

? Lundi 25 novembre 2024
Devoir Surveillé n°4 (2) – Durée : 2 heures

La calculatrice est **AUTORISÉE**.

Chapitres concernés : Électricité

- Chapitre n°6. Oscillateurs libres amortis
- Chapitre n°7. Oscillateurs amortis en RSF

⚠️ Consignes à respecter

- Lire la **totalité** de l'énoncé et commencer par les exercices les plus abordables.
- Présentation de la copie :
 - Prendre une **nouvelle copie double pour chaque exercice**.
 - Tirer un **trait horizontal** à travers toute la copie **entre chaque question**.
 - Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
 - Numérotter les pages sous la forme x/nombre total de pages.
- Rédaction :
 - Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
 - **Justifier** toutes vos réponses.
 - Applications numériques : nombre de **chiffres significatifs adapté** et avec une **unité**.

Ce sujet comporte **3** exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de **6** pages.

Contenu du DS :

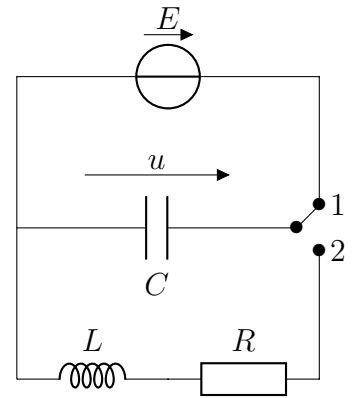
Exercice n°1	Capteur d'hygrométrie (Durée : 40 min)	2
Exercice n°2	Détermination des caractéristiques d'un microphone de guitare (Durée : 40 min)	3
Exercice n°3	Suspension de voiture (Durée : 40 min)	4

Exercice n°1 Capteur d'hygrométrie (Durée : 40 min)

Pour tenir compte de la présence de vapeur d'eau dans l'air, on mesure H , l'humidité relative à la température T : cette grandeur est exprimée en % et est le rapport entre la pression partielle en vapeur d'eau effective et la pression de vapeur saturante (la pression partielle en vapeur d'eau à l'équilibre chimique entre l'eau liquide et l'eau vapeur).

Dans cet exercice, on étudie un capteur d'humidité constitué d'un condensateur dont la capacité varie avec l'humidité.

On se place dans le circuit ci-contre, comprenant un générateur de tension continue de force électromotrice E et de résistance interne nulle, une bobine d'inductance L , une résistance R modélisant la résistance totale du circuit et le condensateur de capacité C étudié.



Q1. L'interrupteur K est d'abord placé dans la position 1. Combien vaut la tension u aux bornes du condensateur ?

Q2. À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur dans la position 2.

Montrer que l'équation différentielle à laquelle satisfait la tension $u(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

Donner les expressions de ω_0 et λ en fonction de R , L et C .

Q3. On se place en régime pseudo-périodique.

Montrer que cela n'est possible que pour des valeurs de résistance telles que $R < R_c$, avec R_c une valeur limite à déterminer.

Q4. La tension $u(t)$ est-elle continue en 0? Qu'en est-il de sa dérivée temporelle? Déterminer leur valeur à $t = 0^+$.

Q5. Résoudre l'équation différentielle : exprimer $u(t)$ en fonction de E , λ , $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ et t .

Q6. On se place dans le cas où $R = 0$.

Que devient l'équation différentielle et quelle est la nouvelle expression de $u(t)$? Donner l'expression de la période propre T_0 du circuit.

Q7. Montrer que si la résistance R est très inférieure à R_c , alors la période des oscillations observées est très proche de T_0 .

En présence d'humidité dans l'air, on mesure $T_0 = 27,2 \mu\text{s}$. Sachant que l'inductance de la bobine est $L = 150 \text{ mH}$, calculer la capacité C du condensateur.

Q8. On peut lire sur la notice les indications suivantes :

- gamme de mesures : 10% à 90% d'humidité relative ;
- sensibilité : C augmente de 0,40 pF par % d'humidité relative ;
- capacité : $C = 123 \text{ pF}$ pour $H = 40\%$.

La capacité est liée linéairement à l'humidité relative : $C = aH + b$.

Déterminer l'humidité relative de l'atmosphère lors de la mesure précédente.

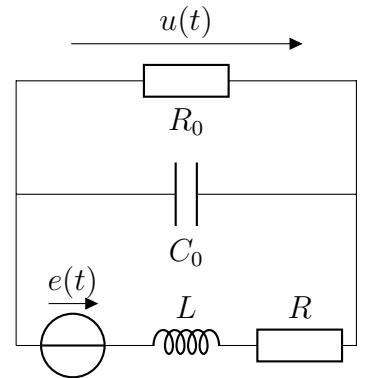
Exercice n°2 Détermination des caractéristiques d'un microphone de guitare (Durée : 40 min)

Situés sous les cordes d'une guitare électrique, les microphones en sont un des instruments fondamentaux pour bien restituer le son. Un microphone de guitare est constitué d'un ou plusieurs aimants entourés d'une bobine de cuivre. La corde en mouvement vibre au-dessus de l'aimant créant par induction une tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ supposée sinusoïdale.

Le comportement électrique du microphone peut être modélisé par le schéma ci-contre.

On donne $C_0 = 100 \text{ pF}$, $R_0 = 1,0 \text{ M}\Omega$ et $R = 3,0 \text{ k}\Omega$.

On cherche $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.



Q9. On note \underline{U} l'amplitude complexe de $u(t)$.

Montrer que :

$$\underline{U} = \frac{H_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}} E_m \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On exprimera H_0 , Q et ω_0 en fonction de R , R_0 , C_0 et L .

Q10. Exprimer l'amplitude réelle U_m en fonction de x , E_m , H_0 et Q .

Q11. Définir le phénomène de résonance.

Q12. Montrer qu'il survient à une fréquence :

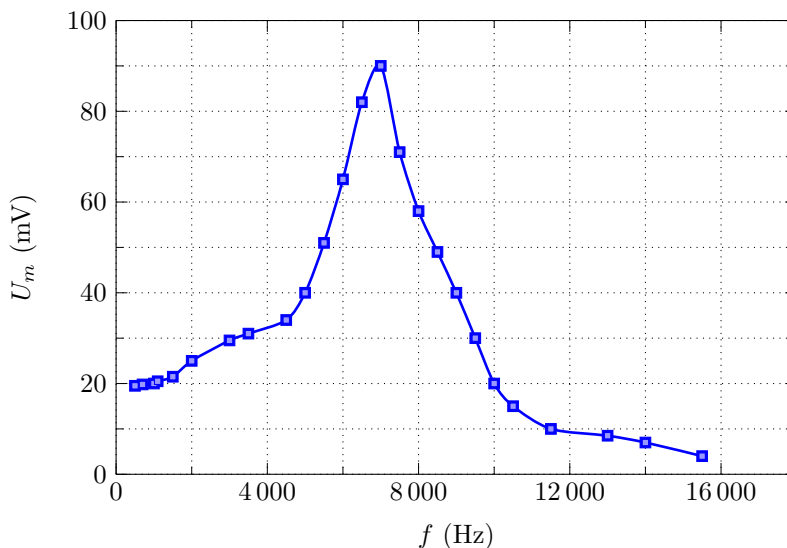
$$f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{où} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

à la condition que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Q13. On se place dans le cas où $\frac{1}{2Q^2} \ll 1$.

Simplifier l'expression de f_r et en déduire l'expression approchée de U_m à la résonance.

Le graphique de U_m en fonction de la fréquence est le suivant :



Q14. Déterminer les valeurs de ω_0 , L , Q et E_m .

Exercice n°3 Suspension de voiture (Durée : 40 min)

Les suspensions d'un véhicule ont pour objectif principal d'assurer la meilleure tenue de route possible, de façon à garantir la sécurité des occupants. Il existe de nombreux types de suspensions dont le rôle est notamment de contrôler le déplacement vertical d'un véhicule.

Par la suite, nous allons nous intéresser aux suspensions à ressorts disposant d'amortisseurs rhéomagnétique.

Différents éléments participent à l'amortissement mais tous les effets seront ramenés au niveau des suspensions dont seul le déplacement vertical est étudié.

L'étude est menée en référentiel galiléen et l'on note $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ l'accélération du champ de pesanteur.

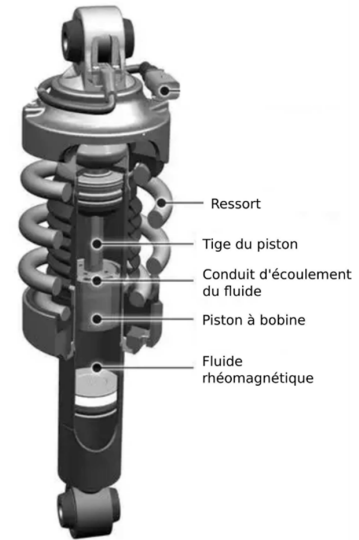


FIGURE 1 – Schéma d'une suspension à ressort avec amortisseur rhéomagnétique

Le véhicule, de masse M , repose de façon équivalente sur quatre amortisseurs supposés identiques. On note m la masse supportée par un seul amortisseur.

Q15. Quelle masse m supporte un amortisseur ?

Partie A Suspension sans amortissement

On modélise la suspension sans amortisseurs d'une voiture par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , sur lequel repose la masse m (figure 4).

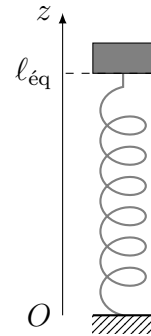


FIGURE 2 – Modélisation d'une suspension à ressort

Q16. Déterminer la longueur à l'équilibre du ressort, ℓ_{eq} , en fonction de g , k , ℓ_0 et de m .

Q17. Donner, en fonction de k et de m , l'expression de la pulsation propre ω_0 du système. Justifier son expression par une analyse dimensionnelle.

Une association simple de deux ressorts peut se faire en série ou en parallèle (figure 3).

Soient deux ressorts de longueur à vide identique ℓ_0 et de constantes de raideur k_1 et k_2 . Selon l'association réalisée, la constante de raideur équivalente vaut k_s en série ou k_p en parallèle.

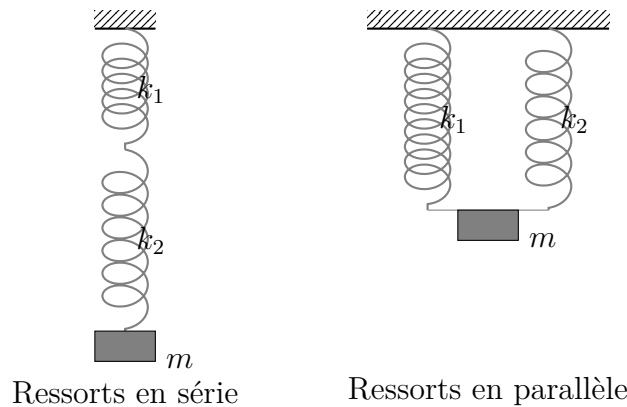


FIGURE 3 – Associations série et parallèle de deux ressorts

Q18. Démontrer que, pour une association de deux ressorts en parallèle, $k_p = k_1 + k_2$.

Q19. Les quatre amortisseurs étant supposés identiques, donner l'expression de la constante de raideur équivalente k_v de l'ensemble du véhicule, en fonction de la constante k de l'un d'entre eux.

Q20. En déduire l'expression de la pulsation propre de la voiture Ω_0 en fonction de ω_0 .

Partie B Suspension avec amortissement

La force de frottement fluide s'écrit :

$$\vec{F}_f = -h \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$

avec $z(t) = \ell(t) - \ell_0 + \frac{mg}{k}$ la variable repérant la position de la masse m à partir de sa position d'équilibre.

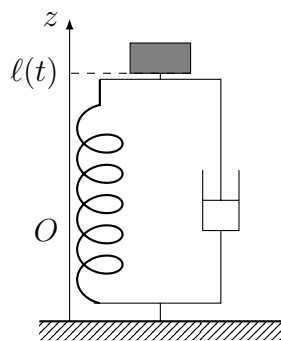


FIGURE 4 – Suspension avec amortisseur

Q21. Montrer que l'équation différentielle du mouvement vertical d'un amortisseur de la voiture soutenant la masse m se met sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0$$

et déterminer les expressions de ω_0 et Q en fonction de k , h et de m .

Q22. En déduire, en fonction de h et de m , la valeur limite k_c de k permettant le retour le plus rapide du système à sa position d'équilibre (régime critique).

Q23. À la construction du véhicule, le régime d'oscillations correspond au régime aperiodique. Si l'on charge trop le véhicule, existe-t-il un risque de passer en régime pseudo-periodique ?

L'amortisseur a été soumis à une excitation sinusoïdale $\vec{F}(t) = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ de fréquence variable et l'amplitude des oscillations obtenues a été enregistrée pour différentes valeurs de m , ce qui a permis d'obtenir les courbes de résonance de la figure 5.

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m}$$

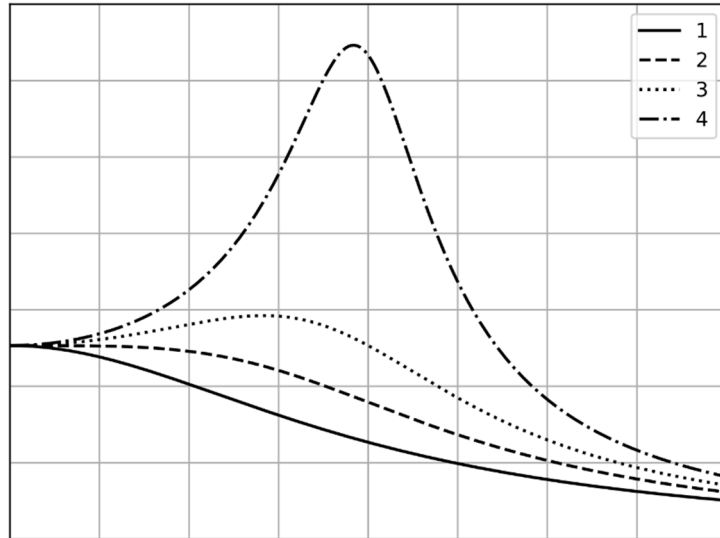


FIGURE 5 – Courbes de résonance

Q24. Sous quelle forme doit-on chercher la solution de l'équation différentielle une fois le régime transitoire terminé ?

Q25. Établir l'expression de l'amplitude complexe \underline{Z}_m associé à la représentation complexe de z .

Q26. En déduire l'expression de l'amplitude Z_m .

Q27. Proposer des grandeurs pour l'axe des abscisses et des ordonnées de la figure 5.

Q28. Expliquer quelle courbe correspond à la masse la plus élevée.