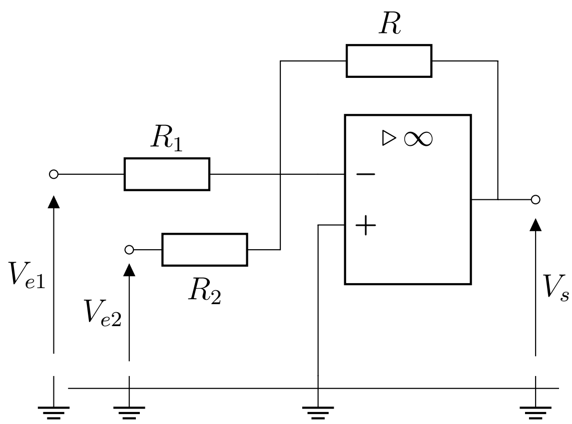
Thème I. Ondes et signaux (Électricité)
TD n°9 Amplificateurs Linéaires Intégrés Filtres actifs — *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4
Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de fonctionnement en régime linéaire.	✎	✎	✎	✎
Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur.			✎	✎
Déterminer les impédances d'entrée de ces montages.		✎		
Mettre en œuvre un filtre actif.		✎	✎	✎
Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.			✎	
Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur.				✎
Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.		✎	✎	

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Sommateur inverseur

On étudie le montage ci-contre, où l'ALI est supposé idéal.

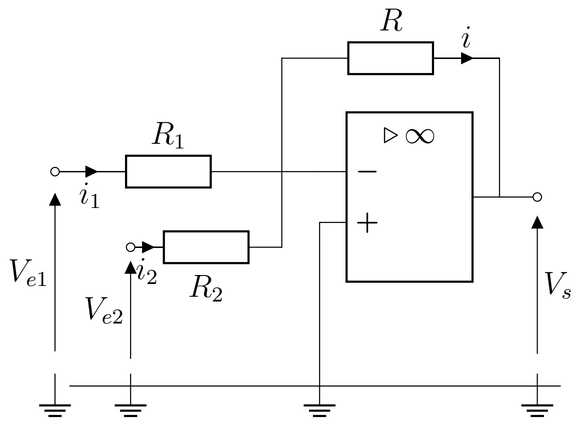


R1. Pourquoi peut-on considérer qu'il fonctionne en régime linéaire ?

> **Solution:** La présence de la rétroaction sur la borne inverseuse, sans rétroaction sur la borne non inverseuse, peut laisser supposer un fonctionnement en régime linéaire.

R2. Établir l'expression de V_s en fonction de V_{e1} et V_{e2}.

> **Solution:**



Le courant entrant dans la bornes ⊖ est nul, donc la loi des nœuds en $E\ominus$ s'écrit : $i_1 + i_2 = i$

D'après la loi d'Ohm : $i_1 = \dfrac{V_{e1} - V^-}{R_1}$; $i_2 = \dfrac{V_{e2} - V^-}{R_2}$; $i = \dfrac{V^- - V_s}{R}$

L'ALI étant idéal et fonctionnant en régime idéal, $V^- = V^+$, or $V^+ = 0$

Ainsi la loi des nœuds peut s'écrire : $\dfrac{V_{e1}}{R_1} + \dfrac{V_{e2}}{R_2} = -\dfrac{V_s}{R}$

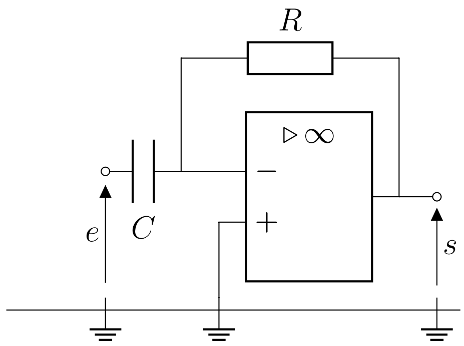
Soit $\boxed{V_s = -R\left(\dfrac{V_{e1}}{R_1} + \dfrac{V_{e2}}{R_2}\right)}$

R3. Justifier le nom donné au montage quand $R_1 = R_2 = R$.

Solution: Dans ce cas : $\boxed{V_s = -(V_{e1} + V_{e2})}$: le montage renvoie l'opposée de la somme des deux tensions en entrée.

Exercice n°2 Dérivateur

On étudie le montage ci-contre, où l'ALI est supposé idéal.

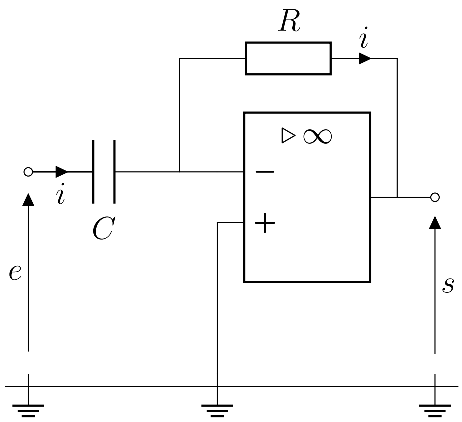


R1. Pourquoi l'ALI peut-il fonctionner en régime linéaire ? On se placera dans ce cadre-là dans la suite.

Solution: L'ALI peut fonctionner en régime linéaire grâce à la rétroaction sur la borne inverseuse.

R2. Établir la fonction de transfert du montage.

Solution: Le condensateur et la résistance sont en série, car aucun courant n'entre dans l'entrée inverseuse.



La relation du pont diviseur de tension permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\underline{e} - \underline{V^-} &= \frac{\dfrac{1}{Cj\omega}}{\dfrac{1}{Cj\omega} + R}(\underline{e} - \underline{s}) \\
\underline{e} - \underline{V^+} &= \frac{1}{1 + RCj\omega}(\underline{e} - \underline{s}) \\
(1 - RCj\omega)\underline{e} - \underline{e} &= -\underline{s} \\
\frac{\underline{s}}{\underline{e}} &= RCj\omega
\end{aligned}$$

Plus simplement ici, on aurait pu écrire le fait que l'intensité à travers C et R était égale :

$$\begin{aligned}
Cj\omega(\underline{e} - \underline{V^-}) &= \frac{\underline{V^-} - \underline{s}}{R} \\
Cj\omega\underline{e} &= \frac{\underline{s}}{R} \\
\frac{\underline{s}}{\underline{e}} &= RCj\omega
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\underline{H} = RCj\omega}$

R3. Montrer que le montage réalise une dérivation.

Solution: D'après la relation précédente :

$$\begin{aligned}
\underline{s} &= RCj\omega\underline{e} \\
&= RC\frac{\mathrm{d}\underline{e}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{s(t) = RC\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}}$: le montage réalise bien une dérivation du signal d'entrée.

R4. En utilisant la représentation complexe, exprimer l'impédance d'entrée du montage.

Solution:

$$
\begin{aligned}
\underline{i} &= \frac{\underline{e} - \underline{V^-}}{\underline{Z_c}} \\
\underline{i} &= Cj\omega\underline{e} \\
\underline{Z_e} &= \frac{\underline{e}}{\underline{i}} \\
&= \frac{1}{Cj\omega}
\end{aligned}
$$

R5. On alimente le montage avec la tension d'entrée $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.
À partir de quelle pulsation, ce montage ne fonctionne-t-il plus linéairement ?
Application numérique pour $E_0 = 1,0$ V et $RC = 1,0.10^{-3}$ s.

Solution: Le montage ne fonctionne plus linéairement si la valeur absolue de la tension de sortie dépasse $V_{\text{sat}} \approx 15$ V.
Il faut donc trouver une condition sur s pour que $|s|$ reste toujours inférieur à V_{sat}.

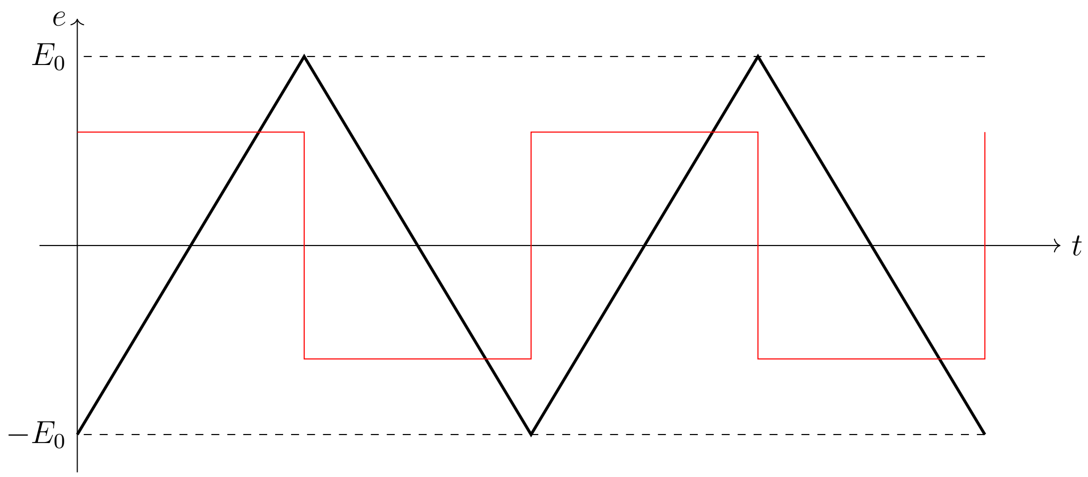
$$
\begin{aligned}
s(t) &= RC\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \\
&= -RC\omega E_0 \sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

La valeur maximale de $|s|$ est prise quand $\sin(\omega t) = \pm 1$, et vaut donc $|s|_{\max} = RC\omega E_0$
Pour que le circuit fonctionne en régime linéaire, il faut que : $RC\omega E_0 < V_{\text{sat}}$, ce qui est possible tant que $\boxed{\omega < \dfrac{V_{\text{sat}}}{RCE_0}}$

À partir de $\boxed{\omega = \dfrac{V_{\text{sat}}}{RCE_0} = 15.10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$ (soit une fréquence de 2,4 kHz), le montage ne fonctionne plus linéairement.

R6. Tracer l'allure du signal de sortie si le signal d'entrée est de la forme ci-dessous.

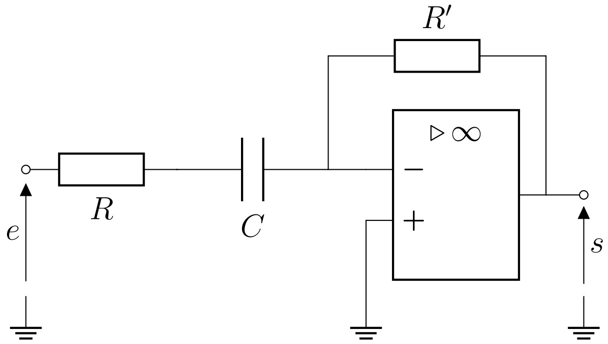
Solution:



II Exercices d'approfondissement

Exercice n°3 Filtre actif amplificateur

On étudie le montage ci-contre, où l'ALI est supposé idéal.



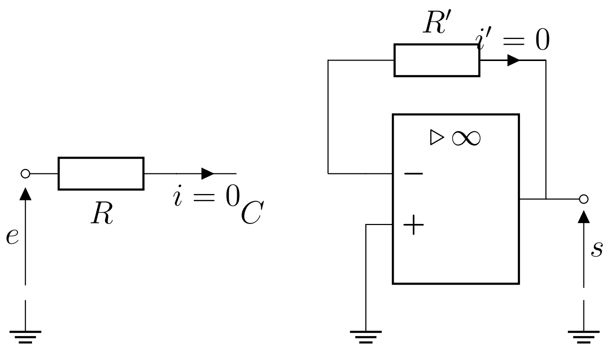
R1. Pourquoi peut-on supposer que l'ALI fonctionne en régime linéaire ?

> **Solution:** L'ALI peut fonctionner en régime linéaire grâce à la rétroaction sur la borne inverseuse.

R2. Reproduire le circuit à basse et haute fréquence en utilisant les comportements asymptotiques du condensateur. En déduire l'expression de s en fonction de e, à basse et haute fréquence.
Quelle est la nature du filtre ?

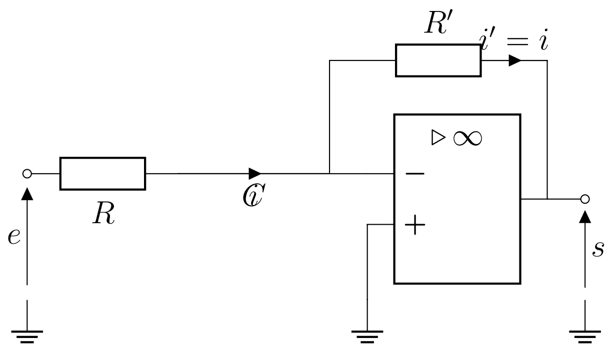
> **Solution:**

À basse fréquence :



La tension aux bornes de R' est donc nulle, comme le potentiel V^- est nul, alors $\boxed{s = 0}$

À haute fréquence :



Les deux résistances sont en série :

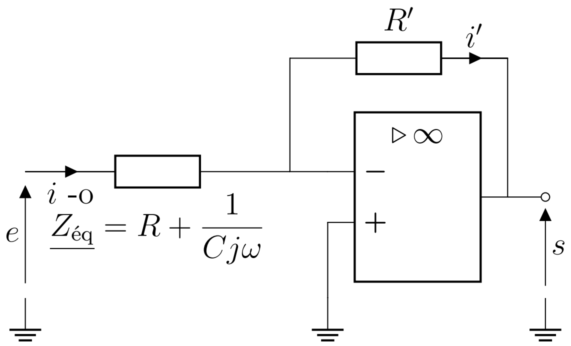
$$\begin{aligned} i &= i' \\ \frac{e-0}{R} &= \frac{0-s}{R'} \\ s &= \frac{-R'}{R}e \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

R3. Établir la fonction de transfert du montage et la mettre sous forme canonique : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 - j\dfrac{\omega_c}{\omega}}$

Identifier les expressions de ω_c et ω.

> **Solution:**
> On commence par associer R et C en série :



$$\begin{aligned}
\underline{i} &= \underline{i'}\\
\frac{\underline{e}-0}{\underline{Z}_{\text{éq}}} &= \frac{0-\underline{s}}{R'}\\
\frac{\underline{s}}{\underline{e}} &= -\frac{R'}{\underline{Z}_{\text{éq}}}\\
\underline{H} &= -\frac{R'}{R+\dfrac{1}{Cj\omega}}\\
&= -\frac{\dfrac{R'}{R}}{1-j\dfrac{1}{RC\omega}}
\end{aligned}$$

Qui est bien de la forme demandée en identifiant $\boxed{\omega_c = \dfrac{1}{RC}}$

R4. On souhaite une pulsation de coupure $\omega_c = 1.10^4$ rad $\cdot$ s^{-1} et un gain de 20 dB en haute fréquence. Déterminer les valeurs à donner à R' et C pour $R = 1$ kΩ.

Solution: $\omega_c = \dfrac{1}{RC}$, soit $\boxed{C = \dfrac{1}{R\omega_c} = 10^{-7}\ \text{F}}$

à haute fréquence : $\underline{H} \approx -\dfrac{R'}{R}$

Le gain en dB vaut 20 dB, si le gain vaut 10, puisque $G_{\text{dB}} = 20\log(G)$.

On veut donc avoir $\dfrac{R'}{R} = 10$, soit $\boxed{R' = 10\ \text{k}\Omega}$

R5. Tracer le diagramme de Bode du filtre.

Solution:

— À haute fréquence, le diagramme de Bode en gain présente une asymptote horizontale à 20 dB.
$\phi = \pm\pi$
Or $\underline{H} = \dfrac{R'}{R\left(1+\dfrac{1}{(RC\omega)^2}\right)}\left(-1-j\dfrac{1}{RC\omega}\right)$, donc $\phi \in [-\pi, -\pi/2]$ puisque la partie réelle et la partie imaginaire sont négatives (quart inférieur gauche du plan complexe).
donc, à haute fréquence : $\phi = -\pi$

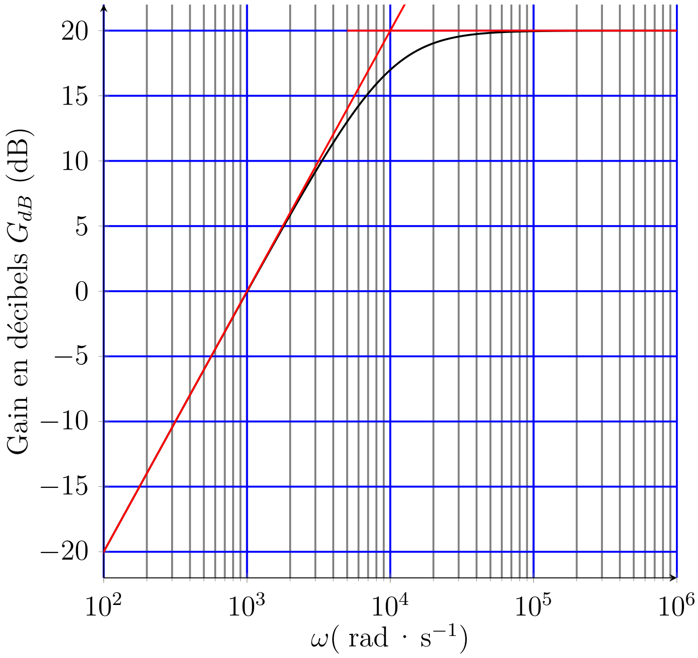
— À basse fréquence : $\underline{H} \approx \dfrac{-\dfrac{R'}{R}}{-j\dfrac{\omega_c}{\omega}}$

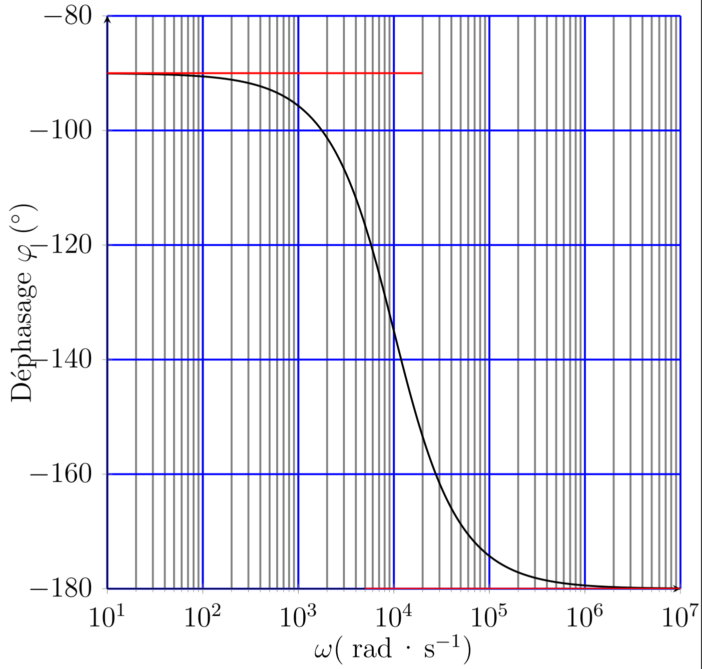
Soit $\underline{H} \approx \dfrac{R'}{R\omega_c}(-j\omega)$

Le gain en décibels s'écrit : $G_{\text{dB}} = 20\log\left(\dfrac{R'}{R}\right) + 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)$

Il s'agit de l'équation d'une asymptote oblique de pente +20 dB/dec.

La phase présente une asymptote horizontale à $-\dfrac{\pi}{2}$.





R6. On envoie en entrée du filtre une tension sinusoïdale $e(t) = E_0\cos(\omega t)$. Donner l'allure de la tension de sortie et de son spectre dans les quatre cas suivants :

- $E_0 = 1$ V et $\omega = 1.10^2$ rad · s^{-1}
- $E_0 = 1$ V et $\omega = 1.10^5$ rad · s^{-1}
- $E_0 = 3$ V et $\omega = 1.10^2$ rad · s^{-1}
- $E_0 = 3$ V et $\omega = 1.10^5$ rad · s^{-1}

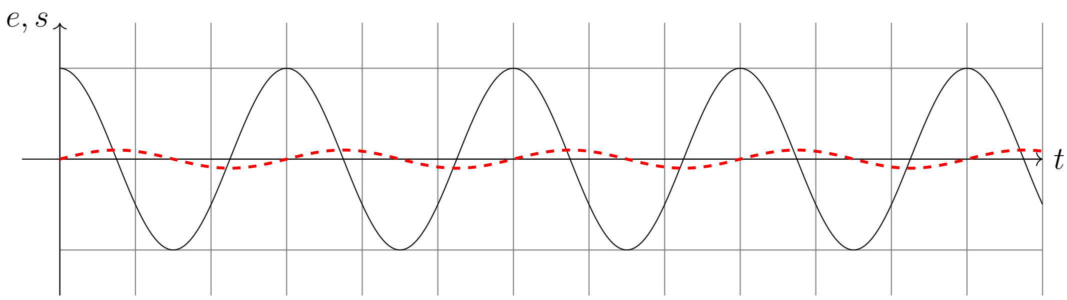
Solution:

- $E_0 = 1$ V et $\omega = 1.10^2$ rad · s^{-1}

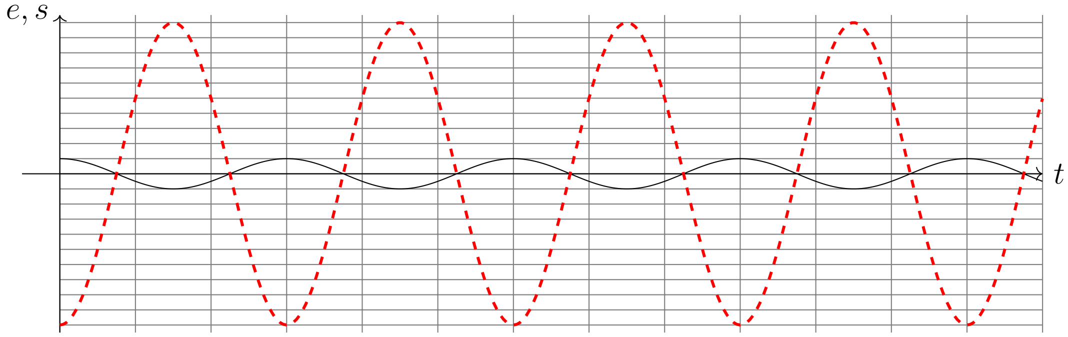
  La pulsation est 100 fois plus petite que la pulsation de coupure, deux décades avant la coupure, l'atténuation est de −40 dB par rapport aux signaux à haute fréquence, ce qui correspond ici à une atténuation de −20 dB, donc d'un facteur 10.

  Le déphasage, à basse fréquence vaut $-\dfrac{\pi}{2}$.

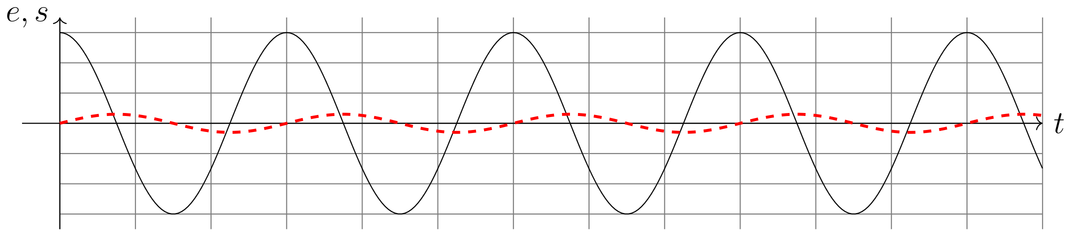
  Ainsi : $\boxed{s(t) = \dfrac{E_0}{10}\cos(\omega t - \pi/2) = \dfrac{E_0}{10}\sin(\omega t)}$



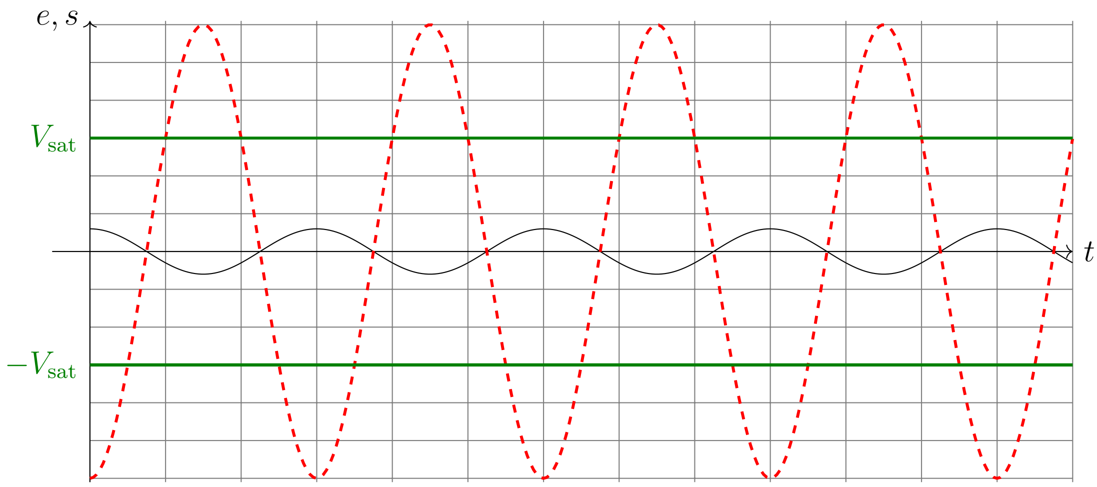
- $E_0 = 1$ V et $\omega = 1.10^5$ rad $\cdot$ s^{-1}
  La pulsation est 10 fois plus grande que la pulsation de coupure, on peut considérer que le gain en dB vaut +20 dB/dec, soit une amplification d'un facteur 10.
  Le déphasage, à haute fréquence vaut environ $-\pi$.
  Ainsi : $\boxed{s(t) = 10E_0\cos(\omega t - \pi) = -10E_0\cos(\omega t)}$
  L'amplitude du signal de sortie, $10E_0 = 10$ V, reste inférieur à $V_{\text{sat}} = 15$ V, donc il n'y a pas de saturation.



- $E_0 = 3$ V et $\omega = 1.10^2$ rad $\cdot$ s^{-1}
  Comme pour le premier cas, en modifiant seulement la valeur de l'amplitude.



- $E_0 = 3$ V et $\omega = 1.10^5$ rad $\cdot$ s^{-1}
  On pourrait penser obtenir comme le second cas, mais ici l'amplitude dépasse largement les 15 V, donc l'ALI va saturer en sortie.



Exercice n°4 Montage pseudo-intégrateur

R1. Représenter le montage intégrateur du cours et établir l'expression de la sortie $s(t)$ en fonction de l'entrée $e(t)$.

Solution: cf cours !

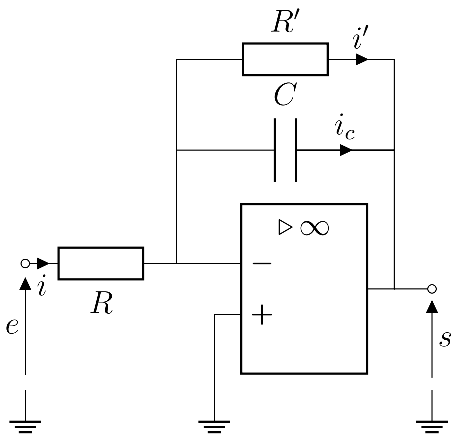
R2. Exprimer le signal de sortie si le signal d'entrée est de la forme $e(t) = E_0 + E\cos(\omega t)$.
Que va-t-il se passer ?

Solution:

$$\begin{aligned}
s(t) &= s(0) - \frac{1}{RC}\int_0^t e(t')\mathrm{d}t' \\
&= s(0) - \frac{1}{RC}\int_0^t (E_0 + E\cos(\omega t')\mathrm{d}t' \\
&= s(0) - \frac{1}{RC}\left(E_0 t + \frac{E\sin(\omega t)}{\omega}\right) \\
&= s(0) - E_0\frac{t}{RC} - \frac{E}{\omega RC}\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

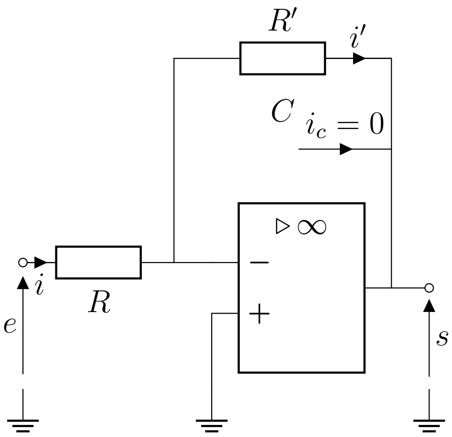
Ce signal va décroître au cours du temps (à cause du $-t$), et va donc rapidement devenir inférieur à $-V_{\text{sat}}$, le montage va alors saturer et ne fonctionnera plus du tout en tant qu'intégrateur.

En pratique, le montage intégrateur du cours ne peut pas être utilisé comme intégrateur, qui va finir par saturer, à cause des courants de polarisation qui ne sont pas rigoureusement nuls, et de l'offset existant. On utilise le montage dit « pseudo-intégrateur » ci-contre.



R3. En utilisant le comportement asymptotique du condensateur, déterminer la nature du filtre.

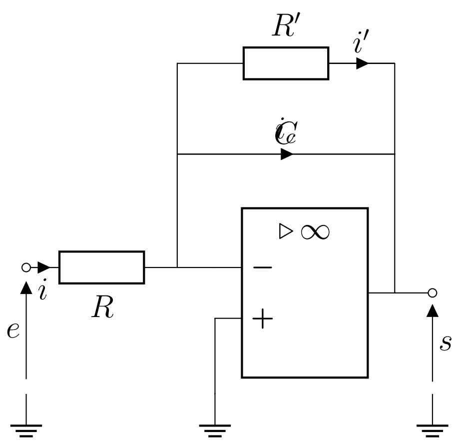
Solution:
À basse fréquence :



Les deux résistances sont en série :

$$\begin{aligned}
i &= i' \\
\frac{e-0}{R} &= \frac{0-s}{R'} \\
s &= -\frac{R'}{R}e
\end{aligned}$$

À haute fréquence :

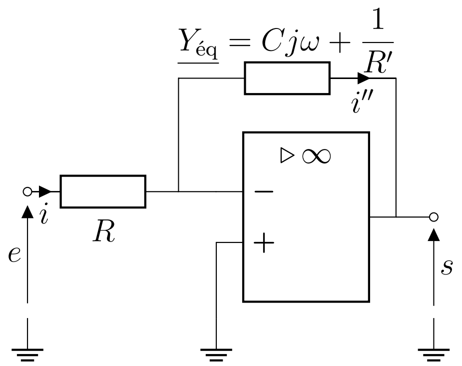


La sortie est reliée à la borne inverseuse, qui a même potentiel que la borne non inverseuse qui est reliée à la masse, ainsi $\boxed{s = 0}$

Il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

R4. Établir la fonction de transfert de ce montage.

Solution:
On peut commencer par associer les deux dipôles en parallèle :



R et en série avec $\underline{Y}_{\text{éq}}$:

$$\begin{aligned}
\underline{i} &= \underline{i''}\\
\frac{\underline{e}-0}{R} &= \underline{Y}_{\text{éq}}(0-\underline{s})\\
\underline{s} &= -\frac{1}{R\underline{Y}_{\text{éq}}}\underline{e}\\
\underline{s} &= -\frac{1}{R\left(Cj\omega+\dfrac{1}{R'}\right)}\underline{e}\\
\underline{s} &= -\frac{1}{\dfrac{R}{R'}\left(R'Cj\omega+1\right)}\underline{e}\\
\frac{\underline{s}}{\underline{e}} &= -\frac{\dfrac{R'}{R}}{1+R'Cj\omega}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\underline{H} = -\dfrac{\dfrac{R'}{R}}{1+R'Cj\omega}}$

On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure $\omega_c = \dfrac{1}{R'C}$.

R5. À quelle condition sur la pulsation, ce montage réalise-t-il une intégration ?

Solution: Ce montage réalise une intégration à haute fréquence, pour $R'C\omega \gg 1$, soit $\boxed{\omega \gg \dfrac{1}{R'C}}$