Lundi 25 novembre 2024

Devoir Surveillé n°4 (1) — *Durée : 2 heures*

La calculatrice est AUTORISÉE.

Chapitres concernés : Électricité

— Chapitre n°6. Oscillateurs libres amortis

— Chapitre n°7. Oscillateurs amortis en RSF

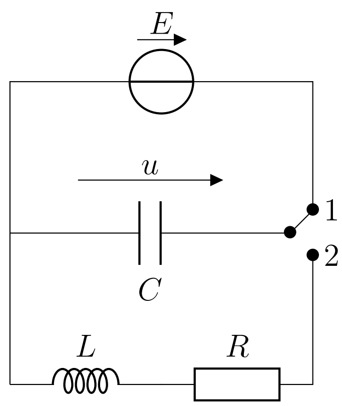
Consignes à respecter

- **Lire la totalité de l'énoncé** et commencer par les exercices les plus abordables.
- Présentation de la copie :
  - Prendre une **nouvelle copie double pour chaque exercice**.
  - Tirer un **trait horizontal** à travers toute la copie **entre chaque question**.
  - Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
  - **Numéroter les pages** sous la forme x/nombre total de pages.
- Rédaction :
  - Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
  - **Justifier** toutes vos réponses.
  - Applications numériques : nombre de **chiffres significatifs adapté** et avec une **unité**.

Ce sujet comporte 3 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 7 pages.

Contenu du DS :

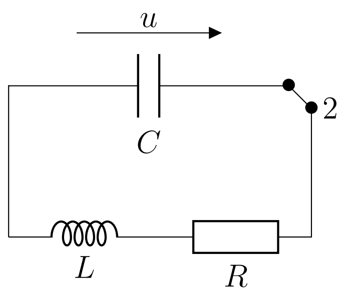
Exercice n°1 Capteur d'hygrométrie *(Durée : 40 min)*



Pour tenir compte de la présence de vapeur d'eau dans l'air, on mesure H, l'humidité relative à la température T : cette grandeur est exprimée en % et est le rapport entre la pression partielle en vapeur d'eau effective et la pression de vapeur saturante (la pression partielle en vapeur d'eau à l'équilibre chimique entre l'eau liquide et l'eau vapeur).
Dans cet exercice, on étudie un capteur d'humidité constitué d'un condensateur dont la capacité varie avec l'humidité.
On se place dans le circuit ci-contre, comprenant un générateur de tension continue de force électromotrice E et de résistance interne nulle, une bobine d'inductance L, une résistance R modélisant la résistance totale du circuit et le condensateur de capacité C étudié.

Q1. L'interrupteur K est d'abord placé dans la position 1. Que vaut la tension u aux bornes du condensateur ?

Q2. À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur dans la position 2. On obtient donc le circuit ci-dessous :



Montrer que l'équation différentielle à laquelle satisfait la tension $u(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

Donner les expressions de ω_0 et λ en fonction de R, L et C.

Q3. On se place en régime pseudo-périodique.
Après avoir écrit le polynôme caractéristique et le discriminant associé, montrer que cela n'est possible que pour des valeurs de résistance telles que $R < R_c$, avec R_c une valeur limite à exprimer en fonction de L et C.

Q4. La tension $u(t)$ est-elle continue en 0 ? Qu'en est-il de sa dérivée temporelle ? Déterminer leurs valeurs à $t = 0^+$.

Q5. Résoudre l'équation différentielle : exprimer $u(t)$ en fonction de E, λ, $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ et t.

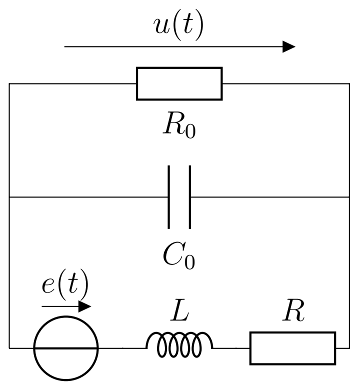
Q6. On se place dans le cas où $R = 0$.
Que devient l'équation différentielle et quelle est la nouvelle expression de $u(t)$? Donner l'expression de la période propre T_0 du circuit.

Q7. Montrer que si la résistance R est très inférieure à R_c, alors la période des oscillations observées est très proche de T_0.
En présence d'humidité dans l'air, on mesure $T_0 = 27,2$ µs. Sachant que l'inductance de la bobine est $L = 150$ mH, calculer la capacité C du condensateur.

Q8. On peut lire sur la notice les indications suivantes :
- gamme de mesures : 10% à 90% d'humidité relative ;
- sensibilité : C augmente de $0,40$ pF par % d'humidité relative ;
- capacité : $C = 123$ pF pour $H = 40\%$.

La capacité est reliée linéairement à l'humidité relative : $C = aH + b$.
(a) À partir des données, déterminer a et b.
(b) Déterminer l'humidité relative de l'atmosphère lors de la mesure précédente (on pourra admettre que $C = 125$ pF).

Exercice n°2 Détermination des caractéristiques d'un microphone de guitare *(Durée : 40 min)*



Situés sous les cordes d'une guitare électrique, les microphones en sont un des instruments fondamentaux pour bien restituer le son. Un microphone de guitare est constitué d'un ou plusieurs aimants entourés d'une bobine de cuivre. La corde en mouvement vibre au-dessus de l'aimant créant par induction une tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ supposée sinusoïdale.
Le comportement électrique du microphone peut être modélisé par le schéma ci-contre.
On donne $C_0 = 100$ pF, $R_0 = 1,0$ MΩ et $R = 3,0$ kΩ.
On cherche $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Q9. On note $\underline{U}$ l'amplitude complexe de $u(t)$.

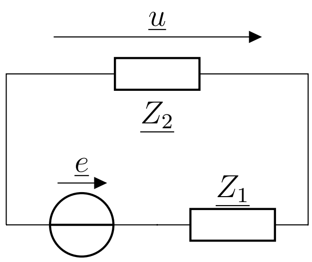
(a) Donner la représentation complexe de e et u.
Donner $\underline{u}$ en fonction de l'amplitude complexe $\underline{U}$, et définir $\underline{U}$.

(b) Donner les impédances et admittances complexes de la bobine et du condensateur.

(c) Donner l'impédance complexe équivalente $\underline{Z_1}$ à l'association de la bobine d'inductance L et la résistance R.

(d) Donner l'admittance complexe équivalente $\underline{Y_2}$ à l'association du condensateur de capacité C_0 et la résistance R_0.

(e) À partir du schéma équivalent ci-dessous, exprimer $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$.



(f) En déduire l'amplitude complexe sous la forme :

$$\underline{U} = \frac{E_m}{1 + \underline{Z_1}\,\underline{Y_2}}$$

(g) En déduire l'expression de $\underline{U}$ en fonction de R, R_0, L, C_0 et ω.

On admet que

$$\underline{U} = \frac{H_0}{1 - x^2 + \dfrac{jx}{Q}} E_m$$

avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{R + R_0}{R_0 L C}}$, $Q = \sqrt{\dfrac{R_0}{R + R_0}} \left(R\sqrt{\dfrac{C_0}{L}} + \dfrac{1}{R_0}\sqrt{\dfrac{L}{C_0}} \right)$ et $H_0 = \dfrac{R_0}{R + R_0}$

Q10. Exprimer l'amplitude réelle U_m en fonction de x, E_m, H_0 et Q.

Q11. Définir le phénomène de résonance.

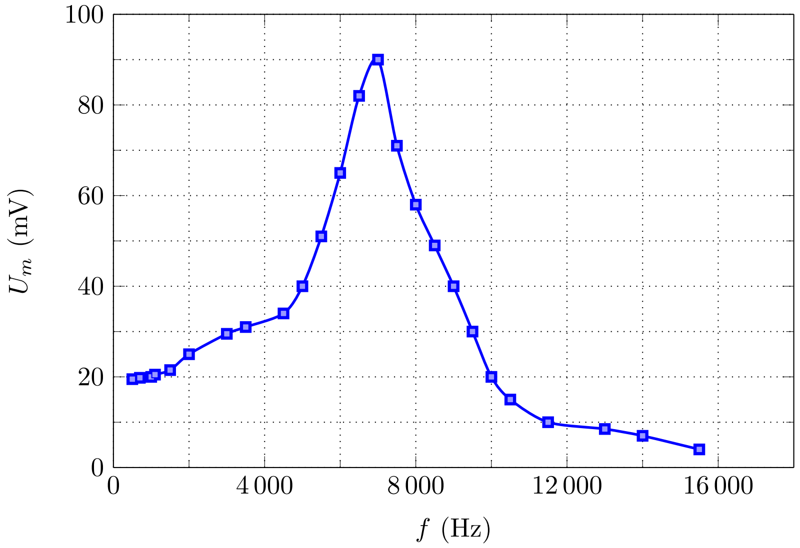
Q12. Montrer que la résonance se produit à une pulsation :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{à la condition que} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Q13. On se place dans le cas où $\dfrac{1}{2Q^2} \ll 1$.

Que peut-on dire de f_r par rapport à f_0 ? En déduire l'expression approchée de U_m à la résonance.

Le graphique de U_m en fonction de la fréquence est le suivant :



Q14. Déterminer les valeurs de ω_0, L, Q et E_m.

Exercice n°3 Suspension de voiture *(Durée : 40 min)*

Les suspensions d'un véhicule ont pour objectif principal d'assurer la meilleure tenue de route possible, de façon à garantir la sécurité des occupants. Il existe de nombreux types de suspensions dont le rôle est notamment de contrôler le déplacement vertical d'un véhicule.
Par la suite, nous allons nous intéresser aux suspensions à ressorts disposant d'amortisseurs rhéomagnétique.
Différents éléments participent à l'amortissement mais tous les effets seront ramenés au niveau des suspensions dont seul le déplacement vertical est étudié.
L'étude est menée en référentiel galiléen et l'on note $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ l'accélération du champ de pesanteur.

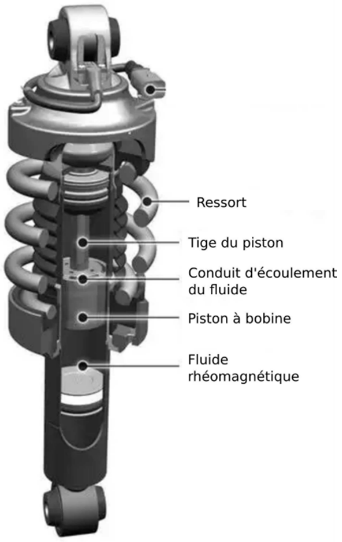


FIGURE 1 – Schéma d'une suspension à ressort avec amortisseur rhéomagnétique

Le véhicule, de masse M, repose de façon équivalente sur quatre amortisseurs supposés identiques. On note m la masse supportée par un seul amortisseur.

Q15. Quelle masse m supporte un amortisseur ?

Partie A Suspension sans amortissement

On modélise la suspension sans amortisseurs d'une voiture par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, sur lequel repose la masse m (figure 3).

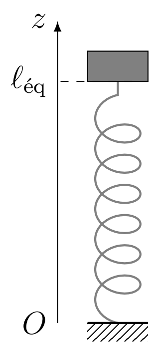


FIGURE 2 – Modélisation d'une suspension à ressort

Q16. Déterminer la longueur à l'équilibre du ressort, $\ell_{éq}$, en fonction de g, k, ℓ_0 et de m.

Q17. Donner, en fonction de k et de m, l'expression de la pulsation propre ω_0 du système. Justifier son expression par une analyse dimensionnelle.

Partie B Suspension avec amortissement

La force de frottement fluide s'écrit :

$$\overrightarrow{F_f} = -h\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_z}$$

avec $z(t) = \ell(t) - \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$ la variable repérant la position de la masse m à partir de sa position d'équilibre.

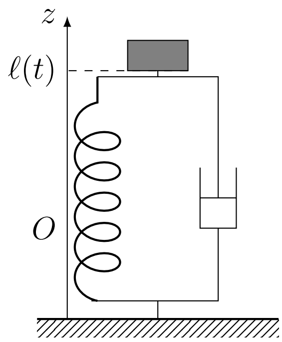


FIGURE 3 – Suspension avec amortisseur

Q18. Montrer que l'équation différentielle du mouvement vertical d'un amortisseur de la voiture soutenant la masse m se met sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = 0$$

et déterminer les expressions de ω_0 et Q en fonction de k, h et de m.

Q19. En déduire, en fonction de h et de m, la valeur limite k_c de k permettant le retour le plus rapide du système à sa position d'équilibre (régime critique).

Q20. À la construction du véhicule, le régime d'oscillations correspond au régime apériodique. Si l'on charge trop le véhicule, existe-t-il un risque de passer en régime pseudo-périodique ?

L'amortisseur a été soumis à une excitation sinusoïdale $\overrightarrow{F}(t) = F_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$ de fréquence variable et l'amplitude des oscillations obtenues a été enregistrée pour différentes valeurs de m, ce qui a permis d'obtenir les courbes de résonance de la figure 4.

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m}$$

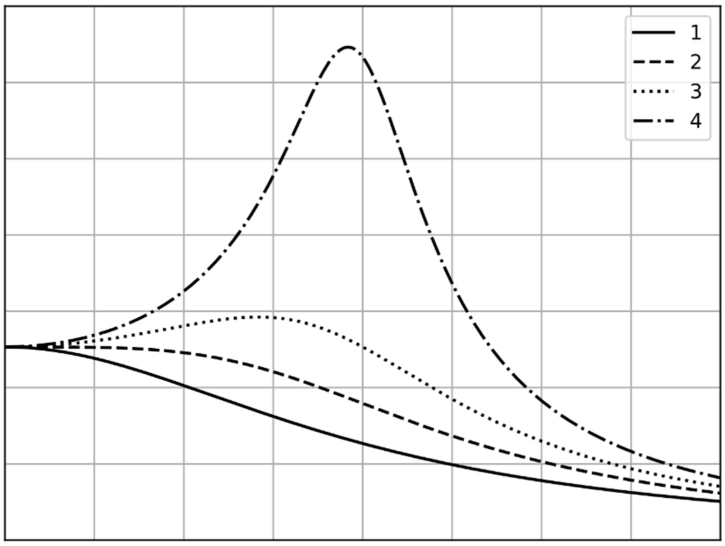


FIGURE 4 – Courbes de résonance

Q21. On cherche la solution, une fois le régime transitoire terminé, sous la forme $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$. À partir de l'équation différentielle, établir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z_m}$ associé à la représentation complexe de z.

Q22. En déduire l'expression de l'amplitude Z_m.

Q23. Proposer des grandeurs pour l'axe des abscisses et des ordonnées de la figure 4.

Q24. Expliquer quelle courbe correspond à la masse la plus élevée.