Thème I. Ondes et signaux (Électricité)
TD n°8 Filtrage linéaire — Filtres passifs — *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.		✎									
Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.				✎			✎				
Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.				✎	✎	✎	✎	✎		✎	
Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.					✎	✎	✎	✎			✎
Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.							✎	✎	✎	✎	✎
Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur.							✎	✎	✎	✎	✎

Parcours possibles

♪ Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2, n°3, n°4 + cahier d'entraînement :

♪ ♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°1, n°2, n°4, n°5, n°6.

♪ ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : exercices n°1, n°6, n°8, n°9, n°10.

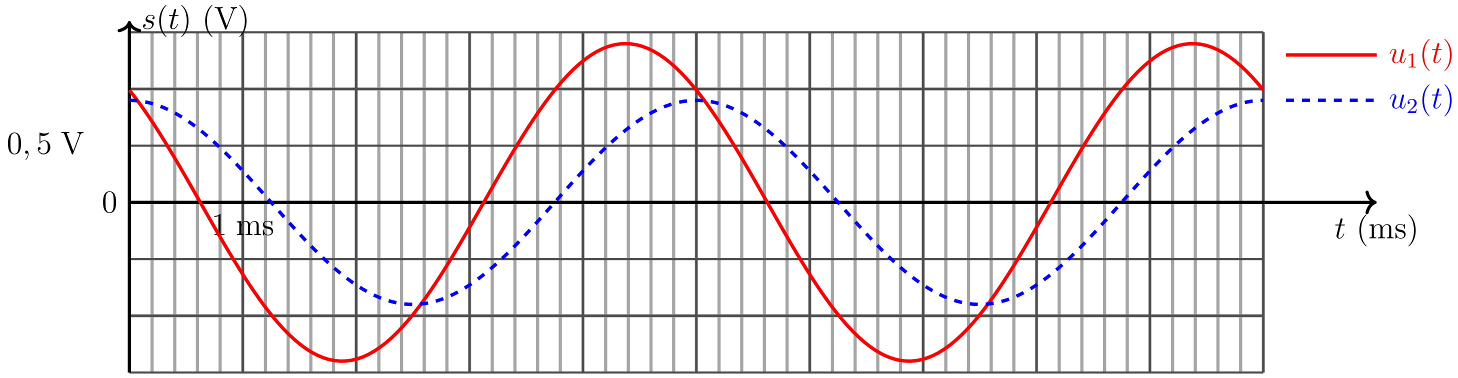
I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 TP : Mesure d'un déphasage

R1. Qui de u_1 ou u_2 est en avance sur l'autre ?

R2. Quel est le signe du déphasage de u_2 par rapport à u_1 ?

R3. Déterminer le déphasage de u_2 par rapport à u_1.



Solution: s_2 est en retard sur s_1, donc $\Delta\varphi_{2/1} < 0$

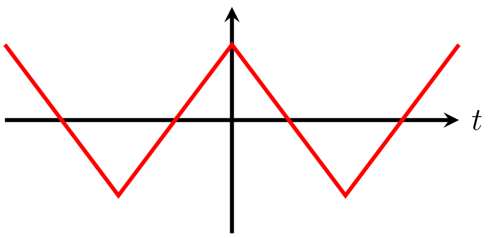
Retard : $\Delta t = 0,6$ ms et Période : $T = 5$ ms

$|\Delta\varphi_{2/1}| = 2\pi\dfrac{\Delta t}{T} = 2\pi \times \dfrac{0,6}{5} = 0,24\pi$ rad

ainsi $\boxed{\Delta\varphi_{2/1} = -0,75 \text{ rad} = -43,2°}$

Exercice n°2 Spectre d'un signal triangulaire

On étudie un signal triangulaire de période 1 ms, et d'amplitude 0, 5 V.



Le développement en série de Fourier du signal triangulaire est donné par :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8A}{((2n-1)\pi)^2} \cos((2n-1)\omega t) \quad \text{avec } \omega = 2\pi f$$

R1. Quelle est la fréquence du signal triangulaire ?

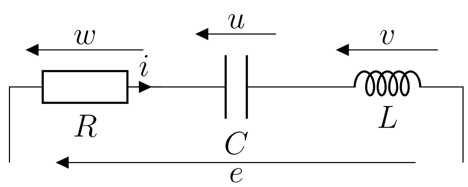
R2. Quelles sont les fréquences et amplitudes des 4 premiers harmoniques ?

R3. Tracer le spectre.

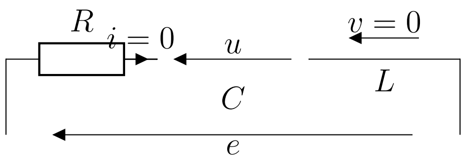
Exercice n°3 Comportements asymptotiques ♪

R1. À partir des comportements asymptotiques, assigner à chaque grandeur ci-dessous le type de filtre correspondant.

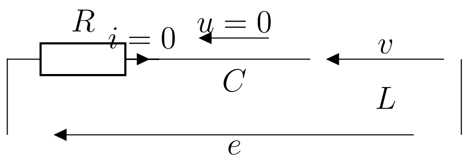
w •	• Passe-bas
u •	• Passe-bande
v •	• Passe-haut



Solution:

À BF : 

Loi des mailles : $u = e$

À HF : 

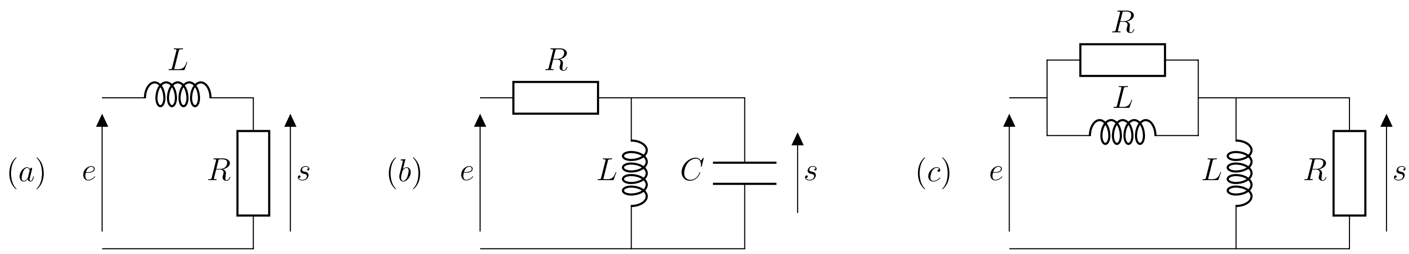
Loi des mailles : $v = e$

$u = e$ à BF et $u = 0$ à HF : c'est un passe-bas

$v = 0$ à BF et $v = e$ à HF : c'est un passe-haut

$w = 0$ à BF et HF : c'est un passe-bande

R2. Pour chacun des circuits ci-dessous, déterminer la nature du filtre.



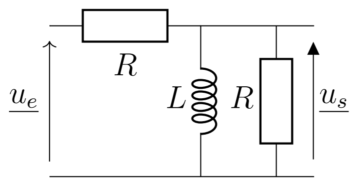
Solution: IL FAUT REPRÉSENTER LES CIRCUITS à BF et HF

Circuit de gauche : $s = e$ à BF ; $s = 0$ à HF : c'est un passe-bas

Circuit du milieu : $s = 0$ à BF et HF : c'est un passe-bande

Circuit à droite : $s = 0$ à BF ; (PDT) $s = \dfrac{e}{2}$ à HF : c'est un passe-haut.

Exercice n°4 Filtre RL ♪



On étudie le filtre ci-contre constitué d'une résistance $R = 1,0\ \text{k}\Omega$ et d'une bobine idéale d'inductance $L = 0,5\ \text{H}$.

R1. Déterminer la nature du filtre d'après le comportement asymptotique des dipôles.

Solution: À BF, la bobine est équivalente à un fil, donc u_s est la tension aux bornes d'un fil, donc $u_s = 0$: le circuit ne transmet pas les signaux basse fréquence.

À HF, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, donc (pont diviseur de tension) $u_s = \dfrac{R}{R+R}u_e = \dfrac{u_e}{2}$

Ce circuit est donc un passe-haut.

R2. Établir sa fonction de transfert.

Solution:

Association parallèle à droite : $\underline{Y_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{Lj\omega}$

Pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned}
\underline{u_s} &= \frac{\underline{Z_{\text{éq}}}}{R+\underline{Z_{\text{éq}}}}\underline{u_e} \\
\underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{1+R\times\underline{Y_{\text{éq}}}} \\
&= \frac{1}{1+R\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{Lj\omega}\right)} \\
&= \frac{1}{2+\dfrac{R}{Lj\omega}}
\end{aligned}$$

R3. Identifier la ou les affirmations fausses concernant la pulsation de coupure d'un filtre :

◯ c'est la pulsation de l'intersection des deux asymptotes du diagramme de Bode en gain ;

√ **c'est la pulsation pour laquelle le gain en décibels vaut le gain en décibels maximal diminué de 3 décibels ;**

◯ c'est la pulsation pour laquelle le gain vaut la moitié du gain maximal.

R4. Établir l'expression de la pulsation de coupure du filtre étudié. Faire l'application numérique.

Solution: Pulsation de coupure ω_c telle que $G(\omega_c)=\dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$, avec $G_{\max}=\lim\limits_{\omega\to\infty}G=\dfrac{1}{2}$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{4+\dfrac{R^2}{(L\omega_c)^2}}} &= \frac{1/2}{\sqrt{2}} \\
4+\frac{R^2}{(L\omega_c)^2} &= 8 \\
\frac{R^2}{(L\omega_c)^2} &= 4 \\
\omega_c^2 &= \frac{R^2}{4L^2}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\omega_c=\dfrac{R}{2L}}$

Ainsi $\boxed{\underline{H}=\dfrac{1/2}{1+\frac{\omega_c}{j\omega}}}$

R5. Diagramme de Bode asymptotique

(a) À basse fréquence :

i. Déterminer l'équivalent de la fonction de transfert.

Solution: À BF : $\underline{H}\underset{0}{\sim}\dfrac{1/2}{\frac{\omega_c}{j\omega}}=\dfrac{j\omega}{2\omega_c}$

ii. En déduire l'équation de l'asymptote au gain en décibel. Comment est-elle ?

Solution: $G_{dB,BF} = -20\log(2) + 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)$
C'est une asymptote oblique de pente +20dB/dec.

iii. Déterminer l'équation de l'asymptote de la phase.

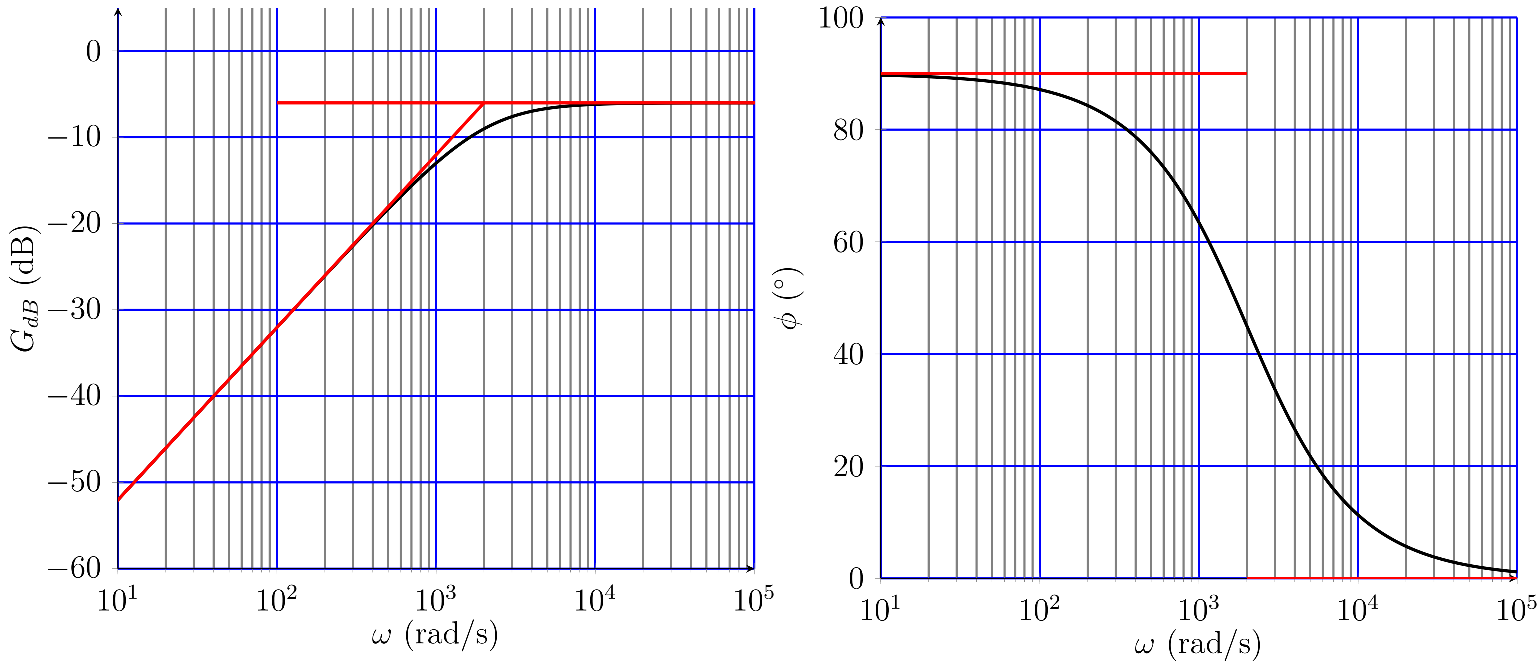
Solution: $\phi_{BF} = +\dfrac{\pi}{2}$, car $\underline{H} \in j\mathbb{R}^+$

(b) Faire de même à haute fréquence.

Solution: À BF : $\underline{H} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1/2}{1} = \dfrac{1}{2}$
$G_{dB,HF} = -20\log(2)$
C'est une asymptote horizontale à $-20\log(2)$.
$\phi_{BF} = 0$, car $\underline{H} \in \mathbb{R}^+$

(c) Tracer le diagramme de Bode asymptotique sur le papier semi-log fourni ci-dessous.

R6. Tracer le diagramme de Bode réel en ajoutant les points essentiels.



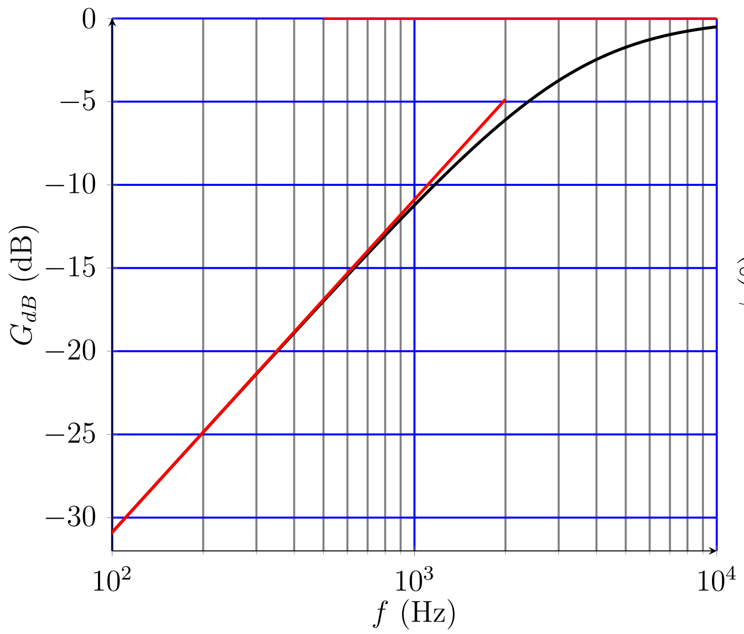
Exercice n°5 Filtrage avant un haut-parleur tweeter ♪ ♪

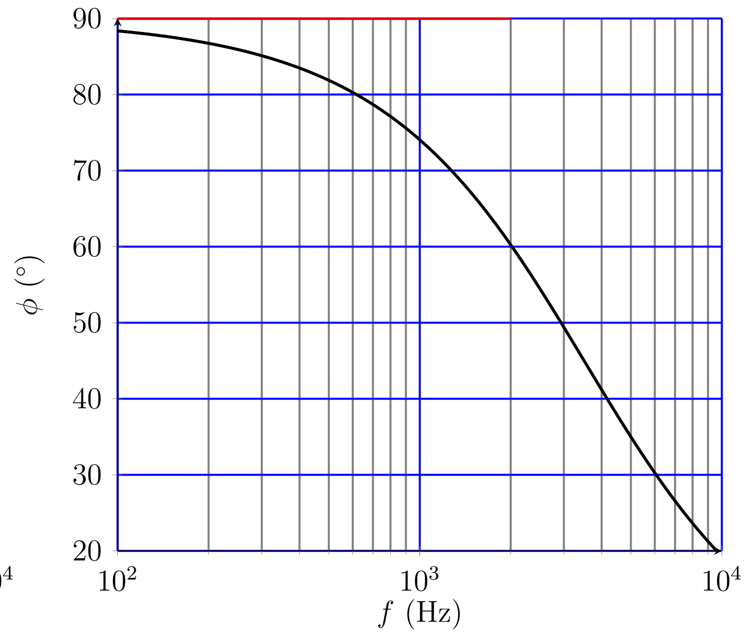
Avant d'envoyer le signal en entrée d'un haut-parleur tweeter chargé d'émettre les sons aigus, on place un filtre passe-haut du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 3500$ Hz.

On en donne la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{j\frac{f}{f_c}}{1 + j\frac{f}{f_c}}$$

et son diagramme de Bode :





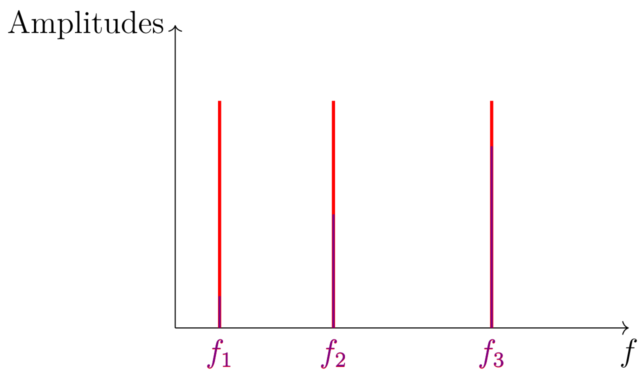
On modélise le son que l'on souhaite transmettre par la somme de trois signaux sinusoïdaux (le spectre de musique est bien plus complexe, ce qui en donne toute sa beauté, mais l'objectif est de comprendre l'idée...) :

$$u_e = E\cos(2\pi f_1 t) + E\cos(2\pi f_2 t + \pi/4) + E\cos(2\pi f_3 t - \pi/5)$$

avec $f_1 = 587$ Hz (do du milieu du piano) ; $f_2 = 2093$ Hz (do7) ; $f_3 = 4186$ Hz (do8 : dernière touche du piano)

R1. Représenter le spectre en amplitude de u_e.

Solution:



R2. Proposer une écriture générale du signal en sortie du filtre et qui sera envoyée en entrée du haut-parleur.

Solution: Signal de sortie : $s(t) = S_1\cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + S_2\cos(2\pi f 2t + \varphi 2) + S_3\cos(2\pi f_3 t + \varphi_3)$

R3. Déterminer toutes les caractéristiques du signal de sortie.

Solution:

— Signal à f_1 :
$G_{dB}(f_1) = -17$ dB, donc $S_1 = E \times 10^{-\frac{17}{20}} = 0,14E$
$\phi(f_1) = 82° = \varphi_1 - 0$

— Signal à f_2 :
$G_{dB}(f_2) = -6$ dB, donc $S_1 = E \times 10^{-\frac{6}{20}} = 0,5E$
$\phi(f_2) = 60° = \varphi_1 - \pi/4$, soit $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{12}$

— Signal à f_3 :
$G_{dB}(f_3) = -2$ dB, donc $S_1 = E \times 10^{-\frac{6}{20}} = 0,8E$
$\phi(f_3) = 40° = \varphi_1 + \pi/5$, soit $\varphi_3 = 0,42$ rad

$$\boxed{s(t) = 0,14\cos(2\pi f_1 t + 1,4\text{ rad}) + 0,5\cos(2\pi f_2 t + 7\pi/12) + 0,8E\cos(2\pi f_3 t + 0,42)}$$

R4. En utilisant une autre couleur, superposer sur le spectre de R1 le spectre en amplitude de u_s.

Solution:

II Exercices d'approfondissement

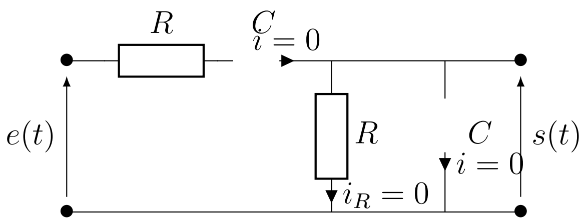
Exercice n°6 Filtre de Wien ♪ ♪

On s'intéresse au filtre de Wien représenté ci-dessous.

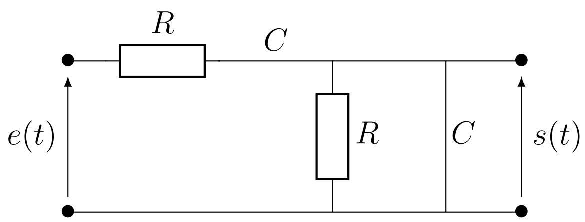
R1. Par analyse des comportements asymptotiques des dipôles, déterminer le type de filtre dont il s'agit.

Solution:

À BF : $s = Ri_R = 0$



À HF, s est la tension aux bornes d'un fil, donc $s = 0$



Le filtre ne transmet ni les basses fréquences ni les hautes fréquences, c'est un $\boxed{\text{filtre passe-bande}}$

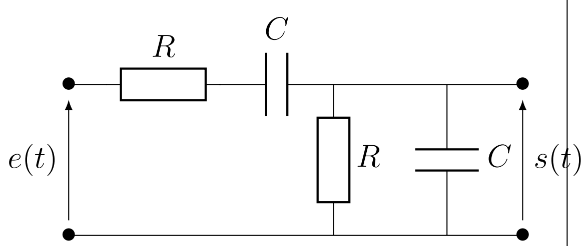
R2. ♪ ♪ Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre et l'écrire sous la forme $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$ où $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

Identifier l'expression de ω_0. Quelle valeur commune ont Q et H_0 ? On vérifiera succinctement l'homogénéité.

Solution:

L'association série est équivalente à une impédance $\underline{Z_{\text{éq},1}} = R + \dfrac{1}{Cj\omega}$

L'association parallèle est équivalente à une admittance $\underline{Y_{\text{éq},2}} = \dfrac{1}{R} + Cj\omega$



Pont diviseur de tension : $\underline{s} = \dfrac{1/\underline{Y_{\text{éq},2}}}{\underline{Z_{\text{éq},1}} + 1/\underline{Y_{\text{éq},2}}}\underline{e}$

Soit $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{1}{1 + \underline{Z_{\text{éq},1}} \times \underline{Y_{\text{éq},2}}}$

Ainsi $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{Cj\omega}\right) \times \left(\dfrac{1}{R} + Cj\omega\right)} = \dfrac{1}{1 + 1 + RCj\omega + \dfrac{1}{RCj\omega} + 1} = \dfrac{1}{3 + j\left(RCj\omega - \dfrac{1}{RCj\omega}\right)}$

Soit $\underline{H} = \dfrac{1/3}{1 + \dfrac{j}{3}\left(RCj\omega - \dfrac{1}{RCj\omega}\right)} = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$, en identifiant $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{RC}}$; $\boxed{Q = \dfrac{1}{3}}$ et $\boxed{H_0 = \dfrac{1}{3}}$

R3. Pour quelle pulsation le gain de ce filtre est-il maximal ?

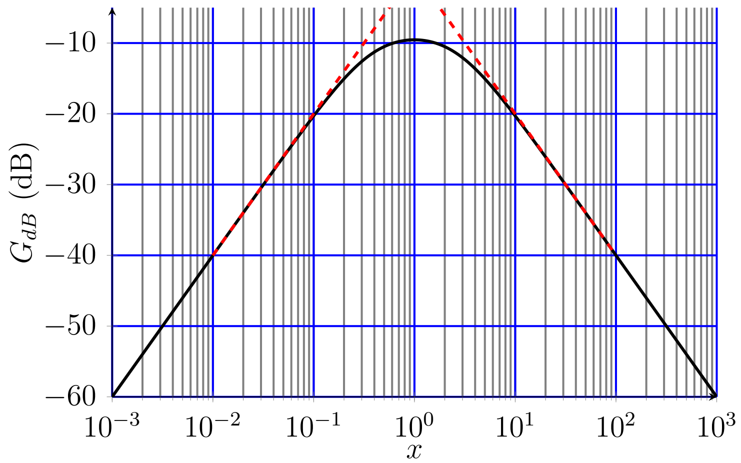
Calculer la valeur maximale du gain. En déduire sa valeur de dB, et calculer le déphasage correspondant.

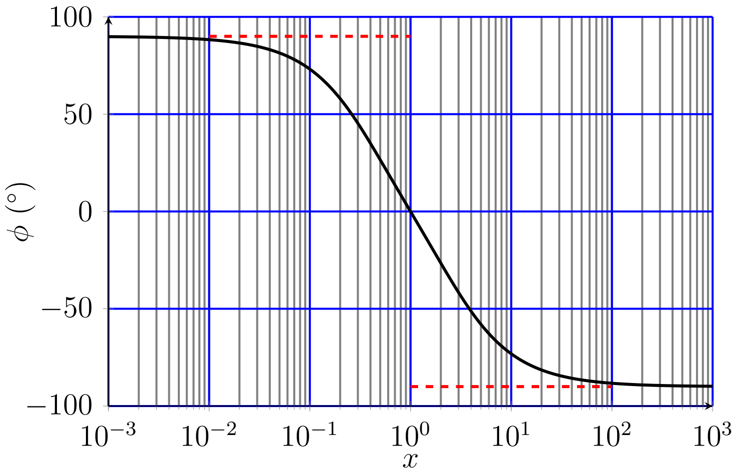
Solution:

Le gain s'écrit $G = |\underline{H}| = \dfrac{H_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ est maximal en $\omega = \omega_0$

Alors $\boxed{G_{dB,\max} = G_{dB}(\omega_0) = 20\log(H_0) = -9,5 \text{ dB}}$ et $\boxed{\phi(\omega_0) = \arg(\underline{H}) = 0}$, car $\underline{H} \in \mathbb{R}^+$.

R4. On donne le diagramme de Bode du filtre de Wien ci-dessous.
En exploitant la fonction de transfert, retrouver les pentes des asymptotes du diagramme de Bode en gain fourni.





Solution:

— À BF : $\underline{H} \approx \dfrac{H_0}{1-jQ\dfrac{\omega_0}{\omega}} = \dfrac{H_0\omega}{-jQ\omega_0}$ (avec $H_0 = Q = 1/3$)

$G_{dB,BF} = 20\log(\omega/\omega_0)$: c'est une asymptote de pente +20dB/dec et $\phi_{BF} = +\dfrac{\pi}{2}$

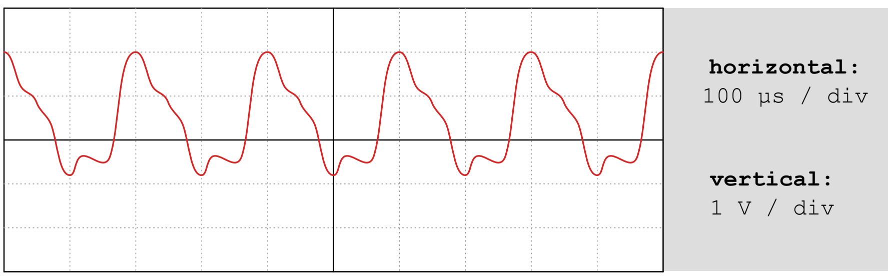
— À HF : $\underline{H} \approx \dfrac{H_0}{1-jQ\dfrac{\omega_0}{\omega}} = \dfrac{H_0\omega_0}{jQ\omega}$ (avec $H_0 = Q = 1/3$)

$G_{dB,HF} = -20\log(\omega/\omega_0)$: c'est une asymptote de pente −20dB/dec et $\phi_{HF} = -\dfrac{\pi}{2}$

R5. Mesurer graphiquement la largeur en fréquence de la bande passante. Retrouver la valeur du facteur de qualité.

Exercice n°7 Dimensionnement d'un moyenneur ♪ ♪ ♪

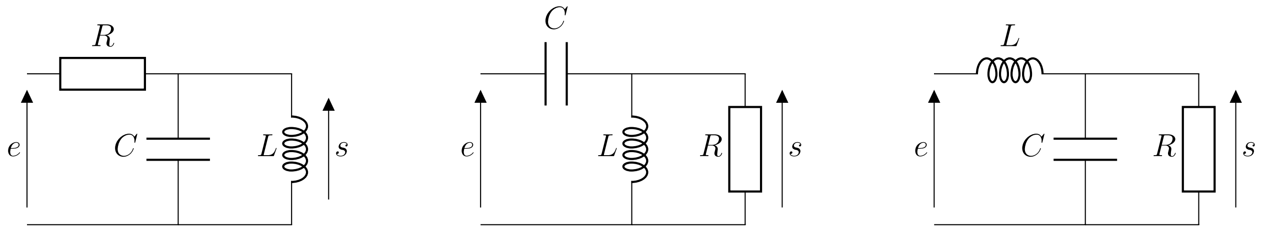
Le signal ci-dessous est délivré par un capteur. La grandeur que vous cherchez à mesurer est directement reliée à la valeur moyenne du signal.



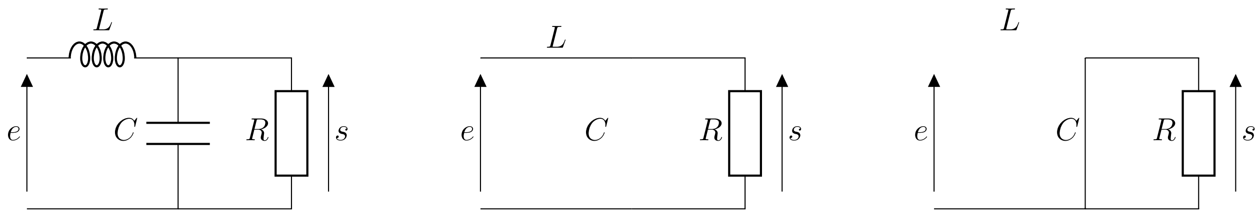
R1. Où se trouve la valeur moyenne d'un signal dans son spectre ?

Solution: La valeur moyenne est la composante continue, c'est un « pic » qui est en $f = 0$ sur le spectre.

R2. En déduire duquel de ces filtres vous avez besoin.



Solution: Pour récupérer la valeur moyenne d'un signal, et donc supprimer les signaux sinusoïdaux, il faut utiliser un filtre passe-bas.
Le circuit de droite est un passe-bas.



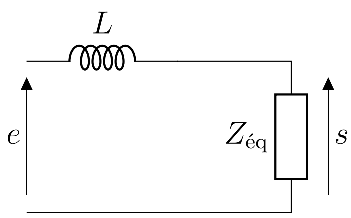
À BF, $s = e$
À HF : $s = 0$, c'est la tension aux bornes d'un fil.

R3. Exprimer la fonction de transfert et la mettre sous la forme

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Donner l'expression du facteur de qualité Q en fonction de R, L et C.

Solution: On associe R et C en parallèle : $\frac{1}{\underline{Z_{éq}}} = \frac{1}{R} + Cj\omega$



D'après la relation du pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned}
\underline{s} &= \frac{\underline{Z_{éq}}}{Lj\omega + \underline{Z_{éq}}}\underline{e} \\
&= \frac{1}{1 + Lj\omega\frac{1}{\underline{Z_{éq}}}}\underline{e} \\
&= \frac{1}{1 + Lj\omega\left(\frac{1}{R} + Cj\omega\right)}\underline{e} \\
\underline{H} &= \frac{1}{1 - LC\omega^2 + \frac{L}{R}j\omega}
\end{aligned}$$

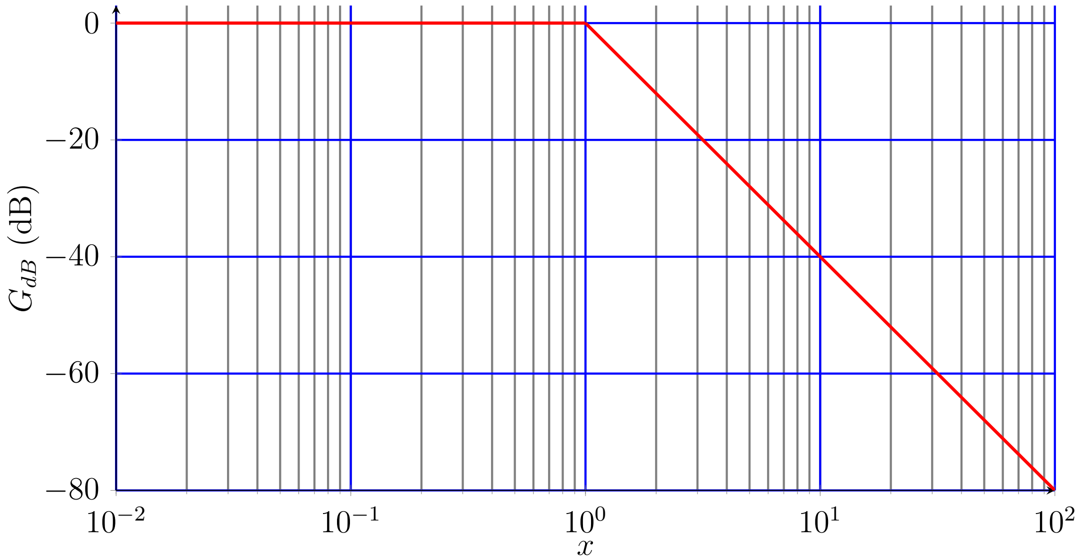
Par identification : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{1}{\omega_0 Q} = \frac{L}{R}$, soit $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

R4. Tracer le diagramme asymptotique de Bode en amplitude et y faire explicitement apparaître ω_0. Quel rôle joue cette grandeur ?

Solution:
À BF : $\underline{H} \underset{0}{\sim} 1$, donc $G_{dB,BF} = 0$: l'asymptote est horizontale

À HF : $\underline{H} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

$G_{dB,HF} = 20 \log \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -40 \log \dfrac{\omega}{\omega_0}$: asymptote oblique de -40 dB/dec



En ω_0, les deux asymptotes se croisent.

R5. Cherchez-vous à produire un phénomène de résonance, ou bien à l'éviter ? En déduire parmi les jeux proposés ci-dessous le plus adapté pour moyenner le signal observé :

Composant	Jeu 1	Jeu 2	Jeu 3
R (Ω)	10	100	1
L (H)	1	10^{-2}	10^{-2}
C (F)	10^{-4}	10^{-2}	10^{-6}

Solution:

Composant	Jeu 1	Jeu 2	Jeu 3
R (Ω)	10	100	1
L (H)	1	10^{-2}	10^{-2}
C (F)	10^{-4}	10^{-2}	10^{-6}
ω_0	100	100	10^4
Q	0,1	100	0,01

Il faut choisir ω_0 très faible devant la pulsation du signal. Or $T = 200$ µs, donc $\omega = 31.10^3$ rad · s^{-1}
Les deux premiers jeux conviennent. Il n'est pas souhaitable d'avoir une résonance, plus Q est élevé, plus le diagramme de Bode est au-delà de l'asymptote pour des pulsations élevées.
Par conséquent, seul le jeu 1 convient.

Exercice n°8 Transformation d'un triangle ♪ ♪

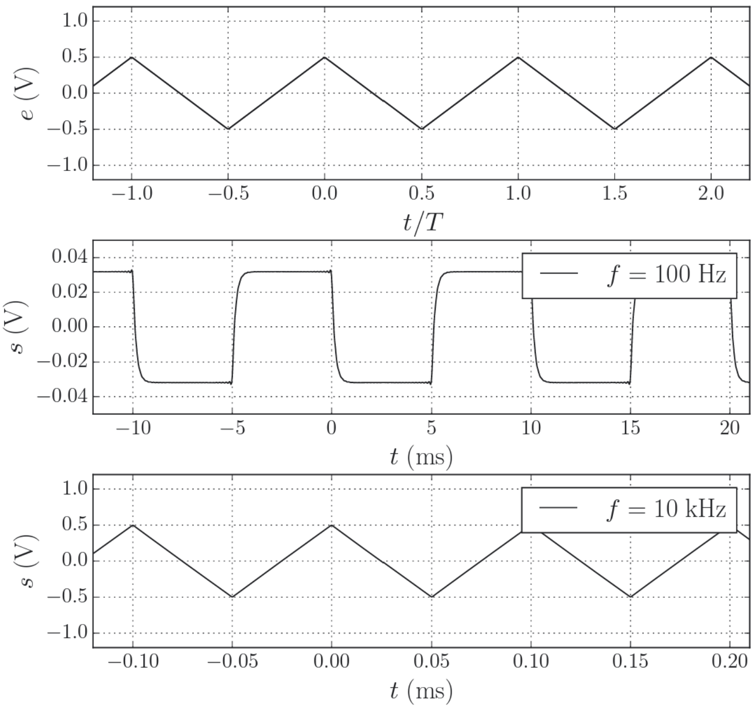
On considère un signal triangle, dont l'allure est représentée ci-après. T représente la période du signal, qu'on pourra faire varier, tout en maintenant l'amplitude constante.
On obtient pour les fréquences $f = 100$ Hz et $f = 10$ kHz les oscillogrammes suivants.

$$\underline{H_1} = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{f}{f_c}}$$

$$\underline{H_2} = \frac{H_0 j\dfrac{f}{f_c}}{1 + j\dfrac{f}{f_c}}$$

$$\underline{H_3} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{f}{f_c} - \dfrac{f_c}{f}\right)}$$

$$\underline{H_4} = \frac{H_0}{1 + \dfrac{j}{Q}\dfrac{f}{f_c} - \left(\dfrac{f}{f_c}\right)^2}$$



R1. Quelle opération réalise ce filtre pour $f = 100$ Hz ? et pour $f = 10$ kHz ? En déduire la nature du filtre.

> **Solution:** Ce filtre réalise une dérivation pour $f = 100$ Hz. Pour $f = 10$ kHz, le filtre transmet fidèlement le signal, sans modification.
> On peut en déduire que le filtre est un filtre passe-haut puisqu'il transmet fidèlement un signal triangle de fréquence $f = 10$ kHz qui contient un grand nombre d'harmoniques.
> Le filtre est dérivateur à basse fréquence, donc il doit présenter une asymptote de pente +20 dB/dec , donc il s'agit d'un $\boxed{\text{filtre passe-haut du premier ordre.}}$

R2. Parmi les fonctions de transferts suivantes, laquelle choisiriez-vous pour décrire ce filtre ?

> **Solution:** La fonction de transfert $\underline{H_2}$ est celle d'un filtre passe-haut du premier ordre. Elle est du premier ordre contrairement aux deux dernières.
> Et à BF : $\underline{H_2} \simeq 0$ et à HF $\underline{H_2} \simeq H_0$: c'est bien un passe-haut.

R3. En vous servant des oscillogrammes fournis, déterminer les paramètres inconnus intervenant dans cette fonction de transfert.

> **Solution:** La fréquence de coupure f_c doit être très grande devant 100 Hz, car afin de dériver le signal d'entrée à 100 Hz, il est nécessaire que tous les harmoniques soient dans la zone « basse fréquence » du filtre. f_c doit de plus être inférieure à 10 kHz pour transmettre fidèlement le signal à 10 kHz. On peut proposer $f_c = 5$ kHz.
> À haute fréquence, l'amplitude du signal n'est pas modifié, donc $\boxed{H_0 = 1}$

R4. Proposer un montage simple qui permettrait de réaliser ce filtre. On proposera des valeurs pour les composants.

> **Solution:**
> On peut proposer les filtres simples suivants :

Pour le circuit de gauche : $f_c = \dfrac{1}{2\pi RC}$, et pour celui de droite $f_c = \dfrac{R}{2\pi L}$

Pour les valeurs numériques, on peut proposer :

- à gauche : $C = 10$ nF et $R = 3$ kΩ
- à droite : $L = 100$ mH et $R = 3$ kΩ

Exercice n°9 Filtre passe-haut ♪ ♪ ♪

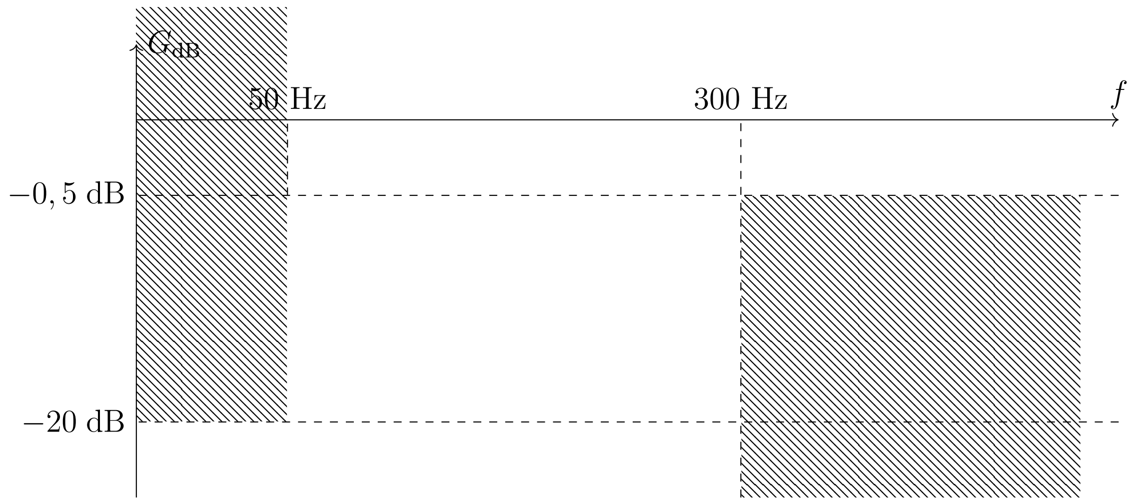
On cherche à traiter un signal électrique issu d'un enregistrement musical proche de 300 Hz (plutôt dans les sons graves), bruité par le réseau électrique à 50 Hz que l'on veut filtrer. Plus précisément, on souhaite construire un filtre présentant une atténuation importante à $f_1 = 50$ Hz ($G_{dB}(f_1) \leq -20$ dB), mais la plus faible possible à $f_2 = 300$ Hz ($G_{dB}(f_2) \geq -0,5$ dB).

R1. On appelle gabarit d'un filtre la traduction graphique sur le diagramme de Bode des contraintes imposées par le cahier des charges, c'est-à-dire une représentation du plan $(G_{dB}, \log(\omega))$ sur laquelle sont matérialisées les zones interdites (à hachurer) du diagramme de Bode.
Le représenter pour le filtre considéré

R2. Rappeler les pentes des asymptotes d'un filtre passe-haut du premier ordre.

R3. Un filtre passe-haut du premier ordre peut-il convenir ? Justifier.

Solution:



Déterminons la pente de l'asymptote nécessaire pour vérifier la contrainte $G_{\mathrm{dB}}(f_1) \leq -20$ dB et $G_{\mathrm{dB}}(f_2) > 0,5$ dB

$$\text{pente minimale} = \frac{-0,5 - (-20)}{\log(300) - \log(50)} = \frac{19,5}{\log(6)} = 25,1 \text{ dB/dec}$$

Ainsi la pente de l'asymptote doit être supérieure à 25,1 dB, donc un filtre du premier ordre ne peut pas convenir, il faut un filtre d'ordre 2.

R4. Proposer un montage simple (avec R, L et C) répondant au cahier des charges.

Exercice n°10 Mesure d'un écart de fréquence ♪ ♪ ♪

Le décalage Doppler f_D proportionnel à la vitesse à mesurer est souvent inférieur à 1 Hz et il concerne une onde dont la fréquence initiale est de l'ordre de 10 MHz. La mesure précise de cette minuscule variation est réalisée par détection synchrone.

On considère deux signaux sinusoïdaux $v_1(t) = A\cos(2\pi f_1 t)$ et $v_2 = B\cos(2\pi f_2 t + \varphi_0)$, où A, B et φ_0 sont des constantes, dont on souhaite mesurer l'écart de fréquence $f_2 - f_1$, supposé très inférieur aux fréquences f_1 et f_2. Le montage de détection synchrone qui permet d'y parvenir est représenté schématiquement sur la figure 1 : il est formé d'un multiplieur analogique $\mathcal{M}$ (qui donne une tension de sortie proportionnelle au produit de ses deux tensions d'entrée) et d'un filtre $\mathcal{F}$ dont la nature sera étudiée plus loin.

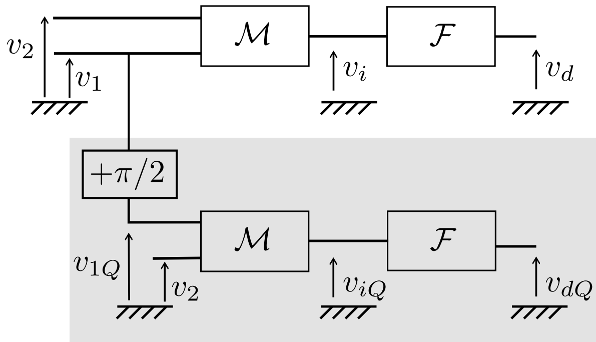


FIGURE 1 – Principe d'un montage de détection synchrone. Jusqu'à la question R3 incluse, la partie inférieure sur fond gris n'a pas à être considérée.

R1. Exprimer à un facteur près le signal intermédiaire v_i, puis justifier que son spectre fait apparaître les fréquences $f_2 + f_1$ et $|f_2 - f_1|$. Indiquer le type de filtrage qui permet d'obtenir, à la sortie du filtre, un signal v_d de fréquence $|f_2 - f_1|$.

Le traitement des signaux radars fait intervenir des composants spécifiques aux hautes fréquences. Pour des ultrasons au contraire, avec des fréquences de l'ordre de 10^4 Hz, des composants usuels disponibles dans un lycée (résistances, condensateurs et bobines d'auto-induction) fonctionneraient.

R2. Proposer pour $\mathcal{F}$ un schéma électrique de filtre passif convenable, sans préciser pour l'instant les valeurs des composants. Un filtre d'ordre 1 est acceptable mais le jury valorisera davantage un filtre d'ordre 2, plus efficace.

R3. Exprimer la fonction de transfert du montage de la question précédente. Pour $f_1 \approx f_2 \approx 40$ kHz, proposer des valeurs réalistes pour les composants du filtre $\mathcal{F}$.

À l'issue du filtrage, v_d est pratiquement sinusoïdal et mesurer sa fréquence revient à mesurer $|f_2 - f_1|$, ce qui était le but à atteindre.

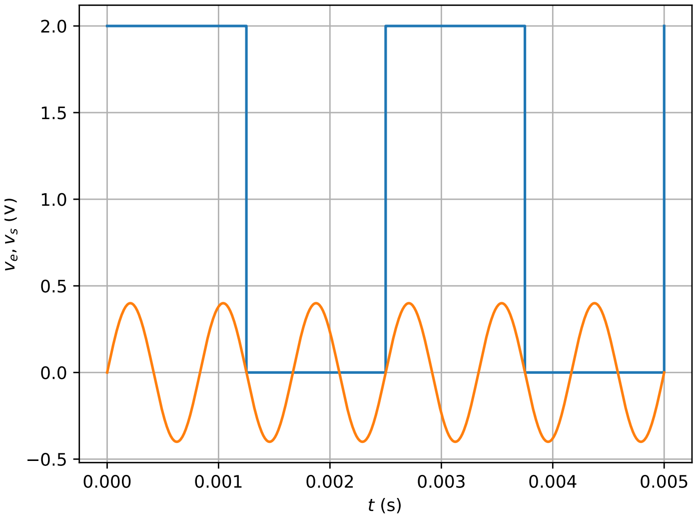
Cependant, dans le cas de l'effet Doppler (où $f_1 = f$ et $f_2 = f_r$), il est important de connaître le signe de $f_2 - f_1$ (pour connaître le sens de déplacement). Pour cela, on complète le montage de la figure 1 par une seconde voie (représentée sur fond gris) dans laquelle on applique des opérations analogues après avoir déphasé v_1 de $+\pi/2$ (démodulation en quadrature).

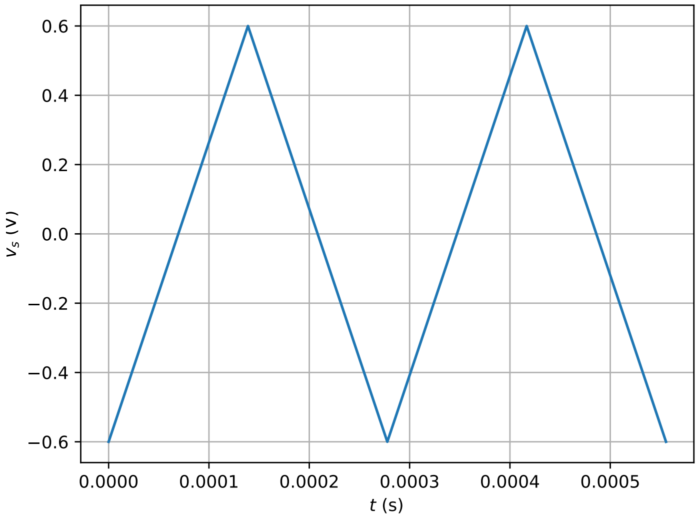
R4. Dans l'hypothèse d'un filtrage idéal, exprimer le signal v_{dQ} et expliquer comment son observation conjointe à celle de v_d permet d'obtenir le signe de $f_2 - f_1$.

III Résolution de problème

Exercice n°11 Identification d'un filtre

On soumet un filtre à un signal créneau de fréquence 400 Hz puis 3600 Hz, et on obtient les courbes ci-dessous. Déterminer la nature et les caractéristiques du filtre.


v_e, v_s (V)
t (s)
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.000
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005


v_s (V)
t (s)
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
0.0000
0.0001
0.0002
0.0003
0.0004
0.0005