Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)
TD n°12 Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

Méthode : Comment travailler des exercices ?

Avant la séance de TD :

- ★ Sur une feuille de brouillon, avec un crayon à la main et le chapitre ouvert sous les yeux.
- ★ Essayer des « trucs » même si cela n'aboutit pas.
- ★ Faire des schémas complets et suffisamment grands.
- ★ Ne rien écrire sur l'énoncé de TD afin de pouvoir refaire les exercices après la correction en classe.
- ★ Réfléchir environ 10 à 15 min sur chaque exercice demandé. Si vous bloquez complètement sur une question/un exercice, passez à la suite au bout de 10 min, et me poser des questions soit directement soit par mail nvalade.pcsi@gmail.com .

Après la séance de TD :

- ★ Refaire les exercices corrigés ensemble, sans regarder le corrigé dans un premier temps.
- ★ Une fois l'exercice terminé ou si vous êtes totalement bloqué, reprendre avec le corrigé.

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7
Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.	✎		✎	✎	✎	✎	✎
Connaître l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur et élastique.	✎	✎	✎	✎	✎		✎
Distinguer force conservative et force non conservative.	✎		✎	✎	✎		✎
Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.			✎		✎	✎	
Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie.						✎	
Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.					✎	✎	

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Skieuse

Une skieuse de masse $m = 60$ kg descend une piste rectiligne de longueur $\ell = 100$ m de pente 50%. On prend en compte les frottements solides de coefficient de frottement $f = 0,1$ et qui vérifient les lois de Coulomb du frottement solide. On néglige les frottements fluides.

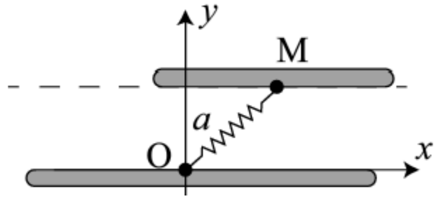
Q1. Faire un schéma représentant le système et les forces.

Q2. Déterminer l'expression des travaux de la réaction normale et de la force de frottement solide.

Q3. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, établir la vitesse de la skieuse en bas de la piste en supposant que sa vitesse initiale est nulle.

Exercice n°2 Téléphone

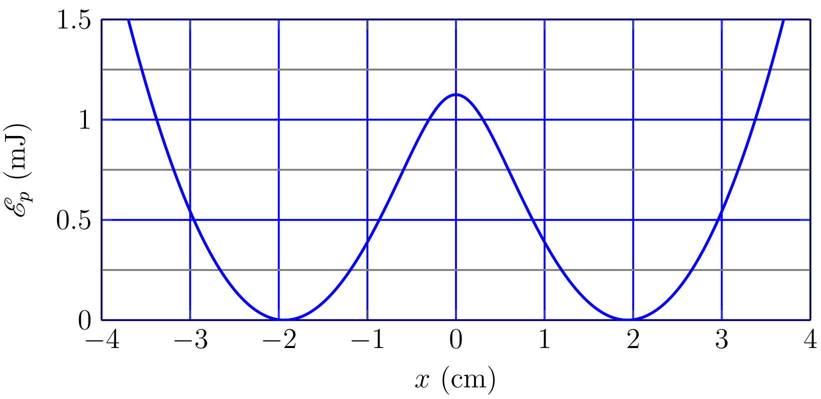
Un des premiers téléphones portables grands publics était composé de deux parties coulissantes composées de l'écran et du clavier. Un ressort de constante k et de longueur à vide ℓ_0 permettait d'avoir deux positions stables, l'une correspondant au téléphone ouvert et l'autre fermé. Dans le schéma proposé, le point $\mathrm{M}(x, a)$ peut se translater horizontalement.



Q1. À l'aide du schéma ci-dessus, exprimer la longueur du ressort ℓ en fonction de x et a.

Q2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique.

On donne le graphe de $\mathscr{E}_p$ en fonction de x.



Q3. Préciser les positions d'équilibre et leur stabilité.

Q4. Retrouver ces résultats mathématiquement [1].

Données : $k = 10$ N · m^{-1} ; $a = 0,50$ cm ; $\ell_0 = 2,0$ cm.

Exercice n°3 Marsupilami

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée créé par Franquin aux capacités physiques remarquables, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante. Pour se déplacer, le Marsupilami enroule sa queue comme un ressort entre lui et le sol et s'en sert pour se propulser vers le haut.
On note $\ell_0 = 2$ m la longueur à vide du ressort équivalent. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur du ressort est $\ell_m = 50$ cm.
La masse de l'animal est 50 kg et la queue quitte le sol lorsque le ressort mesure ℓ_0.
Tous les frottements sont négligés dans cet exercice.

Q1. Que peut-on dire de l'énergie mécanique du Marsupilami ?

Q2. Quelles sont les forces qui s'exercent sur le Marsupilami durant les différentes phases du mouvement ?

Q3. Quelle est la constante de raideur du ressort équivalent si la hauteur maximale d'un saut est $h = 10$ m ?

Q4. Quelle est sa vitesse lorsque la queue quitte le sol ?

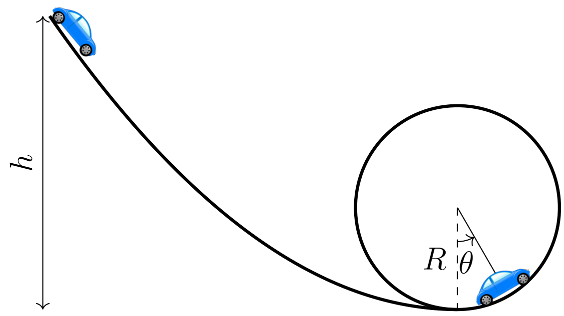
1. Indications :

1. Dériver $\mathscr{E}_p$.
2. Chercher les annulations de la dérivée pour déterminer les positions d'équilibre.
3. Dériver une deuxième fois.
4. Évaluer la dérivée seconde aux positions d'équilibre, déterminer les signes et conclure sur leurs stabilités.

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Looping

Le nouveau jeu pour petites voitures de la petite Louise contient une descente, de hauteur h, permettant aux voitures de prendre de l'élan avant d'aborder un looping de rayon $R = 30$ cm.
La petite voiture est assimilée à un point matériel de masse $m = 30$ g qui glisse sans frottement sur la piste.



Q1. Que peut-on dire de l'énergie mécanique de la voiture au cours de son mouvement ?

Q2. Établir l'expression de la vitesse v_0 atteinte par la petite voiture en bas de descente en fonction de la hauteur h à laquelle la petite Louise laisse la voiture (sans vitesse initiale).

Q3. En utilisant un théorème énergétique, montrer que

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R} + 2g(\cos(\theta) - 1)$$

Q4. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, exprimer la norme de la réaction normale du support en fonction de m, R, $\dot{\theta}$, g et θ.
En déduire, en utilisant la question précédente, que la norme de la réaction normale s'écrit

$$\left\|\overrightarrow{R_N}\right\| = m\left(\frac{v_0^2}{R} + g\Big(3\cos(\theta) - 2\Big)\right)$$

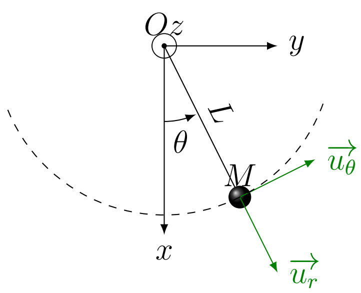
Q5. Montrer que la bille reste en contact avec le support lors de tout le mouvement lorsque la vitesse initiale v_0 est supérieure à une vitesse v_{min} à déterminer.

Q6. Déterminer la hauteur minimale à laquelle Louise doit déposer la voiture pour qu'elle reste en contact avec le support. Faire l'application numérique.

Q7. Supposons $v_0 < v_{\text{min}}$. Déterminer l'angle auquel la bille quitte le support et tombe.

Exercice n°5 Approximation harmonique du pendule simple

On considère le pendule simple ci-contre, de masse m et de longueur L.



Q1. Exprimer l'énergie potentielle du pendule simple en fonction de m, g, L et θ.

Q2. En déduire que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.

Q3. En utilisant le développement limité de cos au voisinage de 0 au deuxième ordre, montrer que l'énergie potentielle peut s'écrire sous la même forme que l'énergie potentielle d'un ressort : $\mathscr{E}_p \approx \frac{1}{2}K\theta^2$ à proximité de la position d'équilibre stable où K est une constante que l'on exprimera en fonction de L, g et m.

Q4. Que peut-on dire de l'énergie mécanique si on néglige les frottements ?

Q5. Exploiter cela pour obtenir l'équation différentielle du mouvement au voisinage de la position d'équilibre stable.

Exercice n°6 Piégeage d'un électron dans un piège de Penning

On cherche à piéger un électron dans le vide en lui appliquant un champ électromagnétique. Le référentiel est galiléen ; on utilise un repère $Oxyz$ orthonormé direct de vecteurs unitaires de base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.

L'électron est piégé dans un champ électrique qui dérive du potentiel $V(x,y,z) = \dfrac{V_0}{2d^2}(x^2+y^2-2z^2)$. L'énergie potentielle de l'électron est donnée par $\mathscr{E}_p(x,y,z) = -eV(x,y,z)$.

Données numériques :

— masse de l'électron : $m_e = 9,11.10^{-31}$ kg

— charge élémentaire : $e = 1,602.10^{-19}$ C

— Les caractéristiques du piège sont : $V_0 = 6,0$ V et $d = 5,0$ mm

Q1. Exprimer la force subie par l'électron.

Q2. Quelle est la position d'équilibre de l'électron ? Est-elle stable ?

Q3. Établir les équations différentielles vérifiées par x, y et z.
Quelle est la nature de l'équation différentielle selon l'axe (Oz) ?
Que peut-on dire du mouvement dans cette direction ? En calculer sa caractéristique.

III Résolution de problèmes

Exercice n°7 Remonte pente

Un remonte-pente est constitué d'un câble auquel les skieurs s'accrochent pour remonter.

Déterminer la puissance du moteur qui entraîne le câble.
Données :

— Longueur totale du câble : 200 m ;

— Distance séparant deux skieurs : 5 m ;

— Dénivelé entre les extrémités du câble : 5 m ;

— Vitesse du câble : 5 km · h^{-1}.

— Lorsque le ski glisse sur la neige, la réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ du sol sur le ski est reliée à la réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ par $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ avec $f = 0,10$.

IV Extrait du cahier d'entraînement de physique-chimie

Énergies potentielles

Entraînement 12.1 — La juste formule.

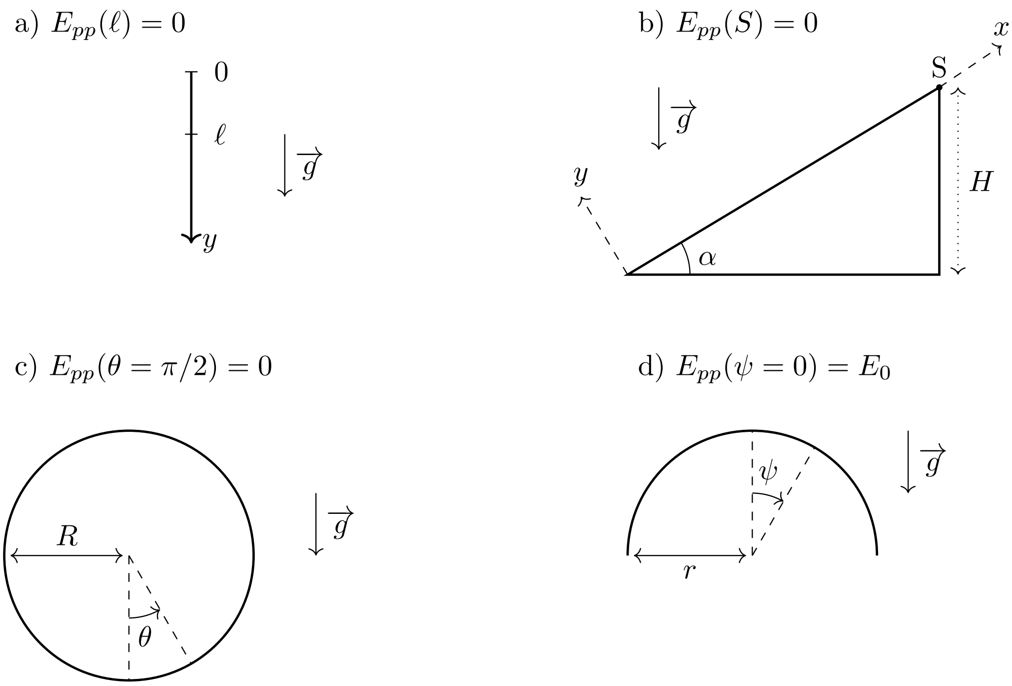
On considère un point matériel de masse m plongé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On se place dans un repère cartésien $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ tel que $\vec{g} = -g\vec{e_y}$, le point O étant pris comme origine de l'énergie potentielle. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?

(a) mgx (b) $-mgy$ (c) mgy (d) mgz

....

Entraînement 12.2 — Plusieurs expressions d'énergie potentielle de pesanteur.

Déterminer la fonction énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse m associée aux situations suivantes :



a) $E_{pp}(y) =$ ....

b) $E_{pp}(x) =$ ....

c) $E_{pp}(\theta) =$ ....

d) $E_{pp}(\psi) =$ ....

Entraînement 12.3 — La juste formule... le retour.

On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer selon un axe $(\mathrm{O}y)$ horizontal. Il est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est fixée en O.

Quelle est l'expression de l'énergie potentielle élastique du point M pour que celle-ci soit nulle lorsque l'allongement du ressort est nul ?

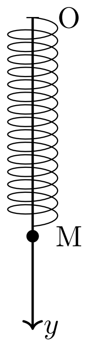
(a) $\dfrac{1}{2}ky^2$ (b) $\dfrac{1}{2}k(y-\ell_0)^2$ (c) $\dfrac{1}{2}k(y^2-{\ell_0}^2)$ (d) $-\dfrac{1}{2}k(\ell_0-y)^2$

....

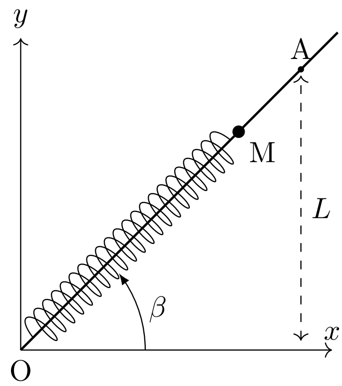
Entraînement 12.4 — Expression de l'énergie potentielle élastique.

Déterminer la fonction énergie potentielle élastique associée aux situations suivantes, où tous les ressorts sont de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k :

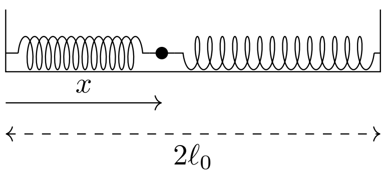
a) $E_{pe}(y=0)=0$



b) $E_{pe}(A)=0$



c) $E_{pe}(x=\ell_0)=E_0$



a) $E_{pe}(y)=$ ....

b) $E_{pe}(x)=$ ....

c) $E_{pe}(x)=$ ....

Travail d'une force

Entraînement 12.5 — Une force de frottement.

On considère le travail $W_{\text{AB}} = \int_{\text{A}}^{\text{B}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ d'une force de frottement $\vec{F} = -h\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du point matériel subissant la force et h est une constante.

Déterminer W pour les chemins suivants :

a) Un segment reliant $\text{A}(0,0)$ et $\text{B}(\ell,0)$ ....

b) Un arc de cercle d'angle α et de rayon R ....

c) Un rectangle ABCD de côtés a et b ....

d) Un triangle ABC de côtés a, b, c ....

e) En comparant les résultats obtenus, peut-on dire que la force est conservative ?

(a) Oui (b) Non

....

Théorèmes énergétiques

Entraînement 12.6 — Freinage et variation d'énergie cinétique.

On considère une voiture (assimilée à un point matériel de masse m) se déplaçant le long d'une route rectiligne horizontale et dont la vitesse initiale au début de la phase de freinage vaut $\vec{v} = v_0\overrightarrow{e_x}$.

En freinant, le véhicule est soumis à une force de frottement $\vec{F} = -h\overrightarrow{e_x}$.

Quelle est l'expression de la distance d'arrêt d de la voiture ?

(a) $\dfrac{2m{v_0}^2}{h}$ (b) $\dfrac{m{v_0}^2}{h}$ (c) $\dfrac{m{v_0}^2}{2h}$

....

Entraînement 12.7 — Pendule simple.

Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur $\ell = 1{,}0\,\mathrm{m}$ auquel est accroché une masse $m = 100\,\mathrm{g}$.

À $t = 0$, on donne à cette masse une vitesse horizontale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$ où $v_0 = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

On note θ_0 l'angle pour lequel la masse rebrousse chemin.

a) Exprimer $\cos(\theta_0)$ ....

b) Calculer θ_0 ....

Entraînement 12.8 — Trampoline simplifié.

Un ressort de longueur à vide $\ell_0 = 30\,\text{cm}$, de raideur $k = 1{,}0 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, sans masse, est posé sur le sol à la verticale. On lâche d'une hauteur $H = 2{,}0\,\text{m}$ et sans vitesse initiale une masse ponctuelle $m = 1{,}0\,\text{kg}$. Après une durée de chute libre sans frottement, la masse atteint le ressort, le comprime jusqu'à ce que celui-ci la propulse vers le haut comme le ferait un trampoline.

En admettant que la masse quitte le ressort quand $z = \ell_0$, calculer :

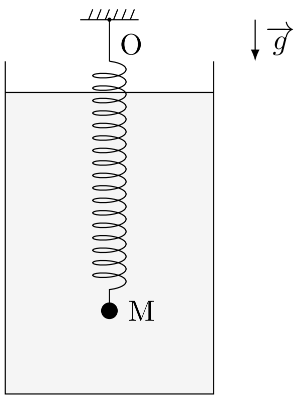
a) La vitesse de la masse lors du contact avec le ressort ....

b) L'altitude minimale atteinte par la masse ....

c) L'altitude maximale de la masse (en fin de remontée) ....

Entraînement 12.9 — Oscillateur vertical.

Un point M de masse m est accroché à une paroi horizontale fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Son mouvement s'effectue dans un liquide qui produit une force de frottements fluides linéaire $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$, où $\alpha > 0$. On néglige la poussée d'Archimède, on ne considère que des mouvements verticaux dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.



a) On note z la position de M par rapport à O.

Déterminer, par une méthode énergétique, l'équation différentielle vérifiée par z.

....

b) On note à présent ζ la position de M par rapport à sa position à l'équilibre.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ζ.

....

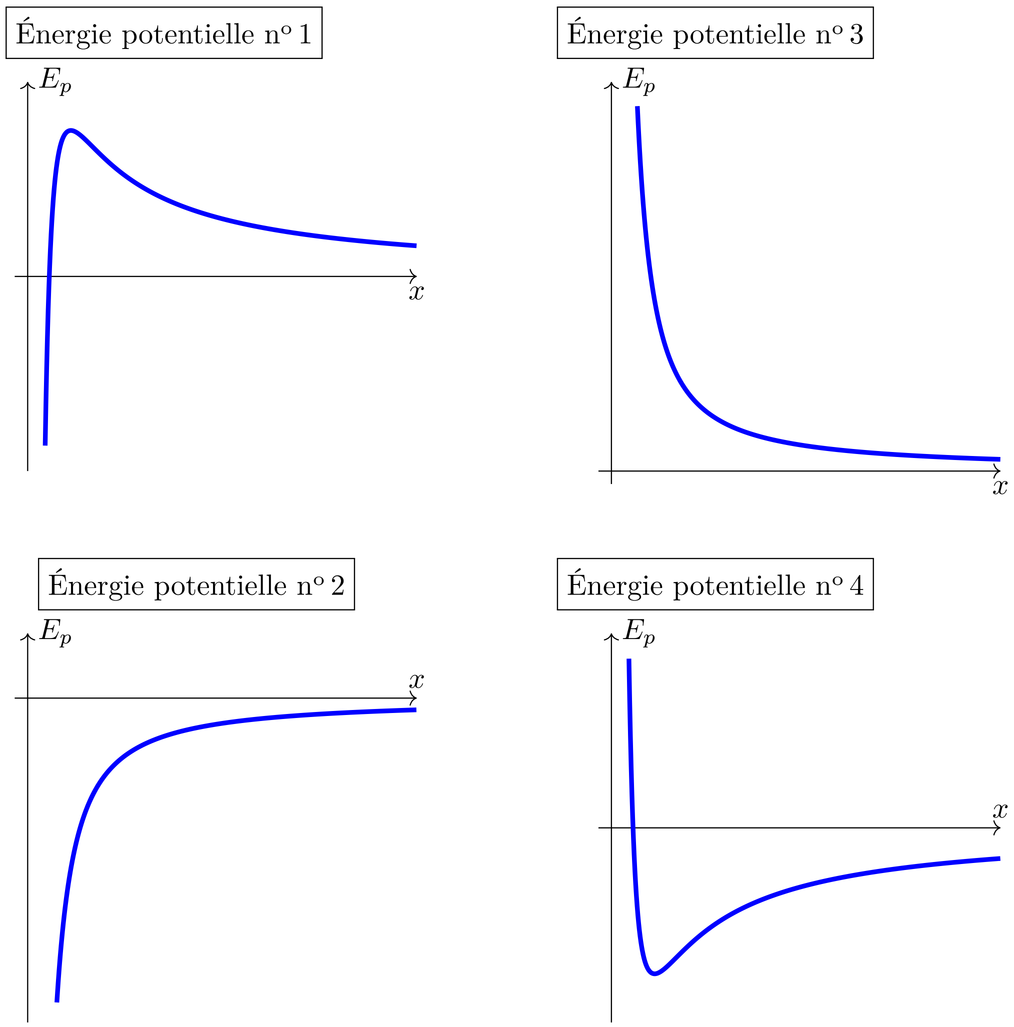
Mouvements conservatifs et positions d'équilibre

Entraînement 12.10 — Profils d'énergies potentielles.

Les quatre profils suivants représentent la fonction énergie potentielle

$$E_p(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}$$

avec α, β des réels non nuls.



Attribuer à chacune des figures ci-dessus les bons signes pour α et β, en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne :

(a) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

(b) $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

(c) $\alpha < 0$ et $\beta > 0$

(d) $\alpha < 0$ et $\beta < 0$

a) Énergie potentielle n° 1 ....

b) Énergie potentielle n° 2 ....

c) Énergie potentielle n° 3 ....

d) Énergie potentielle n° 4 ....

Entraînement 12.11 — Autour d'une position d'équilibre.

On donne l'expression de potentiels E_p dans chacun desquels évolue un point matériel de masse m.

Déterminer dans chaque cas la position d'équilibre stable.

a) Pour $E_p(\theta) = mg\ell(1 - \cos(\theta))$:

$\theta_{\text{eq}} =$ ....

b) Pour $E_p(z) = \dfrac{1}{2}\kappa z^2 + \dfrac{1}{4}\lambda z^4$ avec $\kappa > 0$ et $\lambda < 0$:

$z_{\text{eq}} =$ ....

c) Pour $E_p(x) = U_0\, \mathrm{e}^{\beta x^2}$ avec $U_0, \beta > 0$:

$x_{\text{eq}} =$ ....

d) Pour $E_p(\phi) = E_0 \sin^2(\phi - a)$ avec $E_0 > 0$, $\phi \in [0, \pi[$ et $a \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

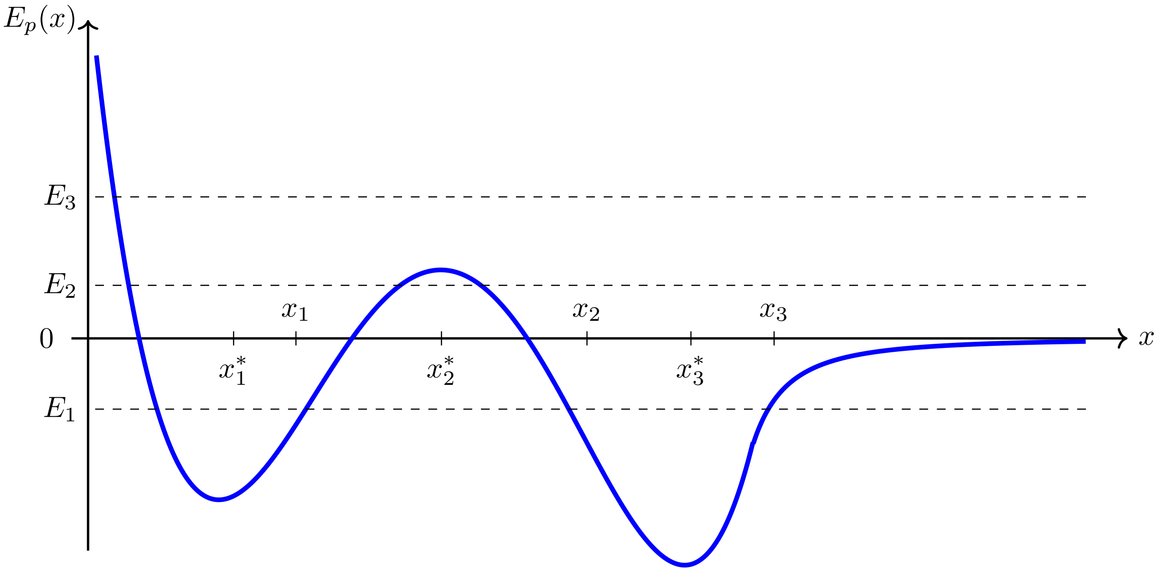
$\phi_{\text{eq}} =$ ....

Entraînement 12.12 — État lié ou état de diffusion ?

On considère le profil suivant d'énergie potentielle (les abscisses étoilées et l'abscisse x_3 serviront dans l'entraînement suivant).

Pour chaque état suivant, étant donné les valeurs de l'énergie mécanique et de la position initiale d'un point matériel, dire si ce dernier se trouve :

(a) dans un état lié
(b) un état de diffusion.



a) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_1$ ....

b) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_2$ ....

c) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_1$ ....

d) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_2$ ....

e) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_1$ ....

f) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_2$ ....

Entraînement 12.13 — Analyse d'un profil d'énergie potentielle.

On reprend le profil d'énergie potentielle de l'entraînement précédent.

Pour chacune des positions suivantes, déterminer si elle est stable ou instable, et si le mouvement au voisinage de ces positions est périodique et/ou harmonique, en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne.

(a) équilibre stable
(b) équilibre instable
(c) mouvement périodique
(d) mouvement harmonique

Plusieurs bonnes réponses sont possibles.

a) Voisinage de x_1^* ....

b) Voisinage de x_2^* ....

c) Voisinage de x_3^* ....

d) Région entre x_2 et x_3 ....

Entraînement 12.14 — Vitesse à l'infini.

On considère le profil d'énergie potentielle des deux entraînements précédents.

Un point matériel de masse $m = 2{,}30\,\mathrm{kg}$ est abandonné avec l'énergie $E_3 = 1{,}30\,\mathrm{kJ}$.

Calculer la vitesse du point matériel à l'infini ....