Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)
TD n°10 Description et paramétrage du mouvement d'un point – *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7	8
Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.		✎	✎	✎	✎	✎		
Identifier les degrés de liberté d'un mouvement.	✎	✎		✎	✎	✎	✎	
Choisir un système de coordonnées adapté au problème.	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎
Étudier un mouvement à vecteur accélération constant : Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.	✎							✎
Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes sur un mouvement circulaire uniforme ou non uniforme.		✎		✎		✎	✎	
Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane.				✎				
Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.		✎		✎		✎	✎	

Parcours possibles

♪ Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2, n°3 (sauf Q1) + cahier d'entraînement :

♪ ♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°4, n°5, n°6

♪ ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : exercices n°4, n°5, n°6, n°7, n°8

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Accélération d'une cycliste ♪

Une cycliste roule prudemment sur une voie partagée, à la vitesse $v_1 = 10,8\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Puis, pour rejoindre la piste cyclable réservée, elle accélère uniformément avec l'accélération a_1. On choisit l'axe (Ox) dans la direction et le sens du mouvement de la cycliste.

R1. Quelle est la nature du mouvement ?
Exprimer la vitesse $v_x(t)$ de la cycliste à l'instant t en fonction de v_1, a_1 et t.

Solution: Rédaction !
On étudie la voiture dans le référentiel lié à la route.
On note (Ox) l'axe dans la direction et le sens du mouvement de la voiture. On considère qu'à $t = 0$, la voiture se trouve en $x = 0$, avec une vitesse v_1.
Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré dans le sens de l'axe (Ox).
$a_x = a_1$
Composante du vecteur vitesse selon $\overrightarrow{u_x}$: $v_x(t) = a_1 t + K$, or $v_x(0) = v_1 = K$, donc $\boxed{v_x(t) = a_1 t + v_1}$

R2. Au bout de combien de temps t_1 la cycliste a-t-elle atteint la vitesse v_2 (voir les données en fin d'exercice) ?

Solution: À t_1 : $v_x(t_1) = v_2 \Leftrightarrow a_1 t_1 + v_1 = v_2$, soit $\boxed{t_2 = \dfrac{v_2 - v_1}{a_1} = 6,9\ \text{s}}$

R3. Établir l'équation horaire $x(t)$ de la cycliste.

R4. Exprimer puis calculer numériquement la distance parcourue à l'instant t_1 : $d_1 = x(t_1)$.

Solution: Position : $x(t) = a_1 \dfrac{t^2}{2} + v_1 t + K'$, or à $t = 0$, $x(0) = 0 = K'$

Ainsi $\boxed{d_1(t) = x(t) = a_1 \dfrac{t^2}{2} + v_1 t}$

$$\begin{aligned} d(t_1) &= a_1 \frac{t_1^2}{2} + v_1 t_1 \\ &= t_1 \left(\frac{a_1 t_1}{2} + v_1 \right) \\ &= \frac{v_2 - v_1}{a_1} \left(\frac{v_2 - v_1}{2} + v_1 \right) \\ &= \frac{v_2 - v_1}{a_1} \times \frac{v_2 + v_1}{2} \\ &= \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a_1} \\ &= 203\ \text{m} \end{aligned}$$

Une fois sur la route, la cycliste roule à la vitesse v_2 pendant $t_2 = 4$ min.

R5. Quelle est la nature du mouvement ? Quelle est la distance d_2 parcourue par la cycliste pendant ces 4 min ?

Solution: Le mouvement est maintenant rectiligne uniforme, donc la distance parcourue vaut $d_2 = v_2 t_2 =\ \text{m}$

À la distance $d_3 = 20$ m d'un feu rouge, elle ralentit avec une décélération constante a_3. On note $t = 0$ l'instant auquel elle commence à freiner, et on déplace l'origine O de l'axe (Ox) à l'endroit où elle commence à freiner.

R6. Exprimer $v_x(t)$ et $x(t)$ pendant cette phase de décélération.

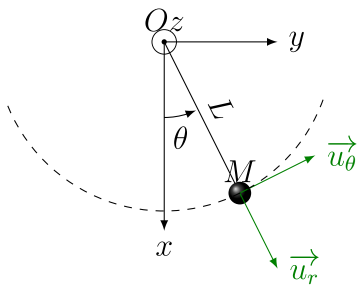
R7. En déduire la durée t_3 nécessaire pour s'arrêter en fonction de a_3 et v_2.

R8. En déduire l'expression de a_3 puis en calculer sa valeur.

Données : $v_1 = 10,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; $v_2 = 25,2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $a_1 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Exercice n°2 Pendule ♪

On considère un pendule de longueur L constante, oscillant autour de Oz, dans le plan Oxy.
On étudie le mouvement du point M accroché à l'extrémité du pendule.



Solution: Cf paragraphe du cours sur l'étude du mouvement circulaire NON uniforme ! Ce sont exactement les mêmes calculs.

R1. Quel est le mouvement de M dans le référentiel lié au repère $Oxyz$? Quel est le système de coordonnées pertinent pour l'étudier ?

Solution: Le mouvement de M est circulaire de rayon L et de centre O. Le système de coordonnées polaires de centre O est le plus pertinent pour l'étude de ce mouvement.

R2. Exprimer le vecteur position.

Solution: $\overrightarrow{OM} = L\overrightarrow{u_r}$

R3. Déterminer l'expression du vecteur vitesse du pendule en fonction de $\dot{\theta}$ et L.

Solution: En dérivant : $\overrightarrow{v} = L\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

R4. En déduire l'expression de son vecteur accélération en fonction de $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ et L.

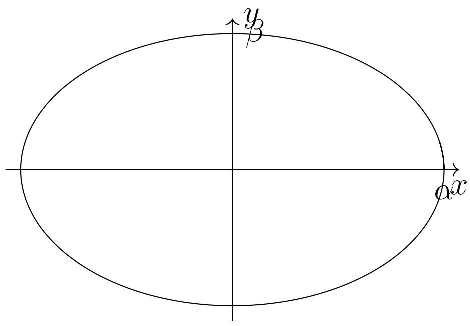
Solution: En redérivant, avec L constant et $\dot{\theta}$ variable :
$\overrightarrow{a} = L\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - L\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$

Exercice n°3 Trajectoire ♪

Un point M décrit un mouvement d'équations paramétriques $\begin{cases} x(t) &= \alpha\cos(\omega t) \\ y(t) &= \beta\sin(\omega t) \end{cases}$
où α, β et ω sont des constantes positives.

R1. Quelle est la nature de la trajectoire ? Tracer l'allure de la trajectoire. Quelle est la période de rotation ?

Solution: La trajectoire est une $\boxed{\text{ellipse}}$.



La période de rotation T est la plus petite durée telle que $\forall t : \overrightarrow{OM}(t+T) = \overrightarrow{OM}(t) \Leftrightarrow x(t+T) = x(t)$ et $y(t+T) = y(t)$. Ainsi $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

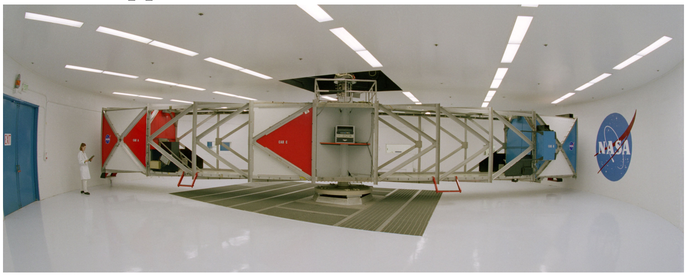
R2. Exprimer les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}$ et accélération $\overrightarrow{a}$ en coordonnées cartésiennes.

Solution: Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v} = \omega\Big(-\alpha\sin(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \beta\cos(\omega t)\overrightarrow{u_y}\Big)$
Vecteur accélération : $\overrightarrow{a} = -\omega^2\Big(\alpha\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \beta\sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}\Big)$

R3. Exprimer les normes du vecteur vitesse et du vecteur accélération à l'instant $t = \frac{\pi}{4\omega}$.

Exercice n°4 Centrifugeuse ♪

Les astronautes subissent régulièrement des accélérations de $2g$ à $9g$ (avec $g = 9,8$ m · s^{-2}, l'accélération de la pesanteur terrestre), qu'une personne non entraînée ne pourrait supporter.



Pour s'habituer à ces accélérations, Sophie Adenot, astronaute française de l'ESA (qui va se rendre à bord de l'ISS au printemps 2026), s'est entraînée dans la centrifugeuse de la NASA.
Le bras en rotation est de diamètre $D = 17,6$ m, et tourne autour d'un axe vertical passant par le centre du bras.

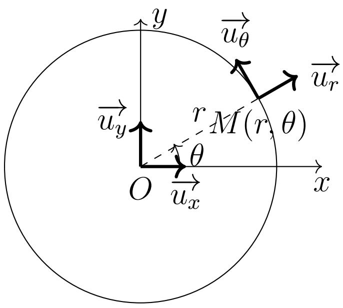
La centrifugeuse respecte les deux contraintes suivantes :

- En régime permanent de rotation, la norme maximale de l'accélération doit être de $10 \times g$.
- Lors du démarrage, le bras doit atteindre $\omega_f = 30$ tours · min^{-1} en $t_f = 1$ min.

On étudie le mouvement de l'astronaute dans le référentiel terrestre.

R1. Représenter un schéma avec l'astronaute, la base d'étude adaptée ici, et les notations nécessaires.

Solution: L'**astronaute** décrit, **dans le référentiel terrestre**, un mouvement circulaire de rayon r, avec r pouvant aller de 0 à $\dfrac{D}{2}$.



R2. Exprimer le vecteur accélération de l'astronaute A lorsque le bras tourne à vitesse angulaire ω_1 constante. En déduire la norme a de l'accélération.

Solution:
Le mouvement est circulaire de rayon r, à vitesse angulaire constante, donc $\omega_1 = \dot{\theta}$ est constante.

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Vecteur position :} & \overrightarrow{OM} & = & r\overrightarrow{u_r} \\
\text{Vecteur vitesse :} & \overrightarrow{v}(M) & = & r\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} \\
 & \overrightarrow{v}(M) & = & r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\
 & \overrightarrow{v}(M) & = & r\omega_1\overrightarrow{u_\theta} \\
\text{Vecteur accélération :} & \overrightarrow{a}(M) & = & r\omega\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} \\
 & \overrightarrow{a}(M) & = & r\omega(-\dot{\theta})\overrightarrow{u_r} \\
 & \overrightarrow{a}(M) & = & -r\omega_1^2\overrightarrow{u_r}
\end{array}$$

$a = \|\overrightarrow{a}\| = r\omega_1^2$

R3. Où est-elle maximale ?
En déduire la valeur de ω_1 (en rad/s puis en tours/min), et de la norme de la vitesse v_1 de l'astronaute quand l'accélération vaut $10g$.

Solution: a est maximale pour $r = \dfrac{D}{2}$.

Pour une accélération de $10g$: $a = \dfrac{D}{2}\omega_1^2 = 10g$, soit $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\dfrac{20g}{D}} = 3,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 32 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1}}$

R4. Représenter sur le schéma les vecteurs vitesse et accélération durant cette phase.

Solution: cf ci-dessus

On s'intéresse à la phase de démarrage.

R5. Exprimer le vecteur accélération de l'astronaute A lors du démarrage.

Solution: Au démarrage, $\omega = \dot{\theta}$ varie.

$$\begin{aligned}
\text{Vecteur position : } \quad \overrightarrow{OM} &= \frac{D}{2}\overrightarrow{u_r} \\
\text{Vecteur vitesse : } \quad \overrightarrow{v}(M) &= \frac{D}{2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} \\
\overrightarrow{v}(M) &= \frac{D}{2}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\
\overrightarrow{v}(M) &= \frac{D}{2}\omega(t)\overrightarrow{u_\theta} \\
\text{Vecteur accélération : } \quad \overrightarrow{a}(M) &= \frac{D}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_\theta} + \omega\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t}\right) \\
\overrightarrow{a}(M) &= \frac{D}{2}(\dot{\omega}\overrightarrow{u_\theta} - \omega^2\overrightarrow{u_r})
\end{aligned}$$

R6. On suppose que l'accélération angulaire est constante $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \alpha$.
Exprimer $\omega(t)$ au cours de la phase d'accélération en fonction de α et t.

Solution: $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha$
Par primitive : $\omega(t) = \alpha t + A$, or $\omega(0) = 0 = A$. Ainsi : $\omega(t) = \alpha t$
Ainsi $\overrightarrow{a} = \dfrac{D}{2}(\alpha\overrightarrow{u_\theta} - (\omega t)^2\overrightarrow{u_r})$

R7. Déterminer la valeur de α pour que la condition citée soit vérifiée.

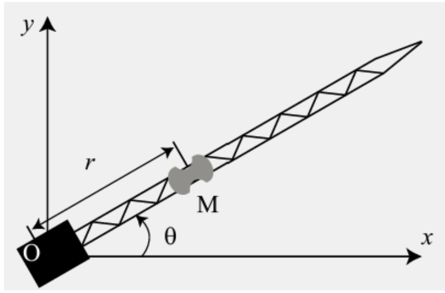
Solution: À t_f, $\omega(t_f) = \omega_f$, donc $\alpha t_f = \omega_f$, donc $\boxed{\alpha = \dfrac{\omega_f}{t_f} = 0,052 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}}$

R8. Représenter sur le schéma les vecteurs vitesse et accélération durant cette phase.

Solution:

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°5 Grue ♪ ♪



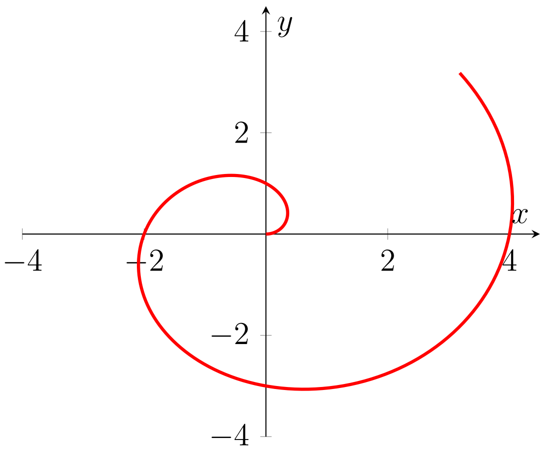
Le bras d'une grue tourne dans un plan horizontal (Oxy) à la vitesse angulaire constante ω_0. Sur ce bras, un chariot se déplace à vitesse constante v_0. À l'instant initial, le chariot se trouve au centre de rotation O du bras. L'axe (Ox) est fixe par rapport au sol et confondu avec le bras de la grue à l'instant initial.

Le mouvement est observé depuis le sol. Les équations horaires du chariot dans le repère polaire $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ sont donc $\begin{cases} r(t) = v_0 t \\ \theta(t) = \omega_0 t \end{cases}$

R1. Déterminer l'expression de la trajectoire $r(\theta)$.

> **Solution:** $t = \dfrac{\theta}{\omega_0}$, donc $\boxed{r(\theta) = \dfrac{v_0}{\omega_0}t}$

R2. Calculer r pour $\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ 3\dfrac{\pi}{2},\ 2\pi,\ 9\dfrac{\pi}{4}$.
Tracer qualitativement la trajectoire du chariot. Quelle est sa nature ?

> **Solution:** $r(0) = 0$; $r(\pi/4) = \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{\pi}{4} = 0,5$ m ; $r(\pi/2) = 1$ m ; $r(\pi) = 2$ m ; $r(3\pi/2) = 3$ m ; $r(2\pi) = 4$ m ; $r(9\pi/4) = 4,5$ m
>
> 
>

R3. À partir des équations horaires dans le repère polaire, établir l'expression du vecteur vitesse.

> **Solution:** Vecteur vitesse :
>
> $$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}r\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\ &= v_0\overrightarrow{u_r} + v_0\omega_0 t\overrightarrow{u_\theta} \end{aligned}$$

R4. Exprimer la vitesse en $\theta = 0$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Les tracer sur un schéma.

> **Solution:** En $\theta = 0$: $\vec{v} = v_0\overrightarrow{u_r}$
> En $\theta = \pi/2$: $\vec{v} = v_0\overrightarrow{u_r} + v_0\dfrac{\pi}{2}\overrightarrow{u_\theta}$

R5. Exprimer la norme de la vitesse pour $\theta = 0$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Solution: En $\theta = 0$: $\|\overrightarrow{v}\| = v_0$
En $\theta = \pi/2$: $\|\overrightarrow{v}\| = v_0\sqrt{1+\pi^2/4}$

R6. À partir du vecteur vitesse, établir l'expression du vecteur accélération.

Solution: Vecteur accélération :

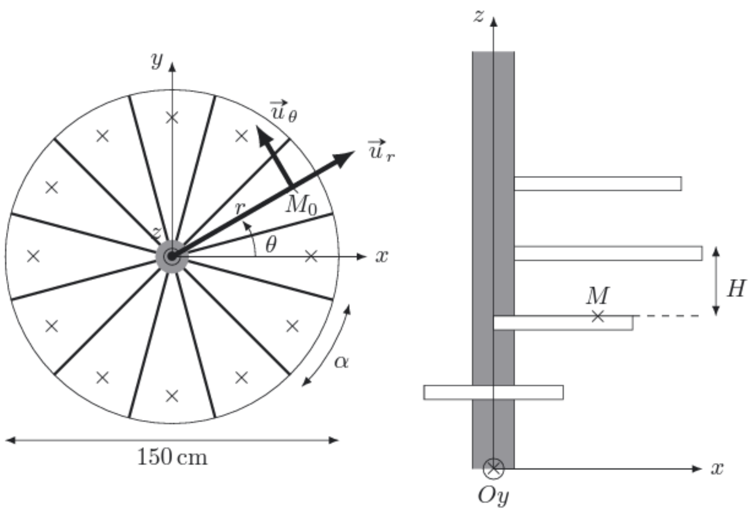
$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}v_0\overrightarrow{u_r} + v_0\omega_0 t\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} \\ &= v_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + v_0\omega_0\overrightarrow{u_\theta} - v_0\omega_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_r} \\ &= v_0\omega_0\overrightarrow{u_\theta} + v_0\omega_0\overrightarrow{u_\theta} - v_0\omega_0^2\overrightarrow{u_r} \\ &= -v_0\omega_0^2\overrightarrow{u_r} + 2\omega_0 v_0\overrightarrow{u_\theta}\end{aligned}$$

Rq : on retrouve les composantes $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, où $\ddot{r} = 0$ et $r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r}$ où $\ddot{\theta} = 0$

Données : $v_0 = 2,00\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$; $\omega_0 = \pi\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Exercice n°6 Escalier en colimaçon ♪ ♪

Un escalier en colimaçon (hélicoïdal) est constitué de quatorze marches régulièrement disposées autour d'un pilier central. La figure de gauche (vue de dessus) fait apparaitre l'angle de marche $\alpha = 30°$. La figure de droite représente les quatre premières marches et définit la hauteur de marche $H = 20$ cm.
Un usager, assimilé à un point matériel M, monte à l'étage d'une démarche régulière à raison d'une marche par seconde en restant à la distance $r = 60$ cm de Oz. Sur la figure de gauche M_0 est le projeté de M suivant un plan perpendiculaire à Oz. Les croix représentent les positions successives de M_0, pointées lorsque l'usager est sur une marche.



Nous désirons étudier le mouvement de M dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié à l'escalier et repéré par (O, x, y, z).

R1. Estimer la dérivée temporelle $\dot{z}$ de la cote z du point M. Le mouvement est-il accéléré suivant Oz ? Proposer une expression de $z(t)$ sachant que $z = 0$ à l'instant $t = 0$

Solution: On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié à l'escalier.
L'usager monte l'escalier à vitesse constante : $\dot{z} = \dfrac{H}{\Delta t}$, avec $\Delta t = 1$ s la durée nécessaire à l'usager pour monter une marche, donc $\dot{z} = 20\ \mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 0,20\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Nous nous intéressons à la rotation de M_0 autour du pilier central sachant que $\theta(0) = \theta_0 = -30°$ à l'instant $t = 0$.

R2. Qualifier le mouvement de M_0. Donner une valeur numérique de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

Solution: On étudie maintenant le mouvement de M_0 dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié à l'escalier.
Le mouvement de M_0 est un mouvement circulaire uniforme de rayon $r = 60$ cm.
L'usager monte une marche toutes les $\Delta t = 1$ s, donc M_0 parcourt un arc de cercle d'angle α en $\Delta t = 1$ s.

Ainsi $v_0 = \dfrac{\alpha r}{\Delta t}$, or, en coordonnée polaire $v_0 = r\dot{\theta}$ soit $\boxed{\omega = \dot{\theta} = \dfrac{\alpha}{\Delta t} = 30° \cdot \mathrm{s}^{-1} = 0,52 \text{ rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}}$

R3. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération de M_0 par rapport à $\mathscr{R}$. Calculer sa vitesse.

Solution: $\boxed{\overrightarrow{v(M_0/\mathscr{R})} = r\omega\overrightarrow{u_\theta}}$ et $\boxed{\overrightarrow{a(M_0/\mathscr{R})} = -r\omega^2\overrightarrow{u_r}}$
$v_0 = \|\overrightarrow{v(M_0/\mathscr{R})}\| = r\omega = 0,31 \text{ m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

R4. Quel est le lien entre $\dot{z}$ et $\dot{\theta}$?

Solution: En $\Delta t = 1$ s, l'usager fait un tour complet et monte d'une marche : $\Delta t = \dfrac{H}{\dot{z}} = \dfrac{2\pi r}{v_0} = \dfrac{2\pi}{\dot{\theta}}$
Ainsi $\dfrac{H}{\dot{z}} = \dfrac{2\pi}{\dot{\theta}}$, soit $\boxed{\dot{z} = \dfrac{H\dot{\theta}}{2\pi}}$

R5. Exprimer, dans la base $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$, les vecteurs vitesse et accélération de M par rapport à $\mathscr{R}$.

Solution: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$ Ainsi $\boxed{\overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z} \text{ et } \overrightarrow{a} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}}$

Exercice n°7 Vitesse d'un point à la surface de la Terre ♪ ♪ ♪

R1. Que vaut la latitude (approximative) de Valence ?

Solution: Latitude de 45 °

R2. Quel mouvement décrit un point fixe de la Terre dans le référentiel géocentrique ?

Solution: Un point fixe de la Terre décrit un mouvement circulaire dans le référentiel géocentrique, de rayon $r = R_T \cos(\lambda)$ où λ est la latitude (mesurée à partir du plan équatorial).

R3. Exprimer le vecteur vitesse d'un point à la surface de la Terre dans le référentiel géocentrique.

Solution: On peut étudier le mouvement du point de la surface à l'aide des coordonnées polaires dans le plan du parallèle qui passe par Valence.
$\overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = R_T\cos(\lambda)\Omega_T\overrightarrow{u_\theta}$, où $\dot{\theta} = \Omega_T$ la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même. La Terre fait un tour sur elle-même en 24h : $\Omega_T = \dfrac{2\pi}{1 \text{ jour}} = \dfrac{2\pi}{24 \times 3600}$

R4. Calculer la vitesse due à la rotation de la Terre d'un point à la surface de la Terre au niveau de Valence dans le référentiel géocentrique. On rappelle que le rayon de la Terre vaut $R_T = 6370$ km.

Solution: $v = R_T\cos(\lambda)\Omega_T = 328 \text{ m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 1179 \text{ km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$

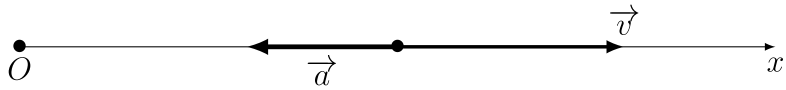
R5. Exprimer puis calculer numériquement l'accélération d'un point fixe situé à Valence.

Exercice n°8 Freinages par frottement ♪ ♪ ♪

On considère un objet assimilé à un point matériel M susceptible de se déplacer selon l'axe Ox.
À $t = 0$, il se trouve en O et son vecteur vitesse vaut $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ avec $v_0 = 1,0 \text{ m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

R1. L'objet subit une force de frottement solide de sorte que son vecteur accélération $\overrightarrow{a}(M)$ peut être supposé constant et égal à $\overrightarrow{a_0} = -a_0\overrightarrow{u_x}$ avec $a_0 = 1,0\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, jusqu'à son arrêt.
Déterminer sa vitesse $v_x(t)$ et sa position $x(t)$ au cours du temps ainsi que la distance totale parcourue.

Solution:



Vecteur accélération de l'objet : $\overrightarrow{a}(M) = -a_0\overrightarrow{u_x}$.
On a donc $\ddot{x} = -a_0$. En l'intégrant une première fois, on a $\dot{x}(t) = -a_0 t + A$, avec $\dot{x}(0) = v_0 = 0 + A$, donc $\boxed{\dot{x}(t) = -a_0 t + v_0}$

On intègre une deuxième fois : $x(t) = \dfrac{-a_0 t^2}{2} + v_0 t + B$, avec $x(0) = 0$, donc $B = 0$. Ainsi $\boxed{x(t) = -\dfrac{a_0}{2}t^2 + v_0 t}$

L'objet s'arrête à l'instant τ tel que $\dot{x}(\tau) = 0$, soit $\tau = \dfrac{v_0}{a_0}$

L'objet a alors parcouru la distance $d = x(\tau) = -\dfrac{a_0}{2}\tau^2 + v_0\tau = -\dfrac{a_0}{2}\dfrac{v_0^2}{a_0^2} + v_0 \times \dfrac{v_0}{a_0}$, soit $\boxed{d = \dfrac{a_0^2}{2v_0}}$

R2. L'objet subit une force de frottement fluide de sorte que son vecteur accélération $\overrightarrow{a}(M)$ est relié à sa vitesse $\overrightarrow{v}(M)$ par la relation $\overrightarrow{a}(M) = -\alpha\overrightarrow{v}(M)$ avec $\alpha = 0,10\ \mathrm{s}^{-1}$.
Déterminer sa vitesse $v_x(t)$ et sa position $x(t)$ au cours du temps ainsi que la distance maximale parcourue.

Solution: Le vecteur accélération de l'objet $\overrightarrow{a}(M) = -\alpha\overrightarrow{v}(M)$. Le mouvement a lieu selon l'axe (Ox), donc les deux vecteurs sont dirigé par $\overrightarrow{u_x}$.
Ainsi $\ddot{x} = -\alpha\dot{x}$, soit $\dfrac{\dot{x}}{\mathrm{d}t} + \alpha\dot{x} = 0$
On reconnaît une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $\dot{x}$: $\dot{x}(t) = Ae^{-\alpha t}$, avec $\dot{x}(0) = v_0 = A$, donc $\boxed{\dot{x}(t) = v_0 e^{-\alpha t}}$

On intègre une deuxième fois : $x(t) = \dfrac{-v_0}{\alpha}e^{-\alpha t} + B$, avec $x(0) = 0 = -\dfrac{v_0}{\alpha} + B$

Ainsi $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}$

La distance maximale parcourue est $d = \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{v_0}{\alpha}$