? À rendre jeudi 23 janvier 2025

Devoir Maison n°12

Travail à faire :

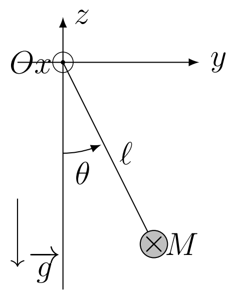
- Exercice n°1. Pour tous.
- Exercice n°2 ou 3, l'un des deux au choix :
  - Exercice n°2 plus difficile, à faire si vous avez eu plus de 15 au DS.
  - Exercice n°3 plus facile, à faire si vous avez eu moins de 12 au DS.
  - Pour les notes intermédiaires, à choisir en fonction de votre sentiment sur la maitrise des mouvements avec frottements solides.

Lois de Coulomb :

- En présence de glissement : $\|\overrightarrow{R_T}\| = f_d\|\overrightarrow{R_N}\|$ et $\overrightarrow{R_T} \cdot \overrightarrow{v_g} < 0$
- En l'absence de glissement : $\|\overrightarrow{R_T}\| < f_s\|\overrightarrow{R_N}\|$

Exercice n°1 Pendule simple amorti

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligé. On note ℓ sa longueur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$, avec z vers le haut et $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.
On prend en compte l'action de l'air que l'on modélise par une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$.



Q1. Déterminer l'unité de α.

Q2. Effectuer la rédaction d'un exercice de mécanique :
- définir le système,
- définir le référentiel d'étude et de la base cartésienne liée
- choisir le système de coordonnées adapté à l'étude,
- effectuer le bilan des forces,
- faire un grand et beau schéma avec toutes les informations utiles dessus : le dispositif étudié, les forces, la base de projection ...

Q3. Rappeler les expressions du vecteur vitesse et du vecteur accélération sur un mouvement circulaire de rayon ℓ non uniforme.

Q4. Appliquer le principe fondamental de la dynamique et le projeter dans la base polaire.

Q5. En déduire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ.

On lâche la masse m d'un angle $\theta_0 = 10°$ sans vitesse initiale, on peut donc considérer qu'à tout instant θ reste très petit devant 1 rad.

Q6. Montrer alors que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

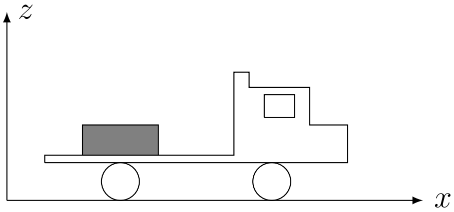
Nommer les constantes ω_0 et Q, donner leurs unités et établir leurs expressions en fonction de m, α, g et ℓ.

Q7. Résoudre complètement l'équation différentielle pour $m = 100$ g, $\ell = 10$ cm, $\alpha = 0,2$ uSI et $\theta_0 = 6,3.10^{-2}$ uSI. ***Si vous bloquez à cette question, rendez-vous, sans passer par la case « internet », au chapitre 6 §I.4, puis poursuivez la question. Vous avez également le droit à un « appel à un ami » (traduction = mail à la prof).*** *Si vous n'avez pas les références, ce n'est pas grave, vous avez compris l'idée !*

Q8. Tracer l'allure de θ en fonction du temps. *On soignera l'allure !*

Exercice n°2 Camion au démarrage

Un camion démarre avec une accélération $\overrightarrow{a_0} = a_0\overrightarrow{e_x}$ (Mouvement rectiligne uniformément accéléré).
Sur son plateau, se trouve une boîte de masse m qui n'est pas attachée.
Le coefficient de frottement solide entre la boîte et le plateau est noté f.



On souhaite déterminer le mouvement de la boîte dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}\left(O;\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$ considéré galiléen. L'instant initial choisi est celui auquel le camion démarre, le centre de gravité de la boîte se trouve à l'origine O du repère.

Q1. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(C/\mathscr{R})$ et le vecteur position $\overrightarrow{OC}$ du camion dans le référentiel terrestre.

Hypothèse 1 : La boîte ne glisse pas sur le camion

Q2. Que signifie « la boîte ne glisse pas sur le camion » ? Qu'impose cette hypothèse sur le vecteur vitesse de la boîte et sur les forces de réaction de la plateforme du camion sur la boîte ?

Q3. Utiliser le principe fondamental de la dynamique pour déterminer la condition sur a_0 pour que la boîte ne glisse pas sur la plateforme.

Hypothèse 2 : La boîte glisse

Q4. Que signifie « la boîte glisse sur le camion » ? Donner les conséquences de cette hypothèse sur le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(B/\mathscr{R})$ de la boîte et sur les forces de réaction de la plateforme du camion sur la boîte $\overrightarrow{R_N}$ et $\overrightarrow{R_T}$.

Q5. À partir du principe fondamental de la dynamique, déterminer la composante $R_{T,x}$ (à un signe près que l'on déterminera à la question suivante) le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(B/\mathscr{R})$ de la boîte (au même signe près).

Q6. Exprimer la vitesse de glissement $\overrightarrow{v_g}(B/C)$ de la boite sur le camion.
Exprimer $\overrightarrow{v_g}(B/C)\cdot\overrightarrow{R_T}$.
En exploitant la condition de glissement sur $\overrightarrow{v_g}(B/C)\cdot\overrightarrow{R_T}$, justifier que nécessairement $\overrightarrow{R_T}$ et $\overrightarrow{v}(B/\mathscr{R})$ sont selon $+\overrightarrow{u_x}$
En déduire également la condition sur a_0 pour que l'hypothèse que la boîte ne glisse pas est correcte.

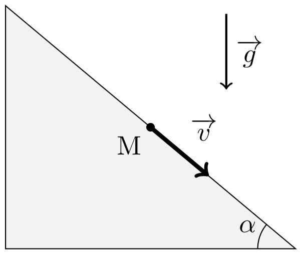
Q7. Exprimer l'équation horaire de la boîte. Quel est son mouvement ?

Exercice n°3 Descente en luge

La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur est allongé, sur le dos et les pieds en avant, sur la luge qui glisse sur une piste de glace. Pour freiner, le lugeur ne peut compter que sur ses pieds car la luge ne comporte pas de frein. Les spécialistes peuvent atteindre des vitesses supérieures à 100 km/h.

Pour la modélisation, on assimile l'ensemble {luge+lugeur} (désigné par la suite sous le terme simple de luge) à un point matériel M de masse $m = 100$ kg. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse $v_0 = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10% (on descend verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m).
On appelle α l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements solides de coefficient $f = 0,05$ sont pris en compte et modélisés par les lois de Coulomb.



Q1. Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur la luge et dessiner un schéma représentant ces forces, en justifiant soigneusement leur direction et leur sens.

Q2. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, exprimer $\|\overrightarrow{R_N}\|$.
En exploitant la loi de Coulomb, en déduire $\|\overrightarrow{R_T}\|$.
De nouveau à l'aide du PFD, montrer que la composante du vecteur accélération s'écrit

$$a_x = (\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))g$$

Q3. L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée.
Établir l'expression de la vitesse v_x en fonction du temps.

Q4. Exprimer l'instant t_a auquel la luge atteint la vitesse $v_a = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q5. Effectuer l'application numérique (sans calculatrice, pour vous entraîner). Pour cela (progressivement, vous devriez vous passer de ces indications) :
 (a) Exprimer $\tan(\alpha)$, et montrer que $\tan(\alpha) = 0,1$. Pourquoi peut-on dire que $\alpha \approx 0,1$ rad ?
 (b) En déduire $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$. *Sans calculatrice ! Pensez aux DL en maths.*
 (c) En déduire la valeur de t_a.

Q6. Déterminer l'équation horaire $x(t)$ de la luge.

Q7. Quelle est la distance d_a parcourue lorsque la luge atteint la vitesse v_a ? *L'expression devra être simplifiée au maximum : v_a, v_0, g et $\sin(\alpha) - f\cos(\alpha)$ ne doivent apparaître qu'une seule fois dans l'expression finale.*
Application numérique. *Aucune difficulté à la faire de tête sans calculatrice, en réutilisant les approximations précédentes.*