À rendre jeudi 16 janvier 2025

Devoir Maison n°11

Travail à faire :

- Exercice n°1. Pour tous.
- Exercice n°2 ou 3, l'un des deux au choix :
  - Exercice n°2 plus difficile, à faire si vous avez eu plus de 15 au DS.
  - Exercice n°3 plus facile, à faire si vous avez eu moins de 12 au DS.
  - Pour les notes intermédiaires, à choisir en fonction de votre sentiment sur la maitrise des mouvements avec frottements fluides.

Exercice n°1 Reprise du DS n°6

Refaire les questions de l'exercice n°1 de mécanique qui n'ont pas été faites/correctement faites dans le DS. Vous pouvez avantageusement vous appuyer sur le cours, les TD, les DM et le corrigé du DS et vous poser les questions :

- « Pourquoi n'ai-je pas réussi à traiter cette question pendant le DS ? »
- « Que puis-je faire pour y parvenir la prochaine fois ? »
- « Comment traiter correctement cette question, notamment en terme de rédaction ? »

Exercice n°2 Mouvement d'un volant de badminton

On étudie le mouvement d'un volant de badminton de masse $m = 5,0$ g, assimilé à un point matériel V de masse m. Il est frappé par la raquette à la hauteur du sol $h = 2,0$ m et possède initialement un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$, de norme v_0 et incliné d'un angle $\alpha = 52°$ par rapport à l'horizontal.
On se place dans le référentiel terrestre galiléen, dont le repère cartésien est choisi de sorte à ce que l'origine soit à la verticale du lieu de frappe, l'axe (Oz) vertical ascendant et l'axe (Ox) horizontal de sorte à ce que $\overrightarrow{v_0}$ soit contenu dans le plan (Oxz).
On prend en compte les frottements fluides dus à l'air et on les modélise par une force de frottement quadratique $\overrightarrow{f} = -\frac{1}{2}C_x\rho S\,\|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{v}$, où $C_x \approx 0,5$ uSI pour un volant de badminton, $\rho = 1,3\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ la masse volumique de l'air, $S = 28\ \mathrm{cm}^2$ la section droite du volant.

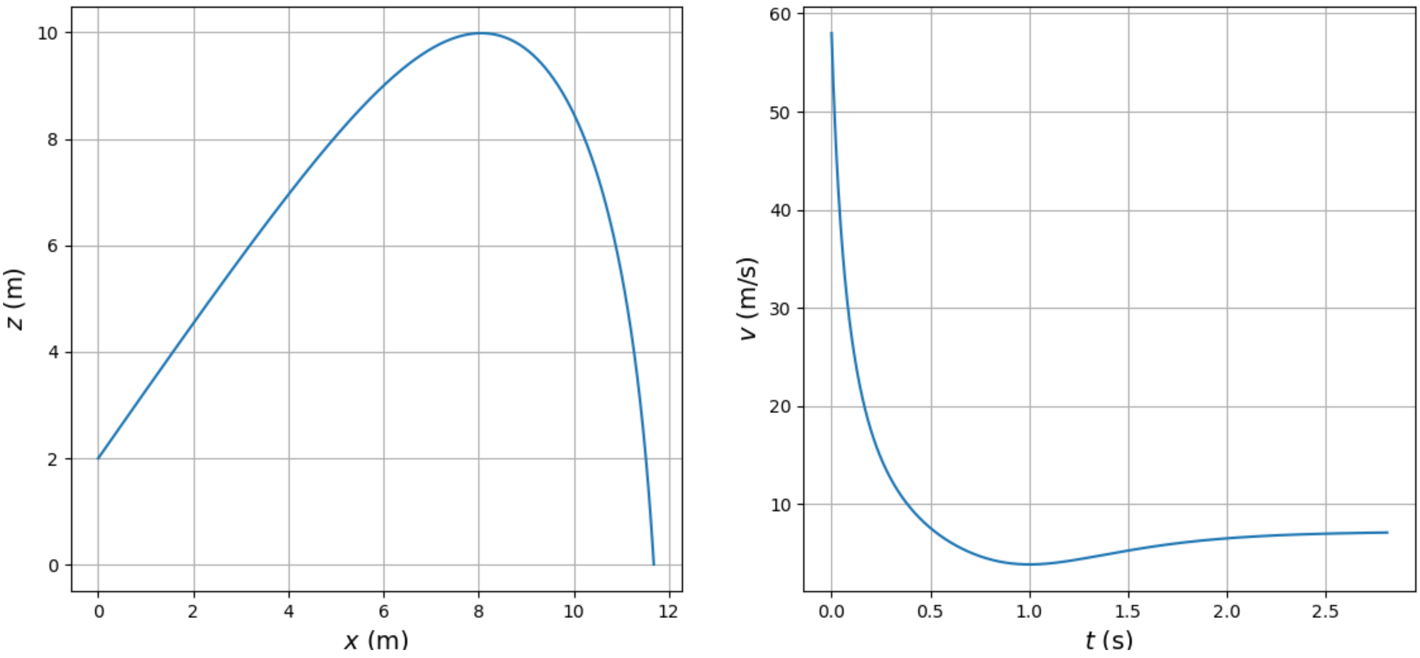
Q1. Déterminer l'unité de C_x.

Q2. Établir l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ du volant.

Q3. Déterminer l'expression du vecteur vitesse limite $\overrightarrow{v_{\mathrm{lim}}}$ atteint par le volant en fonction des données de l'énoncé et de v_{lim}, sa norme.
Que dire du mouvement du volant quand la vitesse limite est atteinte ?
Comment sont les forces s'exerçant sur le volant ?

Q4. En déduire l'expression de la norme du vecteur vitesse limite en fonction de C_x, ρ, S, m et g.
Faire l'application numérique. Commenter.
En déduire l'expression du vecteur vitesse limite en fonction de m, g, C_x, ρ, S et $\overrightarrow{u_z}$. *On fera attention aux signes.*

Grâce au pointage réalisé sur une vidéo, on obtient la trajectoire du volant de badminton (à gauche) et l'évolution de la norme du vecteur vitesse avec le temps (à droite).



On étudie la première phase du mouvement durant laquelle le poids peut être négligé.

Q5. À partir de Q2 et Q4, montrer que l'équation différentielle du mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{g} - \frac{g}{v_{\text{lim}}} v \vec{v}$$

où v est la norme de $\vec{v}$.

Q6. À quelle condition sur v et v_{lim} peut-on négliger le poids ?

On suppose que cette condition est vérifiée au début du mouvement.

Q7. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\vec{v}$.
Justifier rapidement que le mouvement est alors rectiligne dans la direction du vecteur vitesse initial $\vec{v_0}$.

Q8. On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire dans la direction et le sens du mouvement durant cette phase, ainsi $\vec{v} = v\vec{u}$.
En déduire l'équation différentielle vérifiée par v et la résoudre pour obtenir v en fonction du temps*.
Montrer qu'elle s'écrit $v(t) = \dfrac{v_0}{1 + \dfrac{v_0 g t}{v_{\text{lim}}^2}}$

Q9. Déterminer le temps $t_{1/2}$ pour lequel la vitesse est égale à la moitié de la vitesse initiale.

Q10. Exprimer la composante horizontale v_x du vecteur vitesse $\vec{v}$ en fonction de v et α.
En déduire l'expression de la position x au cours du temps de v_{lim}, α, g, v_0 et t.

Q11. En déduire l'expression de x en fonction de v :

$$x(v) = \frac{v_{\text{lim}}^2 \cos(\alpha)}{g} \ln\left(\frac{v_0}{v}\right)$$

Q12. On suppose que l'approximation de la question Q6 cesse d'être valable lorsque la composante verticale de la force de freinage est égale au poids.
Quelle est l'expression de v à cet instant ?
En déduire la distance horizontale parcourue L. On peut considérer en première approximation que c'est la portée du tir. Faire l'application numérique.

∗. On pourra remarquer que cette équation ressemble à celle obtenue pour une cinétique d'ordre 2.

Exercice n°3 Bulles de champagne

Dans cet exercice, on cherche à calculer le temps que met une bulle qui se forme en bas d'une coupe de champagne † pour arriver à la surface. Les bulles de champagne sont constituées de dioxyde de carbone CO_2 (de masse molaire $M_{CO_2} = 44$ g · mol^{-1}. Celui-ci, initialement dissout dans le champagne quand la bouteille est fermée, repasse à l'état gazeux quand on ouvre la bouteille (puisque la pression diminue alors brusquement).

La bulle étudiée est sphérique de diamètre constant $D = 1,0$ mm. Elle apparait à $t = 0$ sans vitesse initiale en bas de la coupe à l'altitude $z = 0$ (axe (Oz) ascendant), puis remonte jusqu'à la surface. La hauteur de la coupe est $h = 10$ cm.

Au cours de son ascension, la bulle est freinée par une force de frottement visqueux $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{v}$, où le coefficient k est donné par la formule de Stokes : $k = 6\pi\eta r$, dans laquelle r est le rayon de la bulle et η la viscosité du champagne : $\eta = 1,0 \times 10^{-3}$ Pa · s.

La masse volumique du champagne est quasiment égale à celle de l'eau, soit $\rho_{eau} = 1,0 \times 10^3$ kg · m^{-3}.

On prendra comme valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 9,8$ m · s^{-2}.

La température et la pression sont considérées uniformes dans le champagne, aux valeurs : $T = 25°\text{C} = 298$ K et $P = 1,0 \times 10^5$ Pa. On rappelle la valeur de la constante des gaz parfaits : $R = 8,314$ J · K^{-1} · mol^{-1}.

Q1. Calculer la masse volumique ρ_{CO_2} du CO_2 gazeux dans la bulle de champagne, que l'on assimilera à un gaz parfait ‡.

Q2. Exprimer et calculer le poids de la bulle de champagne.
Exprimer et calculer la poussée d'Archimède qui s'exerce sur la bulle de champagne.
Conclure sur le fait qu'on peut négliger le poids de la bulle devant la poussée d'Archimède.

Q3. Établir l'équation vérifiée par la composante v_z du vecteur vitesse de la bulle.

Q4. Expliquer qualitativement pourquoi la bulle de champagne va atteindre une vitesse limite au cours de son ascension.
Déterminer ensuite l'expression de v_{lim} en fonction des données de l'énoncé.
Faire l'application numérique.

Q5. Montrer que l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{v_z}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$$

et identifier τ (en fonction de r, η, et ρ_{CO_2}).

Q6. Résoudre l'équation différentielle satisfaite par $v_z(t)$.

Q7. Au bout de combien de temps la bulle a-t-elle atteint sa vitesse limite, à 1% près ? Vous établirez une expression littérale puis vous ferez l'application numérique.

Q8. Déterminer l'équation horaire du mouvement $z(t)$.

Q9. Compte tenu de la valeur trouvée à la question Q7, justifier qu'on peut considérer que $z(t) \approx v_{\text{lim}}t$.
Calculer alors le temps T que met la bille pour arriver à la surface.

†. L'abus de l'alcool est dangereux pour la santé.

‡. On pourra si besoin aller voir le cours de chimie sur la loi des gaz parfaits. Attention aux unités, notamment pour la masse molaire. On vérifiera que l'ordre de grandeur de la masse volumique est entre 1 et 2 kg · m^{-3}.