

? Lundi 6 janvier 2025
Devoir Surveillé n°6 (1) – Durée : 4 heures

La calculatrice est INTERDITE.

Chapitres concernés : Oscillateurs amortis en RSF ; Filtrage linéaire ; ALI ; cinématique

⚠ Consignes à respecter

- Lire la **totalité de l'énoncé** et commencer par les exercices les plus abordables.
- Présentation de la copie :
 - Prendre une **nouvelle copie double pour chaque exercice**.
 - Tirer un **trait horizontal** à travers toute la copie **entre chaque question**.
 - Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
 - **Numéroter les pages** sous la forme x/nombre total de pages.
- Rédaction :
 - Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
 - **Justifier** toutes vos réponses.
 - Applications numériques : nombre de **chiffres significatifs adapté** et avec une **unité**.

Ce sujet comporte **3 exercices totalement indépendants** qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de ?? pages.

Contenu du DS :

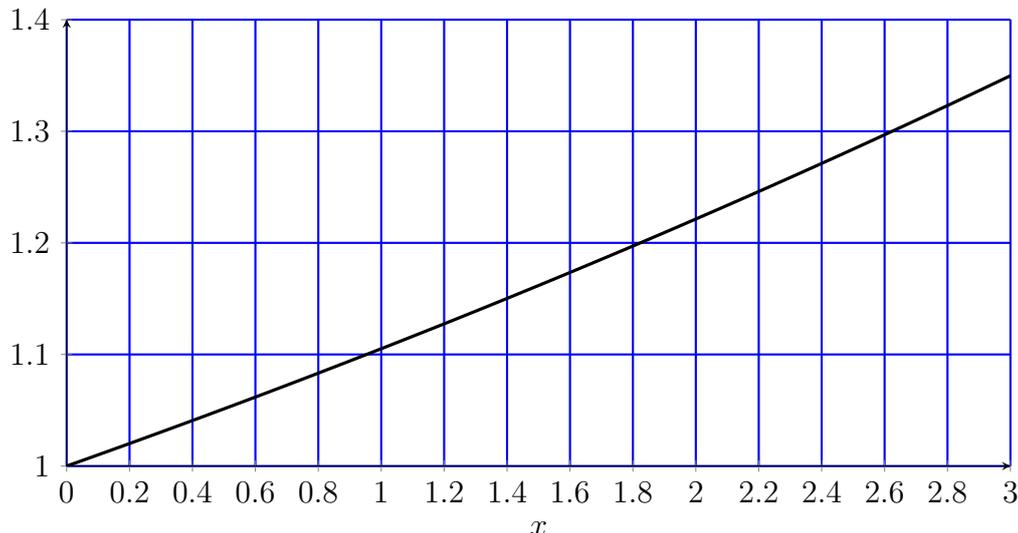
Données

• Champ de pesanteur $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

• Valeurs approchées :

$\frac{1}{2\pi} \approx 0,16$	$68 \times 47 \approx 3200$	$\frac{16}{\pi} \approx 5$	$10^{-\frac{1}{2}} \approx 0,32$	$10^{-\frac{4}{10}} \approx 0,40$	$10^{-\frac{3}{10}} \approx 0,5$	$10^{-\frac{3}{20}} \approx 0,7$
-------------------------------	-----------------------------	----------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------

• Courbe de $x \mapsto e^{\frac{x}{10}}$:

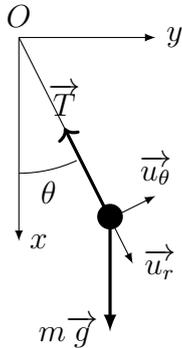


Exercice n°1 Mécanique et compagnie (~ 1h45)

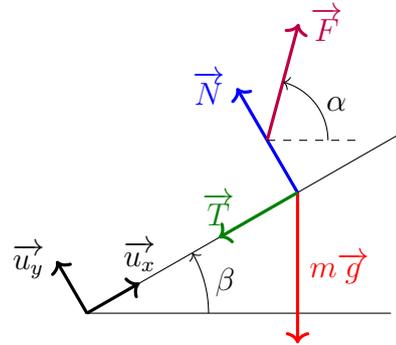
Les parties de cet exercice sont totalement indépendantes.

Partie A Projections (MAX 10 min)

Q1. Exprimer \vec{T} et $m\vec{g}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.



Q2. Exprimer les quatre forces en fonction de leurs normes, et de \vec{u}_x et \vec{u}_z .



Partie B Système de coordonnées cylindriques (~ 25 min)

Q3. Système de coordonnées cylindriques

- Quelles sont les coordonnées cylindriques d'un point M ?
- Définir sur un schéma les coordonnées cylindriques.
- Définir clairement la base cylindrique, et la représenter sur le schéma précédent.

Q4. Donner le vecteur position en coordonnées cylindriques.

Q5. Établir l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques.

Q6. Établir l'expression du vecteur accélération en coordonnées cylindriques.

Partie C Étude d'un mouvement circulaire (~ 25 min)

Q7. Définition du système de coordonnées polaires.

- Quelles sont les coordonnées polaires d'un point M ?
- Indiquer sur un schéma les coordonnées polaires.
- Définir clairement la base polaire, et la représenter sur le schéma précédent.
- Donner le vecteur position en coordonnées polaires.

On étudie le mouvement d'un point M qui décrit un cercle de rayon a avec une accélération angulaire $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha$ constante ($\alpha > 0$).

À $t = 0$, la vitesse angulaire du point M vaut $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ (où $\omega_0 > 0$).

Q8. Exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de α , ω_0 et t .

Q9. Établir l'expression du vecteur vitesse du point M en fonction de a , $\dot{\theta}$ et d'un vecteur de la base polaire, puis en fonction de a , α , ω_0 et t et d'un vecteur de la base polaire.

Q10. Établir l'expression du vecteur accélération du point M en fonction de a , α , ω_0 et t et de \vec{u}_r et \vec{u}_θ .

De quelles signes sont les composantes a_r et a_θ du vecteur accélération ?

Q11. Représenter les vecteurs vitesse et accélération à différents endroits de la trajectoire. Le mouvement est-il accéléré ou décéléré ?

Partie D Étude d'un mouvement plan (~ 20 min)

Dans le référentiel terrestre \mathcal{R} , un point M décrit un mouvement dont les équations horaires en coordonnées polaires sont les suivantes (r_0 , ω et α sont des constantes positives) :

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$

On choisit comme origine des temps l'instant où le point M passe au point A correspondant à $\theta = 0$.

Q12. Exprimer l'équation polaire $r(\theta)$ de la trajectoire.

Q13. Placer les points pour $\theta = 0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi; 3\pi$ et en déduire l'allure de la trajectoire. On prendra les valeurs numériques suivantes : $r_0 = 1 \text{ cm}$, $\omega = 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{10} \text{ s}^{-1}$

Q14. Montrer que le vecteur vitesse du point M s'écrit

$$\vec{v} = r_0 e^{\alpha t} (\alpha \vec{u}_r + \omega \vec{u}_\theta)$$

Q15. Établir l'expression du vecteur accélération du point M , en fonction des constantes r_0 , α , ω , de t et des vecteurs de la base polaire.

On l'écrira sous la forme $\vec{a} = r_0 e^{\alpha t} (\beta \vec{u}_r + \gamma \vec{u}_\theta)$ où on exprimera β et γ en fonction de α et ω uniquement.

Partie E Mouvement parabolique (~ 15 min)

On étudie le mouvement d'une balle de tennis modélisée par un point matériel M de masse $m = 59 \text{ g}$, ne subissant que son poids (frottements négligés), dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

On choisit (Oz) la verticale ascendante et (Oxy) le plan horizontal.

À $t = 0$, la balle est lancée depuis un point à la verticale de l'origine du repère, à la hauteur $h = 2 \text{ m}$, avec une vitesse initiale \vec{v}_0 contenue dans le plan (Oxz) de norme $v_0 = 220 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et faisant un angle $\psi = 30^\circ$ avec (Ox) .

La rédaction doit être parfaite : définition du système, du référentiel, bilan des forces, schéma, ...

Q16. Effectuer un schéma de la situation, avec les axes cartésiens, la situation initiale (placer h et \vec{v}_0), et un état quelconque avec la force représentée dessus.

Q17. Compte tenu des forces, établir l'expression du vecteur accélération dans la base cartésienne.

Q18. Par intégrations successives, établir les équations horaires du mouvement de la balle de tennis :
$$\begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \\ z(t) = \end{cases}$$

Q19. Établir l'équation cartésienne $z(x)$ de la trajectoire.

Dessiner l'allure de la trajectoire. (On n'oubliera pas les axes, l'origine, de respecter les conditions initiales.)

Q20. Que peut-on dire du vecteur vitesse de la balle au sommet (=point le plus haut) de la trajectoire ? et du vecteur accélération ?

Exercice n°2 En Travaux Pratiques (~ 10 min)

Q21. Quelles grandeurs doivent être mesurées pour tracer le diagramme de Bode d'un filtre ? Décrire le protocole de tracer d'un diagramme de Bode.

Q22. Comment repérer très précisément la fréquence pour laquelle deux signaux sont en phase ?

Q23. Que faut-il faire avant de réaliser un circuit électrique ? Quelles règles faut-il respecter pour réaliser un circuit électrique ?

Exercice n°3 Accordeur de guitare (~ 2 heures)

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question. Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} .
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Partie A Le signal

La figure ?? montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

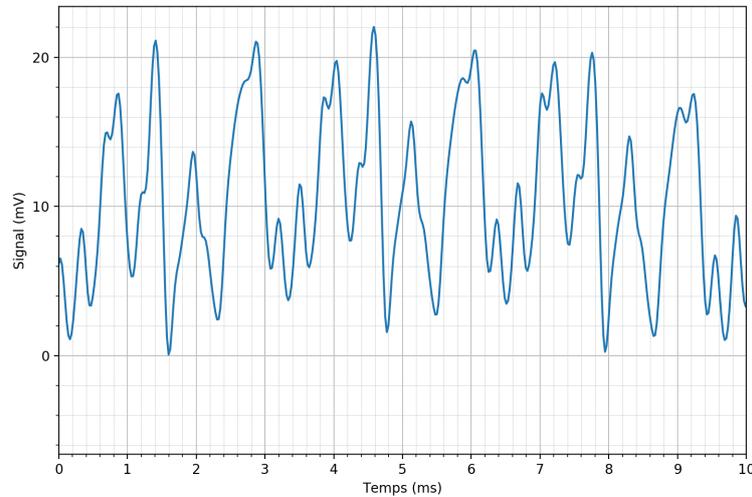


FIGURE 1 – signal de la guitare de fréquence $f \approx 310$ Hz

Q24. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

Partie B Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure ?? (filtre (F_a)).

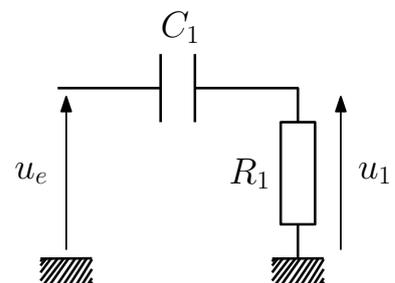


FIGURE 2 – Filtre (F_a)

- Q25. Par analyse asymptotique du circuit, déterminer le type de filtre dont il s'agit ?
- Q26. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1, C_1 et de la pulsation ω du signal.
- Q27. Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification. On pourra avantageusement exprimer le gain pour $\omega = \omega_1$.
- Q28. Déterminer précisément les équations des asymptotes du diagramme de Bode en gain. En déduire l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.
- Q29. On a choisi $R_1 = 100\text{k}\Omega$ et $C_1 = 100\text{nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure ??, quel est le rôle de ce premier filtre ?

Partie C Deuxième filtre

Dans cette sous-partie, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

Partie C.1 Préambule

Soit le filtre de la figure ??.

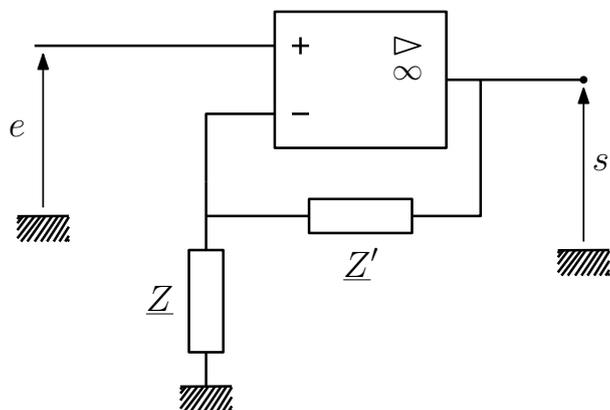


FIGURE 3 – Filtre à ALI

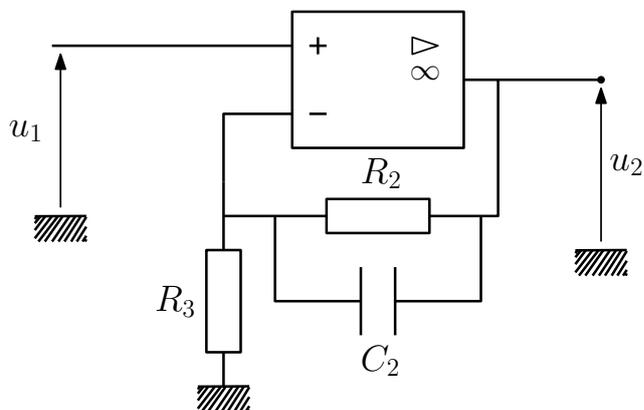


FIGURE 4 – Filtre (F_b)

- Q30. Pourquoi peut-on supposer que les ALI des deux montages figures ?? et ?? fonctionnent en régime linéaire ?
- Q31. Exprimer la fonction de transfert \underline{H} du montage de la figure ?? en fonction de \underline{Z} et \underline{Z}' .
- Q32. Que devient \underline{H} si \underline{Z} et \underline{Z}' sont des résistances ($\underline{Z} = R$, $\underline{Z}' = R'$) ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

Partie C.2 Amplification (légèrement) sélective

En sortie du filtre de la figure ?? le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre de la figure ?? (filtre (F_b)).

- Q33. Quelle est l'impédance $\underline{Z}_{\text{eq}}$ de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?
- Q34. Déduire de la question ?? l'expression de la fonction de transfert \underline{H}_2 de ce filtre en fonction de R_2, R_3 et C_2 .
- Q35. Mettre \underline{H}_2 sous la forme

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

et donner les expressions de G_0 et ω_2 .

- Q36. Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence ($\omega \ll \omega_2$) ? en haute fréquence ($\omega \gg \omega_2$) ?
- Q37. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680\text{k}\Omega$, $R_3 = 6\text{k}\Omega$ et $C_2 = 470\text{pF}$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

Q38. Que vaut l'impédance d'entrée du montage de la Figure ??? Quel est son intérêt ?

Partie D Filtrage (très) sélectif

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est a priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aigüe que l'on souhaite accorder. Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} . La figure ?? représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

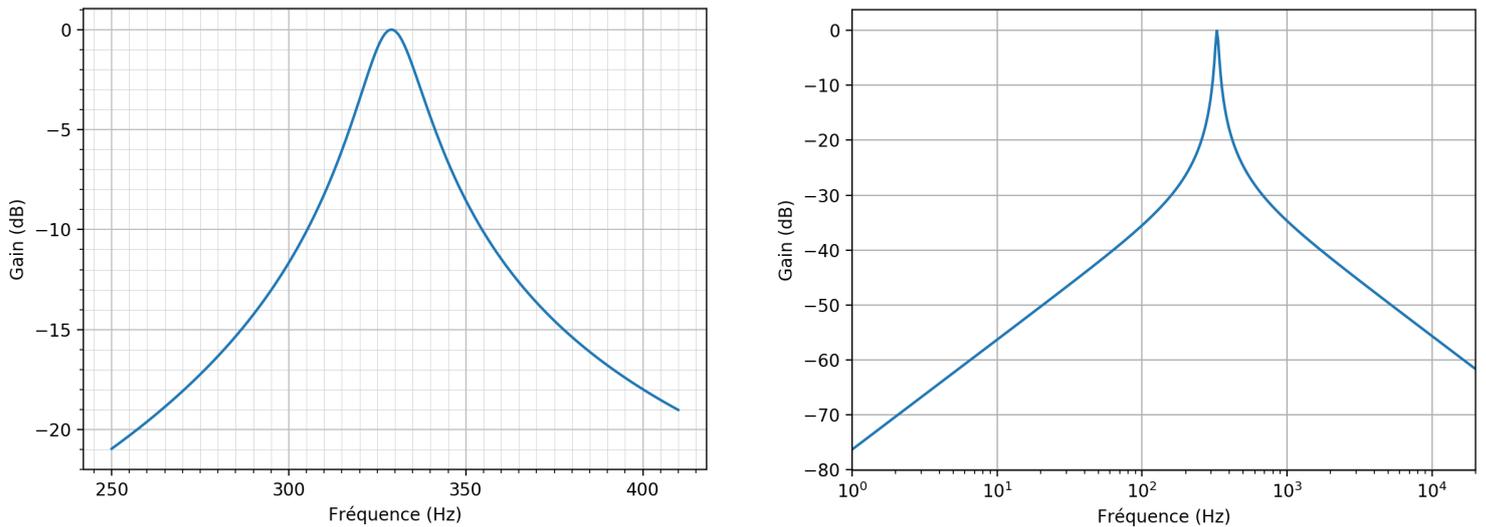


FIGURE 5 – Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)

- Q39. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?
- Q40. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie. *On attend bien un intervalle, et non la largeur de l'intervalle.*
- Q41. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315$ Hz, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

Fin du sujet

La suite est laissée pour information....



Bonne année 2025 !



Partie E Analyse spectrale (NE PAS TRAITER)

La figure ?? correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure ??.

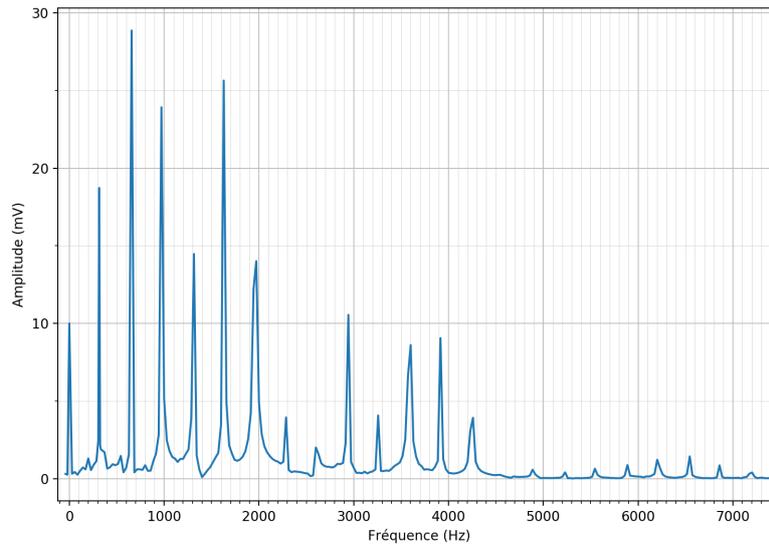


FIGURE 6 – Spectre du signal d'entrée

- Q42. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure ??.
- Q43. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure ?? correspond à la sortie du premier filtre (F_a).
- Q44. Même question, pour la sortie du filtre (F_b).
- Q45. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

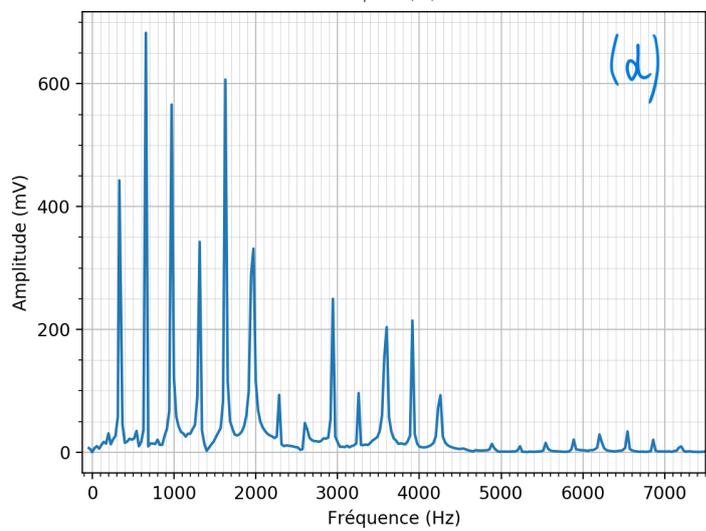
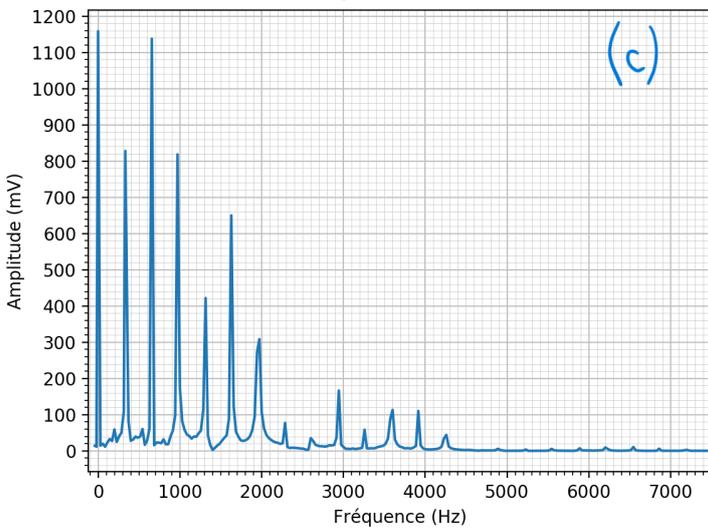
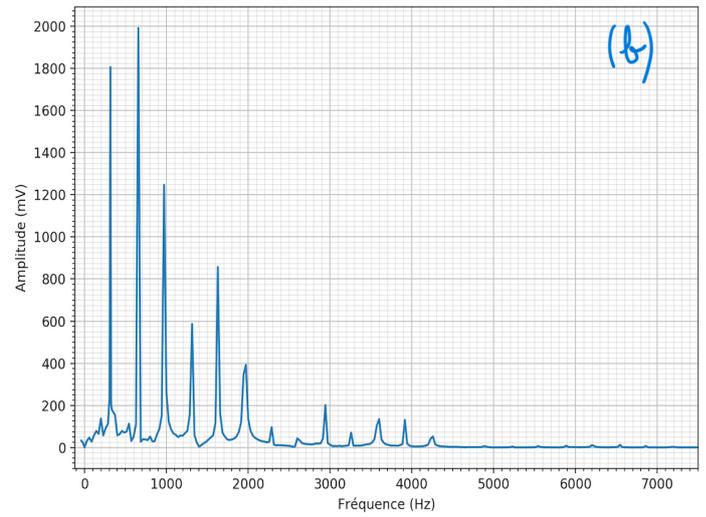
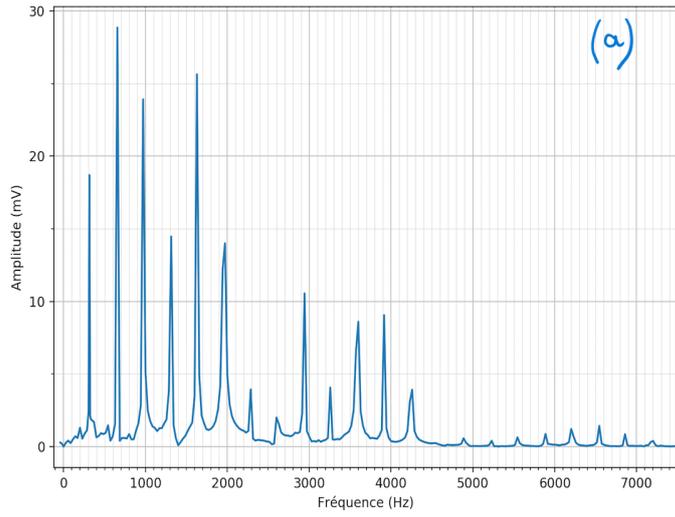


FIGURE 7 – Spectres