Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)
TD n°10 Description et paramétrage du mouvement d'un point — *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.				✎	✎	✎		✎	✎	✎
Identifier les degrés de liberté d'un mouvement.			✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎
Choisir un système de coordonnées adapté au problème.						✎			✎	✎
Étudier un mouvement à vecteur accélération constant : Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.			✎		✎		✎			
Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes sur un mouvement circulaire uniforme ou non uniforme.						✎		✎	✎	✎
Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane.		✎				✎		✎		
Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.		✎								

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Ordres de grandeurs et conversions

R1. Donner la vitesse commerciale d'un bus sur l'autoroute, d'un TGV et d'un avion de ligne à réaction en $\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

> **Solution:** $v_{\text{voiture}} = 130\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = \dfrac{130\times 10^3\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = 36{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$
> $v_{\text{TGV}} = 300\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = \dfrac{300\times 10^3}{3600} = 83\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$
> $v_{\text{avion}} 900\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = \dfrac{900\times 10^3}{3600} = 249\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

R2. Convertir les vitesses précédentes en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

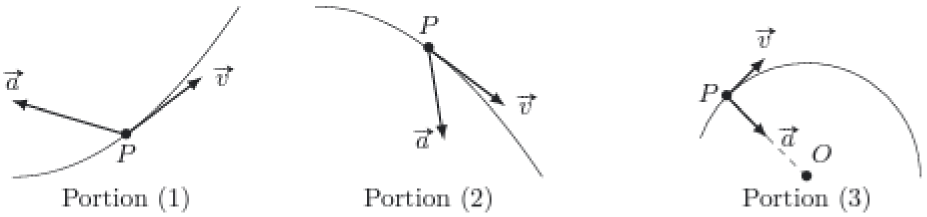
> **Solution:** cf ci-dessus

R3. Donner la vitesse de rotation d'un moteur de voiture au ralenti en tour/min et la convertir en $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

> **Solution:** $\omega = 1000\ \mathrm{tour\cdot min^{-1}} = \dfrac{1000\times 2\pi \mathrm{rad}}{60\mathrm{s}} = 105\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

Exercice n°2 Mouvements d'un planeur

Nous nous intéressons à l'évolution de la norme du vecteur vitesse d'un planeur dans trois portions de sa trajectoire représentées ci-dessous. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ du planeur assimilé à un point P y sont indiqués à un instant donné.



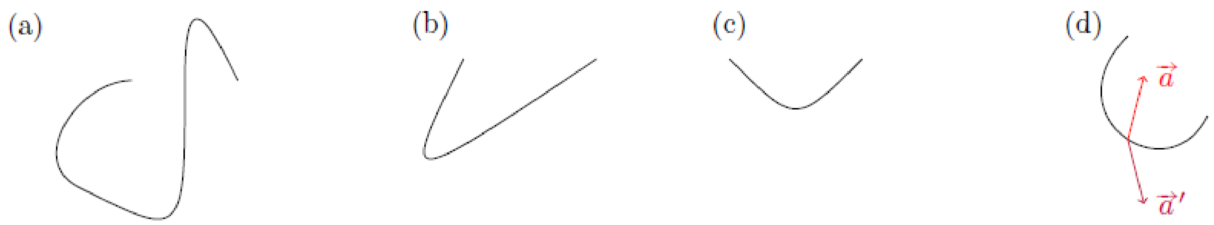
R1. Déterminer pour chaque portion de trajectoire si la norme de la vitesse de P augmente ou diminue.

Solution: Portion (1) : $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$, donc la norme du vecteur vitesse diminue.
Portion (2) : $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$, donc la norme du vecteur vitesse augmente.
Portion (3) : $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$, donc la norme du vecteur vitesse reste constante : le mouvement est uniforme.

R2. La portion (3) est circulaire de rayon R et de centre O. Quel est le lien entre la norme du vecteur accélération et celle du vecteur vitesse ?

Solution: Le mouvement du planeur selon la portion (3) est circulaire et de plus supposé uniforme, donc $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$, avec R et $\dot{\theta}$ sont constants.
Ainsi $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = R\dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r}$.
Ainsi $\|\vec{v}\| = R|\dot{\theta}|$ et $\|\vec{a}\| = R\dot{\theta}^2$, ainsi $\boxed{\|\vec{a}\| = \dfrac{\|\vec{v}\|^2}{R}}$

On considère une autre série de trajectoires :



R3. Sur la trajectoire (a) ci-dessus, le vecteur vitesse est-il constant ? Représenter en quelques points de la trajectoire le vecteur accélération.

Solution: Le vecteur vitesse ne peut pas être constant car la trajectoire n'est pas rectiligne.

R4. Un système peut suivre les deux trajectoires (b) et (c) avec une même vitesse v de norme constante dans les deux cas. Dans quel cas la norme du vecteur accélération est-elle la plus grande ?

Solution: Le vecteur accélération est dû à la variation de la norme du vecteur vitesse et à la variation de sa direction. La norme du vecteur accélération sera plus grande dans le cas (b) car la direction du vecteur vitesse change plus vite que dans le cas (c).

Le vecteur accélération du système à un instant donné est représenté sur la trajectoire (d).

R5. Lequel des vecteurs $\vec{a}$ ou $\vec{a}'$ est le vecteur accélération ?

Solution: Le vecteur accélération est toujours dirigé vers l'intérieur de la concavité de la courbe, donc c'est le vecteur $\vec{a}$ qui est le vecteur accélération.

R6. Peut-on en déduire le sens de parcours de la trajectoire ?

> **Solution:** Il est impossible de connaître le sens du parcours. Le vecteur vitesse indique le sens du parcours, le vecteur accélération peut être dans le même sens que $\vec{v}$, ou de sens opposé.

R7. En supposant que la trajectoire est parcourue dans le sens horaire, que peut-on en déduire sur la variation de la norme du vecteur vitesse ?

> **Solution:** La trajectoire étant parcourue dans le sens horaire, on en déduit que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont dans le même sens, le mouvement est donc accéléré.

Exercice n°3 Calcul de vitesse et d'accélération

Un point M en mouvement est repéré par ses coordonnées cartésiennes qui évoluent dans le temps selon les équations horaires : $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0t$ et $z(t) = z_0$, avec $x_0 = -z_0 = 1$ m, $v_0 = 3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $a_0 = 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

R1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération à l'instant t.

> **Solution:** $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0t \\ -v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$
> $\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

R2. Calculer la norme du vecteur vitesse de M à l'instant $t = 2$ s.

> **Solution:** $\|\vec{v}\| = \sqrt{(a_0t)^2 + v_0^2}$
> $\|\vec{v}\|(t = 2\ \text{s}) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (sans calculatrice !)

R3. Calculer la norme du vecteur accélération de M à l'instant $t = 1$ s.

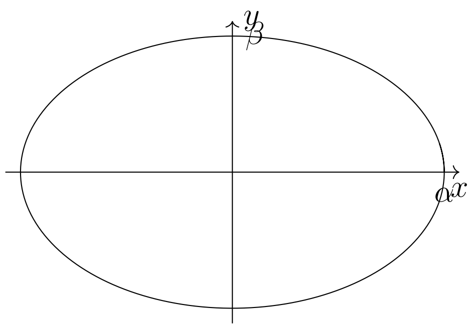
> **Solution:** $\|\vec{a}\| = a_0 = 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ (constante !)

Exercice n°4 Trajectoire

Un point M décrit un mouvement d'équations paramétriques $\begin{cases} x(t) = \alpha\cos(\omega t) \\ y(t) = \beta\sin(\omega t) \end{cases}$ où α, β et ω sont des constantes positives.

R1. Quelle est la nature de la trajectoire ? Tracer l'allure de la trajectoire. Quelle est la période de rotation ?

> **Solution:** La trajectoire est une $\boxed{\text{ellipse}}$.



La période de rotation T est la plus petite durée telle que $\forall t$: $\overrightarrow{OM}(t+T) = \overrightarrow{OM}(t) \Leftrightarrow x(t+T) = x(t)$ et $y(t+T) = y(t)$. Ainsi $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}}$

R2. Exprimer les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}$ et accélération $\overrightarrow{a}$ en coordonnées cartésiennes.

Solution: Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v} = \omega\Big(-\alpha\sin(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \beta\cos(\omega t)\overrightarrow{u_y}\Big)$
Vecteur accélération : $\overrightarrow{a} = -\omega^2\Big(\alpha\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \beta\sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}\Big)$

R3. Exprimer les normes du vecteur vitesse et du vecteur accélération à l'instant $t = \dfrac{\pi}{4\omega}$.

Exercice n°5 Voie d'accélération

Un automobiliste roule sur une voie d'accélération pour s'insérer sur une rocade supposée rectiligne. Il roule à la vitesse autorisée v_1 avant d'accélérer uniformément avec l'accélération a_1.

R1. Quelle est la nature du mouvement ?
Exprimer la vitesse $v(t)$ de la voiture à l'instant t en fonction de v_1, a_1 et t.

Solution: Rédaction !
On étudie la voiture dans le référentiel lié à la route.
On note (Ox) l'axe dans la direction et le sens du mouvement de la voiture. On considère qu'à $t = 0$, la voiture se trouve en $x = 0$, avec une vitesse v_1.
Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré dans le sens de l'axe (Ox).
$a_x = a_1$
Composante du vecteur vitesse selon $\overrightarrow{u_x}$: $v_x(t) = a_1 t + K$, or $v_x(0) = v_1 = K$, donc $\boxed{v_x(t) = a_1 t + v_1}$

R2. Au bout de combien de temps t_1 l'automobiliste a-il atteint la vitesse v_2 (voir les données en fin d'exercice) ?

Solution: À t_1 : $v_x(t_1) = v_2 \Leftrightarrow a_1 t_1 + v_1 = v_2$, soit $\boxed{t_2 = \dfrac{v_2 - v_1}{a_1} = 6,9 \text{ s}}$

R3. Exprimer la distance parcourue $d(t)$ de l'automobiliste à l'instant t en fonction de v_1, a_1 et t. Calculer numériquement $d(t_1)$.

Solution: Position : $x(t) = a_1\dfrac{t^2}{2} + v_1 t + K'$, or à $t = 0$, $x(0) = 0 = K'$
Ainsi $\boxed{d(t) = x(t) = a_1\dfrac{t^2}{2} + v_1 t}$

$$\begin{aligned} d(t_1) &= a_1\frac{t_1^2}{2} + v_1 t_1 \\ &= t_1\left(\frac{a_1 t_1}{2} + v_1\right) \\ &= \frac{v_2 - v_1}{a_1}\left(\frac{v_2 - v_1}{2} + v_1\right) \\ &= \frac{v_2 - v_1}{a_1} \times \frac{v_2 + v_1}{2} \\ &= \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a_1} \\ &= 203 \text{ m} \end{aligned}$$

Une fois sur la voie rapide, l'automobiliste roule à la vitesse v_2 pendant $t_2 = 4$ min.

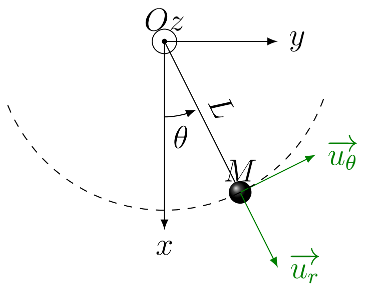
R4. Quelle est la nature du mouvement ? Quelle est la distance d_2 parcourue par l'automobiliste pendant ces 4 min ?

> **Solution:** Le mouvement est maintenant rectiligne uniforme, donc la distance parcourue vaut $d_2 = v_2 t_2 =$ m

Données : $v_1 = 90,0$ km · h^{-1} ; $v_2 = 120$ km · h^{-1} ; $a_1 = 1,20$ m · s^{-2}.

Exercice n°6 Pendule

On considère un pendule de longueur L constante, oscillant autour de Oz, dans le plan Oxy.
On étudie le mouvement du point M accroché à l'extrémité du pendule.



> **Solution:** Cf paragraphe du cours sur l'étude du mouvement circulaire NON uniforme ! Ce sont exactement les mêmes calculs.

R1. Quel est le mouvement de M dans le référentiel lié au repère $Oxyz$? Quel est le système de coordonnées pertinent pour l'étudier ?

> **Solution:** Le mouvement de M est circulaire de rayon L et de centre O. Le système de coordonnées polaires de centre O est le plus pertinent pour l'étude de ce mouvement.

R2. Exprimer le vecteur position.

> **Solution:** $\overrightarrow{OM} = L\overrightarrow{u_r}$

R3. Déterminer l'expression du vecteur vitesse du pendule en fonction de $\dot{\theta}$ et L.

> **Solution:** En dérivant : $\overrightarrow{v} = L\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

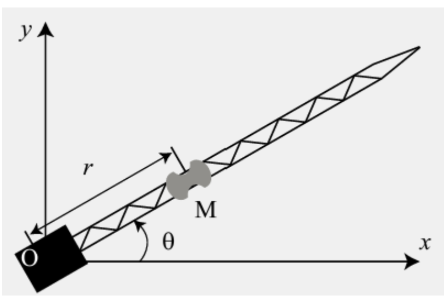
R4. En déduire l'expression de son vecteur accélération en fonction de $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ et L.

> **Solution:** En redérivant, avec L constant et $\dot{\theta}$ variable :
> $\overrightarrow{a} = L\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - L\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°7 Grue

Le bras d'une grue tourne dans un plan horizontal (Oxy) à la vitesse angulaire constante ω_0. Sur ce bras, un chariot se déplace à vitesse constante v_0. À l'instant initial, le chariot se trouve au centre de rotation O du bras. L'axe (Ox) est fixe par rapport au sol et confondu avec le bras de la grue à l'instant initial.



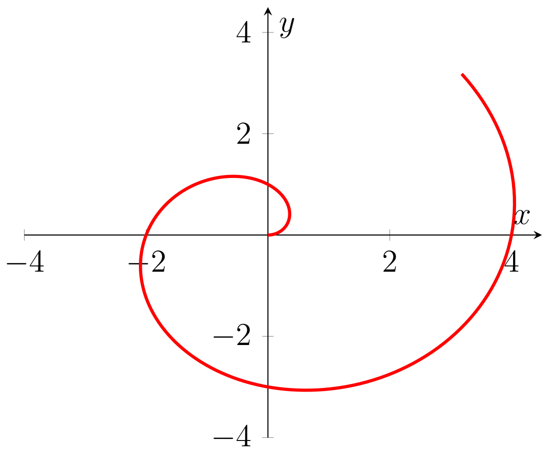
Le mouvement est observé depuis le sol. Les équations horaires du chariot dans le repère polaire $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ sont donc $\begin{cases} r(t) = v_0 t \\ \theta(t) = \omega_0 t \end{cases}$

R1. Déterminer l'expression de la trajectoire $r(\theta)$.

Solution: $t = \dfrac{\theta}{\omega_0}$, donc $\boxed{r(\theta) = \dfrac{v_0}{\omega_0} t}$

R2. Calculer r pour $\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ 3\dfrac{\pi}{2},\ 2\pi,\ 9\dfrac{\pi}{4}$.
Tracer qualitativement la trajectoire du chariot. Quelle est sa nature ?

Solution: $r(0) = 0\,;\ r(\pi/4) = \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{\pi}{4} = 0,5\ \mathrm{m}\,;\ r(\pi/2) = 1\ \mathrm{m}\,;\ r(\pi) = 2\ \mathrm{m}\,;\ r(3\pi/2) = 3\ \mathrm{m}\,;\ r(2\pi) = 4\ \mathrm{m}\,;\ r(9\pi/4) = 4,5\ \mathrm{m}$



R3. À partir des équations horaires dans le repère polaire, établir l'expression du vecteur vitesse.

Solution:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}r\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\
&= v_0\overrightarrow{u_r} + v_0\omega_0 t\overrightarrow{u_\theta}
\end{aligned}$$

R4. Exprimer la vitesse en $\theta = 0$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Les tracer sur un schéma.

Solution: En $\theta = 0$: $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u_r}$
En $\theta = \pi/2$: $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u_r} + v_0\dfrac{\pi}{2}\overrightarrow{u_\theta}$

R5. Exprimer la norme de la vitesse pour $\theta = 0$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Solution: En $\theta = 0$: $\|\overrightarrow{v}\| = v_0$
En $\theta = \pi/2$: $\|\overrightarrow{v}\| = v_0\sqrt{1 + \pi^2/4}$

R6. À partir du vecteur vitesse, établir l'expression du vecteur accélération.

Solution:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}v_0\overrightarrow{u_r} + v_0\omega_0 t\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} \\
&= v_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + v_0\omega_0\overrightarrow{u_\theta} - v_0\omega_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_r} \\
&= v_0\omega_0\overrightarrow{u_\theta} + v_0\omega_0\overrightarrow{u_\theta} - v_0\omega_0^2\overrightarrow{u_r} \\
&= -v_0\omega_0^2\overrightarrow{u_r} + 2\omega_0 v_0\overrightarrow{u_\theta}
\end{aligned}$$

Rq : on retrouve les composantes $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, où $\ddot{r} = 0$ et $r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r}$ où $\ddot{\theta} = 0$

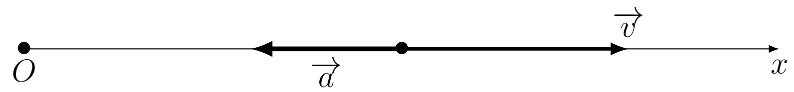
Données : $v_0 = 2,00$ m · s^{-1} ; $\omega_0 = \pi$ rad · s^{-1}

Exercice n°8 Freinages par frottement

On considère un objet assimilé à un point matériel M susceptible de se déplacer selon l'axe Ox. À $t = 0$, il se trouve en O et son vecteur vitesse vaut $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ avec $v_0 = 1,0$ m · s^{-1}.

R1. L'objet subit une force de frottement solide de sorte que son vecteur accélération $\overrightarrow{a}(M)$ peut être supposé constant et égal à $\overrightarrow{a_0} = -a_0\overrightarrow{u_x}$ avec $a_0 = 1,0$ m · s^{-2}, jusqu'à son arrêt.
Déterminer sa vitesse $v_x(t)$ et sa position $x(t)$ au cours du temps ainsi que la distance totale parcourue.

Solution:



Vecteur accélération de l'objet : $\overrightarrow{a}(M) = -a_0\overrightarrow{u_x}$.
On a donc $\ddot{x} = -a_0$. En l'intégrant une première fois, on a $\dot{x}(t) = -a_0 t + A$, avec $\dot{x}(0) = v_0 = 0 + A$, donc $\boxed{\dot{x}(t) = -a_0 t + v_0}$

On intègre une deuxième fois : $x(t) = \dfrac{-a_0 t^2}{2} + v_0 t + B$, avec $x(0) = 0$, donc $B = 0$. Ainsi $\boxed{x(t) = -\dfrac{a_0}{2}t^2 + v_0 t}$

L'objet s'arrête à l'instant τ tel que $\dot{x}(\tau) = 0$, soit $\tau = \dfrac{v_0}{a_0}$

L'objet a alors parcouru la distance $d = x(\tau) = -\dfrac{a_0}{2}\tau^2 + v_0\tau = -\dfrac{a_0}{2}\dfrac{v_0^2}{a_0^2} + v_0 \times \dfrac{v_0}{a_0}$, soit $\boxed{d = \dfrac{a_0^2}{2v_0}}$

R2. L'objet subit une force de frottement fluide de sorte que son vecteur accélération $\overrightarrow{a}(M)$ est relié à sa vitesse $\overrightarrow{v}(M)$ par la relation $\overrightarrow{a}(M) = -\alpha\overrightarrow{v}(M)$ avec $\alpha = 0,10$ s^{-1}.
Déterminer sa vitesse $v_x(t)$ et sa position $x(t)$ au cours du temps ainsi que la distance maximale parcourue.

Solution: Le vecteur accélération de l'objet $\overrightarrow{a}(M) = -\alpha\overrightarrow{v}(M)$. Le mouvement a lieu selon l'axe (Ox), donc les deux vecteurs sont dirigé par $\overrightarrow{u_x}$.
Ainsi $\ddot{x} = -\alpha\dot{x}$, soit $\dfrac{\dot{x}}{\mathrm{d}t} + \alpha\dot{x} = 0$
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $\dot{x}$: $\dot{x}(t) = Ae^{-\alpha t}$, avec $\dot{x}(0) = v_0 = A$, donc $\boxed{\dot{x}(t) = v_0 e^{-\alpha t}}$

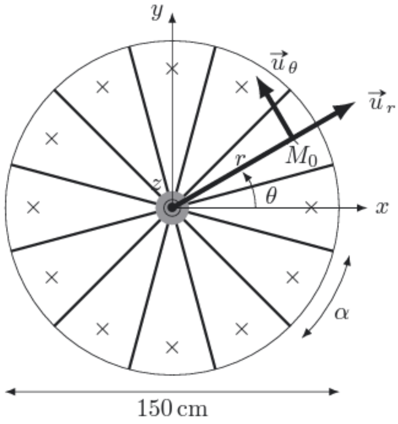
On intègre une deuxième fois : $x(t) = \dfrac{-v_0}{\alpha}e^{-\alpha t} + B$, avec $x(0) = 0 = -\dfrac{v_0}{\alpha} + B$

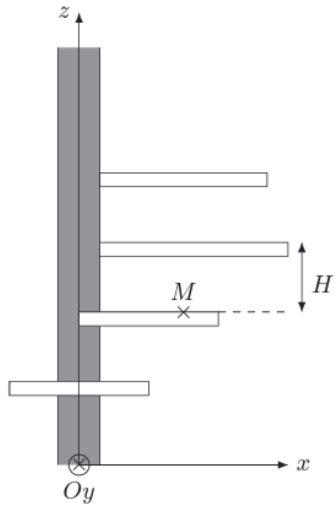
Ainsi $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}$

La distance maximale parcourue est $d = \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{v_0}{\alpha}$

Exercice n°9 Escalier en colimaçon

Un escalier en colimaçon (hélicoïdal) est constitué de quatorze marches régulièrement disposées autour d'un pilier central. La figure de gauche (vue de dessus) fait apparaitre l'angle de marche $\alpha = 30°$. La figure de droite représente les quatre premières marches et définit la hauteur de marche $H = 20$ cm.
Un usager, assimilé à un point matériel M, monte à l'étage d'une démarche régulière à raison d'une marche par seconde en restant à la distance $r = 60$ cm de Oz. Sur la figure de gauche M_0 est le projeté de M suivant un plan perpendiculaire à Oz. Les croix représentent les positions successives de M_0, pointées lorsque l'usager est sur une marche.





Nous désirons étudier le mouvement de M dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié à l'escalier et repéré par (O, x, y, z).

R1. Estimer la dérivée temporelle $\dot{z}$ de la cote z du point M. Le mouvement est-il accéléré suivant Oz ? Proposer une expression de $z(t)$ sachant que $z = 0$ à l'instant $t = 0$

Solution: On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié à l'escalier.
L'usager monte l'escalier à vitesse constante : $\dot{z} = \dfrac{H}{\Delta t}$, avec $\Delta t = 1$ s la durée nécessaire à l'usager pour monter une marche, donc $\dot{z} = 20 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = 0,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Nous nous intéressons à la rotation de M_0 autour du pilier central sachant que $\theta(0) = \theta_0 = -30°$ à l'instant $t = 0$.

R2. Qualifier le mouvement de M_0. Donner une valeur numérique de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

Solution: On étudie maintenant le mouvement de M_0 dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié à l'escalier.
Le mouvement de M_0 est un mouvement circulaire uniforme de rayon $r = 60$ cm.
L'usager monte une marche toutes les $\Delta t = 1$ s, donc M_0 parcourt un arc de cercle d'angle α en $\Delta t = 1$ s.
Ainsi $v_0 = \dfrac{\alpha r}{\Delta t}$, or, en coordonnée polaire $v_0 = r\dot{\theta}$ soit $\boxed{\omega = \dot{\theta} = \dfrac{\alpha}{\Delta t} = 30° \cdot \text{s}^{-1} = 0,52 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$

R3. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération de M_0 par rapport à $\mathscr{R}$. Calculer sa vitesse.

Solution: $\boxed{\overrightarrow{v(M_0/\mathscr{R})} = r\omega\overrightarrow{u_\theta}}$ et $\boxed{\overrightarrow{a(M_0/\mathscr{R})} = -r\omega^2\overrightarrow{u_r}}$
$v_0 = \|\overrightarrow{v(M_0/\mathscr{R})}\| = r\omega = 0,31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

R4. Quel est le lien entre $\dot{z}$ et $\dot{\theta}$?

Solution: En $\Delta t = 1$ s, l'usager fait un tour complet et monte d'une marche : $\Delta t = \dfrac{H}{\dot{z}} = \dfrac{2\pi r}{v_0} = \dfrac{2\pi}{\dot{\theta}}$
Ainsi $\dfrac{H}{\dot{z}} = \dfrac{2\pi}{\dot{\theta}}$, soit $\boxed{\dot{z} = \dfrac{H\dot{\theta}}{2\pi}}$

R5. Exprimer, dans la base $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$, les vecteurs vitesse et accélération de M par rapport à $\mathscr{R}$.

Solution: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$ Ainsi $\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z} \text{ et } \vec{a} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}}$

Exercice n°10 Vitesse d'un point à la surface de la Terre

R1. Que vaut la latitude (approximative) de Valence ?

Solution: Latitude de 45 °

R2. Quel mouvement décrit un point fixe de la Terre dans le référentiel géocentrique ?

Solution: Un point fixe de la Terre décrit un mouvement circulaire dans le référentiel géocentrique, de rayon $r = R_T \cos(\lambda)$ où λ est la latitude (mesurée à partir du plan équatorial).

R3. Exprimer le vecteur vitesse d'un point à la surface de la Terre dans le référentiel géocentrique.

Solution: On peut étudier le mouvement du point de la surface à l'aide des coordonnées polaires dans le plan du parallèle qui passe par Valence.
$\overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = R_T \cos(\lambda)\Omega_T\overrightarrow{u_\theta}$, où $\dot{\theta} = \Omega_T$ la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même. La Terre fait un tour sur elle-même en 24h : $\Omega_T = \dfrac{2\pi}{1 \text{ jour}} = \dfrac{2\pi}{24 \times 3600}$

R4. Calculer la vitesse due à la rotation de la Terre d'un point à la surface de la Terre au niveau de Valence dans le référentiel géocentrique. On rappelle que le rayon de la Terre vaut $R_T = 6370$ km.

Solution: $v = R_T \cos(\lambda)\Omega_T = 328 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1179 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$