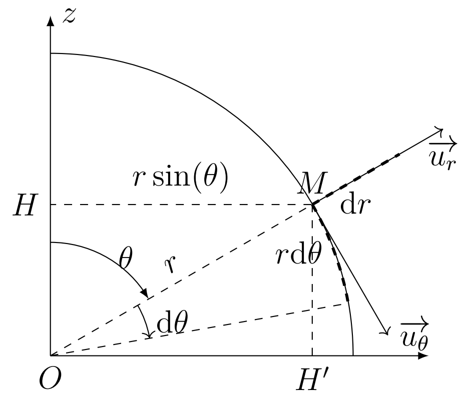
Lors d'un déplacement élémentaire de M dans la direction de $\overrightarrow{u_r}$ quand seul r varie de $\mathrm{d}r$ (θ et φ sont constants).
Vecteur déplacement élémentaire selon $\overrightarrow{u_r}$:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r}$$

R2. Lors d'un déplacement élémentaire de M dans la direction de $\overrightarrow{u_\theta}$ quand seul θ varie de $\mathrm{d}\theta$ (r et φ constants), M se déplace le long du méridien, qui est un cercle de rayon r. Vecteur déplacement élémentaire selon $\overrightarrow{u_\theta}$:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

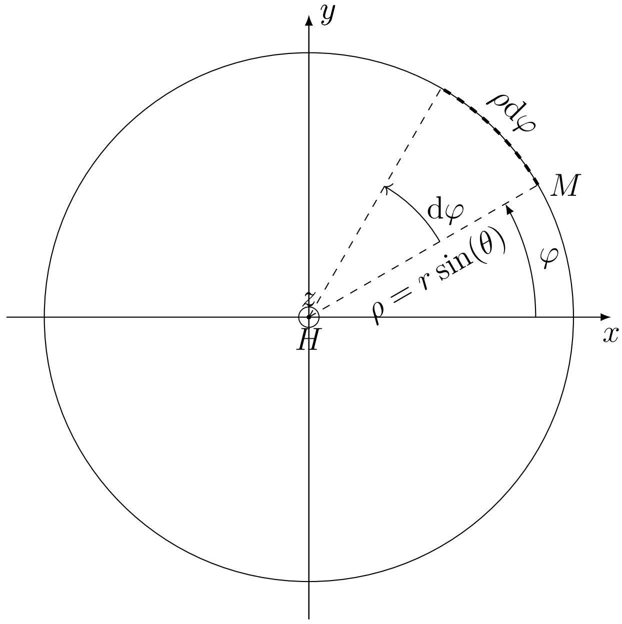
.



Dans le plan du méridien

R3. Lors d'un déplacement élémentaire dans la direction de $\overrightarrow{u_\varphi}$ quand seul φ varie de $\mathrm{d}\varphi$ (r et θ constants), M se déplace le long d'un parallèle de rayon $\rho = r\sin(\theta)$.Vecteur déplacement élémentaire selon $\overrightarrow{u_\varphi}$:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$$



Vue de dessus, dans le plan du parallèle

Vue de dessus, dans le plan du parallèle

À retenir : Vecteur déplacement élémentaire

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\ \overrightarrow{u_r} + r\ \mathrm{d}\theta\ \overrightarrow{u_\theta} + r\sin(\theta)\ \mathrm{d}\varphi\ \overrightarrow{u_\varphi}$$

VI Choisir le système de coordonnées adapté

Capacité exigible : Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.

Méthode

Il est légitime de choisir n'importe quel système de coordonnées. Les considérations menées à partir de tous les systèmes de coordonnées seront correctes. Néanmoins, l'utilisation d'un système de coordonnées ou d'un autre peut considérablement alléger ou alourdir les calculs.
Si un **axe est privilégié**, notamment si le mouvement présente une distance constante à cet axe, il vaut mieux abandonner les coordonnées cartésiennes pour les **coordonnées cylindriques**.
Si un **certain point joue un rôle particulier**, les **coordonnées sphériques** peuvent simplifier la situation.
En dehors de ces cas, les coordonnées cartésiennes représentent *a priori* le meilleur choix.

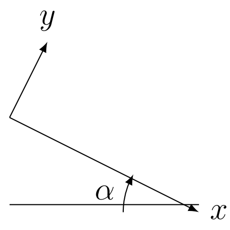
Exercice de cours B Choisir le système de coordonnées adapté

Dans les situations ci-dessous (que nous rencontrerons au fur et à mesure des chapitres), choisir le système de coordonnées adapté et le représenter sur le schéma.

R1. Descente d'un skieur sur une piste rectiligne inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontal.

Solution:

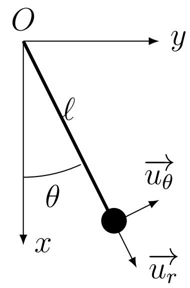
Le mouvement est rectiligne, donc le système de coordonnées adapté est le système cartésien, avec un des axes selon la pente dirigé vers le bas, un autre axe perpendiculaire à la pente vers le haut, le 3ᵉperpendiculaire aux deux premiers. Il n'interviendra pas dans la description du mouvement.



R2. Mouvement d'un point matériel accroché à un fil de longueur constante, lui même accroché à un point fixe du référentiel d'étude.

Solution:

Le mouvement du point matériel sera circulaire, par conséquent, le système de coordonnées adapté sera le système polaire, dont l'origine est le point d'attache du fil, car c'est le centre du cercle. On peut choisir $\theta = 0$ quand M est à la verticale en-dessous du point d'attache.



R3. Mouvement circulaire d'un satellite autour de la Terre.

Solution: Mouvement circulaire $\Rightarrow$ coordonnées polaires dans le plan du mouvement, en prenant l'origine O au centre du cercle, c'est-à-dire au centre de la Terre.

R4. Mouvement d'un ballon de football lancé avec un vecteur vitesse initiale incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontal.

Solution: le mouvement est parabolique dans le plan contenant le vecteur vitesse initial et le champ de pesanteur terrestre. Le système de coordonnées adapté est le système cartésien entre plaçant un des axes verticalement et un 2ᵉ horizontalement, ces deux axes devant être dans le plan du mouvement défini précédemment.