

? Lundi 4 novembre 2024
Devoir Surveillé n°3 (1) – Durée : 2 heures

La calculatrice est INTERDITE.

Chapitres concernés : Électricité

- Chapitre n°5. Oscillateurs harmoniques
- Chapitre n°6. Oscillateurs libres amortis

⚠ Consignes à respecter

- Lire la **totalité** de l'énoncé et commencer par les exercices les plus abordables.
- Présentation de la copie :
 - Prendre une **nouvelle copie double pour chaque exercice**.
 - Tirer un **trait horizontal** à travers toute la copie **entre chaque question**.
 - Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
 - Numérotter les pages sous la forme x/nombre total de pages.
- Rédaction :
 - Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
 - **Justifier** toutes vos réponses.
 - Applications numériques : nombre de **chiffres significatifs adapté** et avec une **unité**.

Ce sujet comporte **3 exercices totalement indépendants** qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de **4 pages**.

Contenu du DS :

Exercice n°0	Un peu de culture!	1
Exercice n°1	Masse percutant un ressort (~ 1 heure).	2
Exercice n°2	Oscillateur électrique (~ 20 min)	3
Exercice n°3	Oscillateur mécanique amorti (Durée ~ 40 min).	3

Exercice n°0 Un peu de culture!

Associer ensemble, les noms des physiciens suivants, leur prénom, leur nationalité, leur découverte, et l'année de leur découverte.

Nom : Ampère - Volta - Ohm

Prénom : Alexandro - Georg Simon - André-Marie

Nationalité : Française - Italienne - Allemande

Date : 1827 - 1819 - 1799

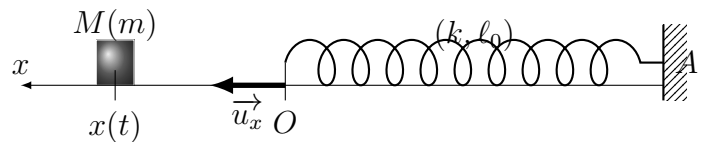
Découverte : loi qui porte son nom - notion de courant électrique - pile

Exercice n°1 Masse percutant un ressort (~ 1 heure)

DANS TOUS les exercices de mécanique, il faut COMMENCER par :

- Définir le SYSTÈME étudié,
- Définir le RÉFÉRENTIEL d'étude,
- Effectuer le BILAN DES FORCES, pour chaque force, donner son NOM (en toute lettre : « poids », « réaction du support » ...), et son expressions.
- Représenter le SCHÉMA du système étudié :
 - GRAND,
 - COMPLET : avec l'axe (Ox, Oz), le système, les forces qui s'exercent sur le système, la longueur du ressort, la distance x ou z ...
 - COLORÉ

Un ressort de longueur à vide $\ell_0 = 30$ cm et de constante de raideur k est fixé en A à une paroi (cf figure ci-contre). Initialement, le ressort est horizontal et à l'équilibre et l'extrémité libre du ressort est initialement en O .



Un point M de masse $m = 200$ g, glisse sans frottement sur l'axe horizontal (Ox). Ce point M percute l'extrémité libre du ressort à l'instant $t = 0$ et M reste accroché à cette extrémité pour $t > 0$.

À $t = 0$, le point M percute le ressort à la vitesse $\vec{v}_0 = -v_0 \vec{u}_x$, avec $v_0 > 0$.

- Q1. Quelle est la longueur prise initialement par le ressort, avant que la masse m s'y accroche ?
- Q2. Une fois la masse accrochée au ressort, quelle est l'expression de la force \vec{f}_{el} exercée par le ressort sur la masse ? On l'exprimera en fonction de la constante de raideur, de la longueur instantanée, de la longueur à vide et d'un vecteur unitaire bien choisi.
- Représenter cette force sur deux schémas distincts : l'un lorsque M (accroché au ressort) est entre O et A , et un autre lorsque M (accroché au ressort) se situe au-delà de O . On sera vigilant au sens de la force sur le schéma compte tenu de la nature comprimée ou allongée du ressort.
- Q3. Compte-tenu de l'origine de l'axe (Ox) donnée par le schéma, exprimer \vec{f}_{el} en fonction de k , x et de \vec{u}_x .
- Q4. Établir l'équation différentielle du mouvement de la masse pour $t \geq 0$.
- Q5. Mettre l'équation différentielle précédente sous la forme canonique suivante :

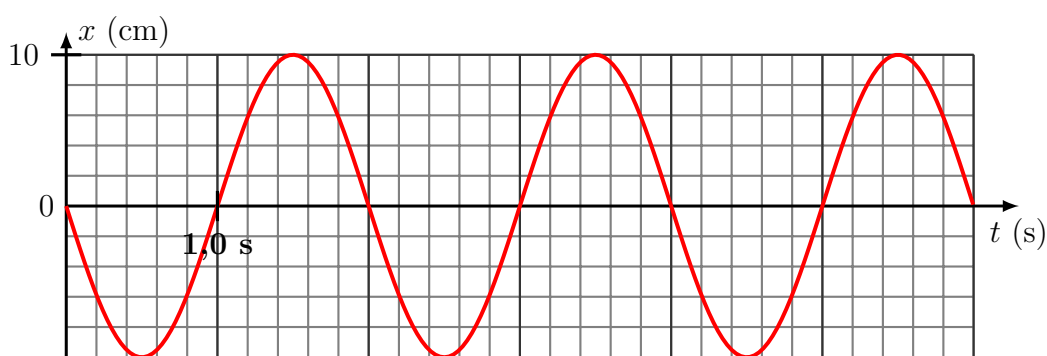
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Comment se nomme un système régi par une telle équation différentielle ?

Exprimer ω_0 en fonction de k et m . Comment se nomme cette grandeur ? En donner l'unité.

- Q6. Résoudre l'équation différentielle compte tenu des données de l'énoncé.
- Q7. Exprimer l'amplitude du mouvement en fonction des données de l'énoncé.

On trace l'évolution de l'abscisse en fonction du temps :



- Q8. À l'aide de mesures graphiques et des données de l'énoncé, déterminer la valeur de la pulsation propre ω_0 des oscillations, de la constante de raideur k du ressort et de la vitesse v_0 . Approximation : $\pi^2 \approx 10$.
- Q9. Exprimer, à t quelconque, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique en fonction de v_0 , m , ω_0 et t . Commenter.
- Q10. Représenter l'allure de l'évolution temporelle de ces trois énergies en respectant les conditions initiales. L'échelle de 1 s devra apparaître sur le graphe.

On refait la même manipulation pour différentes vitesses initiales v_0 .

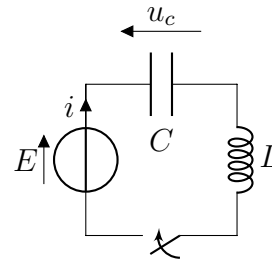
- Q11. La période du mouvement sera-t-elle différente pour ces nouvelles vitesses initiales? Justifier.
L'amplitude du mouvement sera-t-elle différente pour ces nouvelles vitesses initiales? Justifier.
- Q12. Théoriquement, à quelle condition sur v_0 , la masse vient-elle percuter la paroi en A ? Vous donnerez une expression littérale puis numérique.
Pourquoi dans la réalité cela ne se passera pas ainsi même si la condition est vérifiée?

Exercice n°2 Oscillateur électrique (~ 20 min)

On étudie le circuit ci-contre.

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et aucun courant ne circule.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le générateur idéal de fem E constante au condensateur et à la bobine.



- Q13. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_c aux bornes du condensateur et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 u_c(\infty)$$

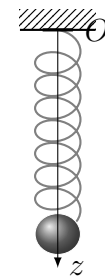
On identifiera les expressions de ω_0 et $u_c(\infty)$.

- Q14. Déterminer proprement les valeurs de $u_c(0^+)$ et $\frac{du_c}{dt}(0^+)$.
- Q15. Résoudre complètement l'équation différentielle.
- Q16. Représenter l'allure de $u_c(t)$.
- Q17. Déterminer l'expression de i en fonction de E , ω_0 , C et t . Une (voire deux) ligne de calculs au maximum sont nécessaires.

Exercice n°3 Oscillateur mécanique amorti (Durée ~ 40 min)

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel M de masse m accroché à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'axe vertical descendant est noté (Oz) , avec O situé au point d'attache du ressort.

On modélise les frottements visqueux, c'est-à-dire les frottements exercés par un fluide (gaz ou liquide) visqueux, par une force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, où α est une constante positive.



- Q18. Établir l'expression de la longueur du ressort $\ell_{\text{éq}}$ à l'équilibre.
- Q19. Établir l'équation différentielle vérifiée par z , et l'écrire sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$$

Identifier les expressions de ω_0 et Q . Quelles sont les noms et unités de ω_0 et Q ?

On vérifiera la cohérence entre $z_{\text{éq}}$ identifié ici, et $\ell_{\text{éq}}$ établie précédemment.

Q20. On donne les valeurs des différents paramètres : $m = 0,10 \text{ kg}$; $k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\alpha = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Calculer la valeur numérique de Q . Quel est le régime transitoire que va suivre M ?

Q21. (a) Écrire l'équation différentielle homogène.

Écrire le polynôme caractéristique associé à l'équation homogène.

(b) Écrire le discriminant en fonction de ω_0 et Q . Quel est son signe ?

(c) Écrire les racines du polynôme caractéristique.

(d) Écrire la solution générale, notée z_H de l'équation homogène.

(e) Établir une solution particulière, notée z_P , de l'équation différentielle.

Q22. En déduire la solution générale de l'équation différentielle.

On fera intervenir les deux grandeurs $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

Comment s'appelle Ω ?

Q23. À $t = 0$, $z(0) = z_{\text{eq}}$ et $\frac{dz}{dt}(0) = v_0 > 0$. Déterminer complètement l'évolution de $z(t)$.

Q24. Représenter l'allure de $z(t)$. On fera apparaître dessus l'état initial, le régime transitoire, le régime permanent final, la pseudo-période.

Q25. Que caractérise τ ? Comment évolue-t-il si les frottements deviennent plus importants (toute chose égale par ailleurs) ?