Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)
TD n°11 Lois de Newton — *Corrigé*

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎	✎
Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen.	✎	✎		✎	✎		✎	✎	✎	
Étudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.	✎				✎			✎	✎	
Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique.			✎							✎
Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.		✎		✎						
Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.			✎			✎	✎			

Parcours possibles

♪ Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2, n°3

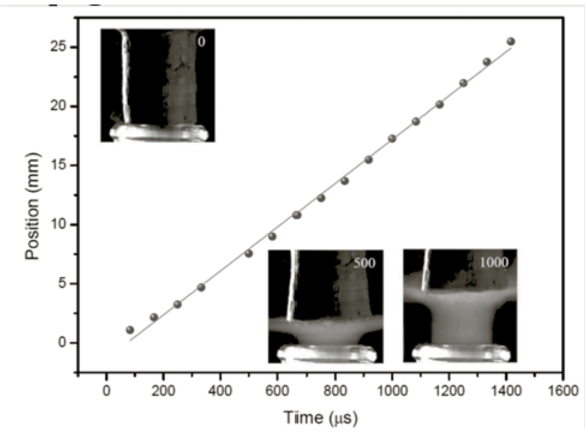
♪ ♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°3, n°4, n°5

♪ ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : exercices n°4, n°5, n°6, n°7

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Bouchon de champagne ♪

En 2022, un groupe de chercheurs français et indiens ont montré que le pop caractéristique d'un bouchon de champagne est dû au franchissement du mur du son du gaz s'échappant de la bouteille. Le bouchon de masse m est éjecté avec une vitesse initiale v_0 Une acquisition par une caméra rapide permet de pointer la position du bouchon en fonction du temps.



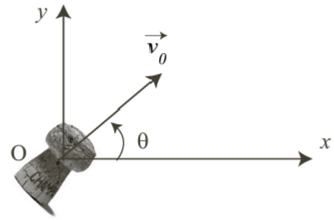


FIGURE 2

FIGURE 1 – Pointage vidéo, d'après *Computational fluid dynamic simulation of the supersonic* CO_2 *flow during champagne cork popping, Physics of Fluid (2022)*

R1. À partir du pointage ci-dessus, **déterminer** la vitesse v_0 d'éjection d'un bouchon de champagne en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

> **Solution:** Le pointage ci-dessus correspond au mouvement du bouchon pendant l'échappement. On constate que la position en fonction du temps est une droite, donc la vitesse au cours de cette phase est constante. v_0 est la pente de la droite : $v_0 = \dfrac{25.10^{-3} - 0}{1400.10^{-6} - 100.10^{-6}} = \dfrac{25}{13} \times 10^1 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

On considère que la bouteille forme un angle θ avec l'horizontale. Le vecteur vitesse initiale du bouchon est noté $\vec{v_0}$. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère (Ox, Oy) (voir le schéma). On néglige les frottements.

R2. **Exprimer** les composantes horizontale v_{0x} et verticale v_{0y} du vecteur $\vec{v_0}$ en fonction de v_0 et θ.

> **Solution:** $v_{0x} = v_0 \cos(\theta)$ et $v_{0y} = v_0 \sin(\theta)$

R3. **Déterminer** les deux composantes de l'accélération de M.

> **Solution:** Système : bouchon de champagne
> Référentiel : terrestre $\mathscr{R}_T$ galiléen
> Bilan des forces : $m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$
> Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = m\vec{g}$, soit $\vec{a} = \vec{g}$
> Enfin : $a_x = 0$ et $a_y = -g$

R4. **En déduire**, compte tenu des conditions initiales, les composantes du vecteur vitesse.

> **Solution:** Par intégration : $v_x(t) = C$ or $v_x(0) = v_0 \cos(\theta) = C$
> Donc $\boxed{v_x(t) = v_0 \cos(\theta)}$
> $v_y(t) = -gt + C'$, or $v_y(0) = v_0 \sin(\theta) = C'$
> Ainsi $\boxed{v_y(t) = -gt + v_0 \sin(\theta)}$

R5. **En déduire**, les équations horaires du mouvement : $x(t)$ et $y(t)$.

> **Solution:** $x(t) = v_0 \cos(\theta) t + A$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\theta) t + B$
> Or $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$ donc $A = 0$ et $B = 0$.
> Enfin $\boxed{x(t) = v_0 \cos(\theta) t}$ et $\boxed{y(t) = -gt^2 + v_0 \sin(\theta) t}$

R6. **Déterminer** l'équation cartésienne $y = f(x)$ de la trajectoire.

Solution: $t = \dfrac{x}{v_0\cos(\theta)}$, ainsi $\boxed{y(x) = -g\dfrac{x^2}{2v_0^2\cos^2(\theta)} + \tan(\theta)x}$

R7. **Exprimer** la coordonnée y_s de son sommet S et **la calculer** pour $\theta = 80°$. **Commenter** la valeur obtenue.

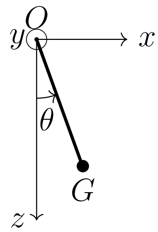
Solution: Au sommet, la vitesse verticale est nulle, donc $\dot{y}(t_s) = 0$, donc $t_s = \dfrac{v_0\sin(\theta)}{g}$

$y_s = y(t_s) = -\dfrac{v_0^2\sin^2(\theta)}{2g} + \dfrac{v_0^2\sin^2(\theta)}{g}$, soit $\boxed{y_s = \dfrac{v_0^2\sin^2(\theta)}{2g}}$

A.N. : $y_s = 20$ m ! (modèle un peu grossier...)

Exercice n°2 Pendule simple ♪

On considère un pendule simple de longueur ℓ dont la masse m est soumise, en plus de son poids et de la tension du fil, à une force de frottement fluide de type $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$.



R1. **Rappeler** l'expression du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires sur un mouvement circulaire.

R2. **Établir** l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ.

Solution:

R3. Dans le cas où l'amplitude des oscillations est faible devant 1 radian, quelle équation connue retrouve-t-on ?

Solution:

R4. **À quelle condition** sur m, ℓ, h et g le système peut-il présenter un mouvement pseudo-périodique ?

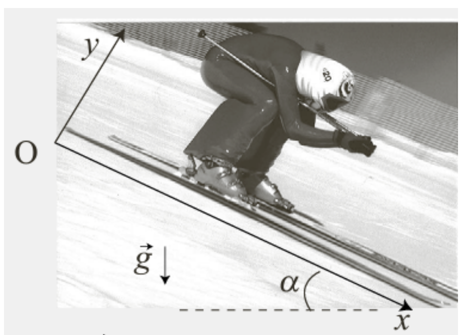
Solution:

R5. **Résoudre complètement** l'équation différentielle dans le cas précédent si à $t = 0$, $\theta(0) = 0$ et $\theta(0) = \dot{\theta}_0 > 0$. On pourra **introduire** une pseudo-pulsation Ω et une constante de temps τ.

Solution:

Exercice n°3 Descente à ski ♪

La piste de kilomètre lancé de Chabrière dans le Queyras est d'une longueur de $L = 1400$ m pour une inclinaison de $\alpha = 45°$.
Elle permet d'atteindre une vitesse de $v_L = 260\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
On considère un skieur de masse $m = 80$ kg s'élançant sans vitesse initiale du sommet O de la piste.
On modélise les frottements de l'air par une force de frottement $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{v}$, où $k = 8,0$ uSI est un coefficient constant positif et $\overrightarrow{v}$ la vitesse du skieur.
La neige exerce sur le skieur une force de composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ et de composante normale $\overrightarrow{R_N}$, reliées par les lois de Coulomb de coefficient de frottement $f = 0,1$.



R1. **Déterminer** l'unité du coefficient k.

Solution: $[k] = \dfrac{[F]}{[v]} = \dfrac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot {}^{-2}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$

R2. En nommant le référentiel choisi, **effectuer** un bilan des forces sur le skieur.

Solution:
Système : le skieur
Référentiel : terrestre, lié à la piste galiléen.
Bilan des forces :

- poids $m\vec{g} = \begin{pmatrix} mg\sin(\alpha) \\ -mg\cos(\alpha) \end{pmatrix}$
- réaction normale du support $\overrightarrow{R_N} = \begin{pmatrix} 0 \\ \|\overrightarrow{R_N}\| \end{pmatrix}$
- réaction tangentielle du support $\overrightarrow{R_T} = \begin{pmatrix} -\|\overrightarrow{R_T}\| \\ 0 \end{pmatrix}$
- force de frottement fluide : $\vec{F} = -k\vec{v} = -kv_x\vec{u_x} = \begin{pmatrix} -kv_x \\ 0 \end{pmatrix}$

R3. Par projection du principe fondamental de la dynamique selon $\vec{u_y}$, **exprimer** $\overrightarrow{R_N}$ en fonction m, g et α.

R4. En exploitant les lois de Coulomb sur le frottement solide, **déterminer** $\|\overrightarrow{R_T}\|$, puis $\overrightarrow{R_T}$ lorsque le skieur glisse.

Solution: D'après le PFD :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\vec{g} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} + \vec{F} \\ m\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} mg\sin(\alpha) \\ -mg\cos(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \|\overrightarrow{R_N}\| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\|\overrightarrow{R_T}\| \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -kv_x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Selon $\vec{u_y}$: $\|\overrightarrow{R_N}\| = mg\cos(\alpha)$
D'après la loi de frottement de Coulomb : $\|\overrightarrow{R_T}\| = fmg\cos(\alpha)$

R5. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, **déterminer** la vitesse limite atteinte par le skieur, et **la calculer**.

Solution:
Selon $\vec{u_x}$: $m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = mg\sin(\alpha) - fmg\cos(\alpha) - kv_x$

La vitesse limite v_{lim} est telle que : $mg\sin(\alpha) - fmg\cos(\alpha) - kv_{\text{lim}} = 0$, soit $\boxed{v_{\text{lim}} = \dfrac{mg(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))}{k}}$

A.N. $\alpha = 45°$, donc $\cos(\alpha) = \sin(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Ainsi $v_{\text{lim}} = \dfrac{80 \times 10 \times (1 - 0,1)}{8\sqrt{2}} = \dfrac{90}{\sqrt{2}} = 63\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 226,8\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ (proche de la valeur annoncée par l'énoncé).

R6. **Montrer** que l'équation différentielle sur $v_x(t)$ peut se mettre sous la forme : $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{v_x}{\tau} = \dfrac{v_L}{\tau}$. **Exprimer** v_L et τ.

Solution:

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= mg\sin(\alpha) - fmg\cos(\alpha) - kv_x \\ \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}v_x &= g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha)) \end{aligned}$$

On identifie $\boxed{\tau = \frac{m}{k}}$ et on retrouve $v_L = \tau \times g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha)) = \dfrac{mg(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))}{k}$

R7. **Résoudre complètement** l'équation différentielle.

Solution: Solution générale $v(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + v_L$

Or à $= t0$, $v(0) = 0$, donc $K = -v_L$, soit $\boxed{v(t) = v_L(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

R8. **Déterminer** la vitesse à partir de laquelle les frottements visqueux sont plus importants que les frottements solides.

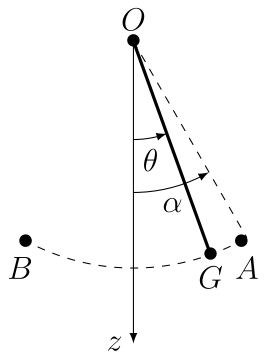
Solution: $\|\overrightarrow{F}\| > \|\overrightarrow{R_T}\| \Leftrightarrow kv > fmg\cos(\alpha) \Leftrightarrow \boxed{v > \dfrac{fmg\cos(\alpha)}{k}}$

A.N. : $v > \dfrac{0,1 \times 80 \times 10}{\sqrt{2} \times 8} = \dfrac{10}{\sqrt{2}} = 7\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Tarzan et Jane ♪ ♪

La liane a été popularisée au cinéma comme moyen de locomotion très apprécié de Tarzan. Afin de retrouver Jane, celui-ci saisit l'extrémité d'une liane et se laisse penduler jusqu'à sa bien-aimée.

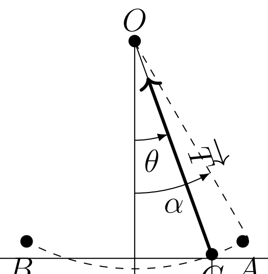


La position du centre de masse G de Tarzan est repérée par l'angle θ que fait la liane avec l'axe (Oz) vertical descendant. Sa position initiale est notée A et est repérée par l'angle $\alpha = 30°$, d'où il se lâche sans vitesse initiale.
Jane se situe au point B défini par $\theta_B = -\alpha$.
La masse de Tarzan, peau de bête comprise, est $m = 80$ kg, celle de Jane est $m' = 50$ kg.
La longueur de la liane est $OG = L = 10$ m et sa masse est négligée.
Nous négligeons tout frottement et prenons pour valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 9,8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.
La liane utilisée par Tarzan est usée et ne pourra résister à des tensions supérieures à $2,0$ kN.

Le but de cet exercice est de déterminer si Tarzan pourra retrouver Jane puis la ramener en A.

R1. **Établir deux équations** : l'équation différentielle du mouvement de Tarzan et une deuxième renseignant sur la tension T de la corde.

Solution: En projection : $\left\{ \begin{array}{lcll} -mL\dot{\theta}^2 &=& mg\cos(\theta) - T & \text{Permet de déterminer } T \\ mL\ddot{\theta} &=& -mg\sin(\theta) & \text{Équation différentielle du mouvement} \end{array} \right.$



Système : Tarzan
Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience ($\mathscr{R}$ lié à $(Oxyz)$)
Bilan des actions mécaniques :

— poids : $m\overrightarrow{g} = mg\left(\cos(\theta)\overrightarrow{u_r} - \sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}\right)$

Principe fondamental de la dynamique à Tarzan dans le référentiel terrestre galiléen : $\boxed{m\overrightarrow{a}(G) = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T}}$

Comme G décrit un mouvement circulaire de rayon L : $\overrightarrow{a}(G) = -L\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + L\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

R2. (a) Multiplier l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$.

(b) Par intégration, en déduire que $L\dot{\theta}^2 = 2g(\cos(\theta) - \cos(\alpha))$

Solution: On multiplie l'équation diff du mvt par $\dot{\theta}$: $L\ddot{\theta}\dot{\theta} = -g\sin(\theta)\dot{\theta}$ (*)

On reconnaît deux dérivées temporelles : $\dfrac{\mathrm{d}L\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t} = 2\dot{\theta}\ddot{\theta}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\sin(\theta)$

On intègre (*) par rapport au temps : $\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2 = g\cos(\theta) + C$, où C est une constante d'intégration, que l'on détermine avec les conditions initiales $\theta(0) = \alpha$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Soit $0 = g\cos(\alpha) + C$, soit $C = -g\cos(\alpha)$

Ainsi $\boxed{L\dot{\theta}^2 = 2g(\cos(\theta) - \cos(\alpha))}$

R3. **En déduire** une expression de la tension de la corde en fonction de θ et des données de l'exercice.

Solution: D'après la projection du PFD selon $\overrightarrow{u_r}$: $T = mg\cos(\theta) + mL\dot{\theta}^2$

On en déduit $\boxed{T = mg\Big(3\cos(\theta) - 2\cos(\alpha)\Big)}$

La tension de la corde est maximale pour $\cos(\theta)$ maximale, c'est-à-dire pour $\theta = 0$.

$T_{\max} = mg(3 - 2\cos(\alpha)) = 0,99$ kN $< 2,0$ kN : Tarzan peut arriver jusqu'à Jane.

Que se passe-t-il lorsque Tarzan fait le retour avec Jane ? Les mêmes calculs sont à refaire en remplaçant m par $m + m'$, soit $T'_{\max} = (m + m')g(3 - \cos(\alpha)) = 1,6$ kN $< 2,0$ kN : La liane résistera également au retour ! ouf ! :-)

R4. **Conclure** : Tarzan peut-il rejoindre Jane sans risque ? et ramener en A sans risque ?

Exercice n°5 Volcan ♪ ♪

Le Stromboli, volcan italien encore actif, culmine à 924 m. Il crache régulièrement des bombes volcaniques issues du magma. On note $\overrightarrow{v_0}$ la vitesse d'éjection de ces bombes, inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontal. On néglige les frottements.

On note (Ox) l'axe horizontal et (Oy) l'axe vertical ascendant.

R1. **Établir** l'équation cartésienne $y = f(x)$ de la trajectoire.

Solution: Cf cours

Équations horaires : $x(t) = v_0\cos(\alpha)t$ et $y(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0\sin(\alpha)t + h$

Équation de la trajectoire : $\boxed{y(x) = -\dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x + h}$

R2. En utilisant $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$, **écrire** l'équation cartésienne de la trajectoire sous la forme

$$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gx}\tan\alpha + \left(1 + \frac{2v_0^2(y-h)}{gx^2}\right) = 0$$

Solution:

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x + h \\ y-h &= -\frac{gx^2}{2v_0^2}(1+\tan^2(\alpha)) + \tan(\alpha)x \\ \frac{-2v_0^2(y-h)}{gx^2} &= 1+\tan^2(\alpha) - \frac{2v_0^2}{gx}\tan(\alpha) \\ 0 &= \tan^2(\alpha) - \frac{2v_0^2}{gx}\tan(\alpha) + 1 + \frac{2v_0^2(y-h)}{gx^2} \end{aligned}$$

R3. En considérant cette trajectoire comme une équation du second degré en $\tan\alpha$, **établir qu'elle n'admet aucune solution réelle** si

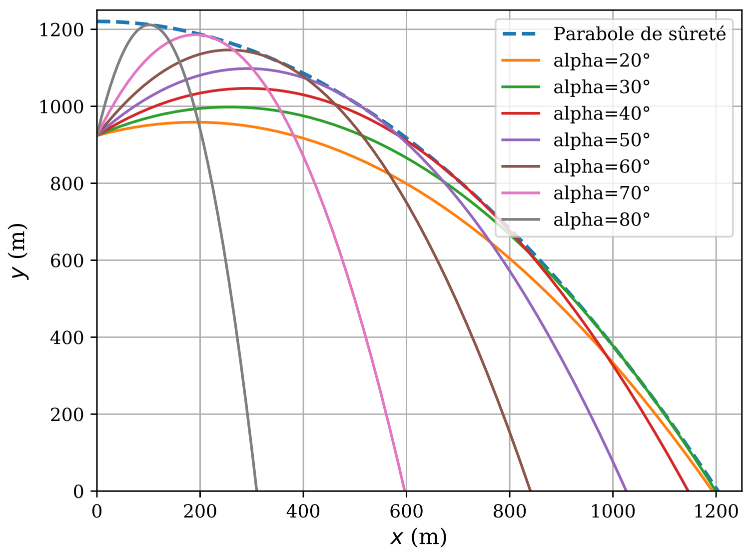
$$y > h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Vérifier l'homogénéité de cette expression.

Solution: Un point A de coordonnées (x, y) est accessible par une bombe volcanique, s'il existe au moins une valeur de α qui vérifie $\tan^2(\alpha) - \frac{2v_0^2}{gx}\tan(\alpha) + 1 + \frac{2v_0^2(y-h)}{gx^2} = 0$.
Inversement, le point A de coordonnées (x, y) n'est âs accessible par une bombe volcanique si aucune valeur de α vérifie l'équation.
Pour cela, il ne doit pas y avoir de solution réelle, donc le discriminant doit être négatif.

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{4v_0^4}{g^2x^2} - 4 - \frac{8v_0^2(y-h)}{gx^2} &< 0 \\ \frac{v_0^2}{g^2x^2} - 1 &< \frac{2v_0^2(y-h)}{gx^2} \\ \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} &< y-h \\ h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} &< y \end{aligned}$$

La courbe d'équation $y = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$ est appelée parabole de sureté car tout point situé au-delà n'est pas accessible par les bombes volcaniques, quel que soit l'angle d'éjection.
Elle est représentée sur la figure ci-contre.



R4. **Établir** que le périmètre de sécurité au sol est tel que

$$x > \sqrt{\frac{2v_0^2 h}{g} + \frac{v_0^4}{g^2}}$$

Le **calculer**.

Solution: Pour être en sécurité, il ne doit y avoir aucune bombe qui puisse nous atteindre quelque soit la valeur de α.
De plus au sol $y = 0$.
En reprenant la réponse précédente, il faut $h + \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2v_0^2} < 0$
Ainsi $x > \sqrt{\dfrac{2v_0^2 h}{g} + \dfrac{v_0^4}{g^2}} = 1,2$ km (conforme à la courbe ci-dessus).

Données : $m = 0,28$ kg ; $v_0 = 76,3$ m · s^{-1} ; $\alpha = 50° = 0,873$rad ; $g = 9,81$ m · s^{-2} ; $h = 924$ m ;

Exercice n°6 Avalanche ♪ ♪

Il est possible de modéliser une avalanche par un glissement avec frottement solide d'une plaque de neige sur le sol. On notera f le coefficient de frottement solide, on supposera l'égalité entre le coefficient statique et dynamique.
La plaque de neige est accélérée sur 150 m puis freinée sur 250 m.

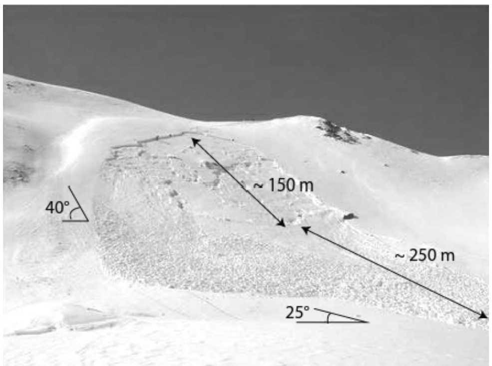


FIGURE 3 – Avalanche de plaque de neige le 18 mars 2006 au Hanengretji au-dessus de Davos (Suisse). D'après P. Weilenmann, 18.03.2006

R1. En notant α l'angle de la piste, **exprimer** la norme de la force de frottement exercée sur la plaque de neige en fonction de sa masse m, de g, de f et de l'angle α.

Solution:
Système : plaque de neige
Référentiel : terrestre considéré galiléen
Bilan des forces :

— poids $m\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} mg\sin(\alpha) \\ -mg\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

— réaction normale du support $\overrightarrow{R_N} = \begin{pmatrix} 0 \\ \|\overrightarrow{R_N}\| \end{pmatrix}$

— réaction tangentielle du support $\overrightarrow{R_T} = \begin{pmatrix} -\|\overrightarrow{R_T}\| \\ 0 \end{pmatrix}$

Principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{a} &= m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N} \\ m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} mg\sin(\alpha) \\ -mg\cos(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \|\overrightarrow{R_N}\| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\|\overrightarrow{R_T}\| \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Selon $\overrightarrow{u_y}$: $\boxed{\|\overrightarrow{R_N}\| = mg\cos(\alpha)}$

La plaque glisse, d'après la loi de Coulomb sur le frottement solide : $\boxed{\|\overrightarrow{R_T}\| = fmg\cos(\alpha)}$

R2. **Établir** l'expression de la composante du vecteur accélération dans la direction de la pente.

Solution: Selon $\overrightarrow{u_x}$: $\boxed{\ddot{x} = g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))}$

R3. À quelle condition sur α et f la plaque accélère-t-elle ? ralentit-elle ?

Solution: Le mouvement a lieu dans le sens de $+\overrightarrow{u_x}$.
Le mouvement de la plaque est accéléré, si $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} < 0$, soit si $\ddot{x} > 0$, si $\tan(\alpha) > f$
Il est décéléré si $\ddot{x} < 0$, donc si $\tan(\alpha) < f$.

R4. À partir des pentes mesurées sur le cliché, **donner** un encadrement de la valeur du coefficient de frottement f.

Solution: La plaque est accélérée sur 150 m pour $\alpha = 40°$, donc $f < \tan(40°) = 0,84$
La plaque est freinée sur 250 m pour $\alpha = 25°$, donc $f > \tan(25°) = 0,47$
En supposant que le coefficient de frottement f est identique sur les deux portions, $\boxed{f \in [0,47; 0,84]}$

R5. Sachant qu'en bas de la pente la plaque est immobile, **déterminer** la valeur de f.

Solution: On intègre l'accélération :

— Première phase : $\dot{x}(t) = g(\sin(\alpha_1) - f\cos(\alpha_1))t + \dot{x}(0)$
La plaque est initialement immobile, donc $\dot{x}(0) = 0$, donc $\dot{x}(t) = g(\sin(\alpha_1) - f\cos(\alpha_1))t$
Puis $x(t) = \dfrac{g(\sin(\alpha_1) - f\cos(\alpha_1)}{2}t^2$

— Cette première phase se termine à t_1 tel que $x(t_1) = d_1 = 250$ m, soit $t_1 = \sqrt{\dfrac{2d_1}{g(\sin(\alpha_1) - f\cos(\alpha_1)}}$
où la vitesse vaut $v_1 = g(\sin(\alpha_1) - f\cos(\alpha_1)t_1 = \sqrt{2d_1 g(\sin(\alpha_1) - f\cos(\alpha_1)}$

— Sur la deuxième phase, en changeant l'origine es temps $t' = t - t_1$.
$\dot{x}(t') = g(\sin(\alpha_2) - f\cos(\alpha_2))t' + v_1$
$x(t') = \dfrac{g(\sin(\alpha_2) - f\cos(\alpha_2))}{2}t'^2 + v_1 t' + d_1$
En bas de la temps $x(t_2') = d_2 + d_1$ et $\dot{x}(t_2') = 0$
Soit $t_2' = \dfrac{v_1}{-g(\sin(\alpha_2) - f\cos(\alpha_2))}$

$$\begin{aligned}
x(t_2') &= \frac{g(\sin(\alpha_2) - f\cos(\alpha_2))}{2}\frac{v_1^2}{g^2(\sin(\alpha_2) - f\cos(\alpha_2))^2} - \frac{v_1^2}{g(\sin(\alpha_2) - f\cos(\alpha_2))} \\
&= d_1 - \frac{v_1^2}{2g(\sin(\alpha_2) - f\cos(\alpha_2))} \\
d_1 + d_2 &= d_1 - \frac{v_1^2}{2g(\sin(\alpha_2) - f\cos(\alpha_2))} \\
d_2 &= -\frac{2d_1 g(\sin(\alpha_1) - f\cos(\alpha_1)}{2g(\sin(\alpha_2) - f\cos(\alpha_2))} \\
d_2\sin(\alpha_2) - d_2 f\cos(\alpha_2) &= -d_1\sin(\alpha_1) + fd_1\cos(\alpha_1) \\
f(d_1\cos(\alpha_1) + d_2\cos(\alpha_2)) &= d_1\sin(\alpha_1) + d_2\sin(\alpha_2)
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{f = \dfrac{d_1 \sin(\alpha_1) + d_2 \sin(\alpha_2)}{d_1 \cos(\alpha_1) + d_2 \cos(\alpha_2)} = 0,59}$ (bien dans l'intervalle précédent).

Rq : ce serait beaucoup plus rapide avec des théorèmes énergétiques...

Exercice n°7 Phénomène du stick-slip ♪ ♪ ♪

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au support, on considère un système masse-ressort représenté sur la figure suivante. Une masse m est accrochée à un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 dont l'extrémité I animée d'un mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse $\overrightarrow{V_I} = V_0\overrightarrow{u_x}$.
L'action du support sur la masse est modélisée par une force de frottement solide de coefficient f.

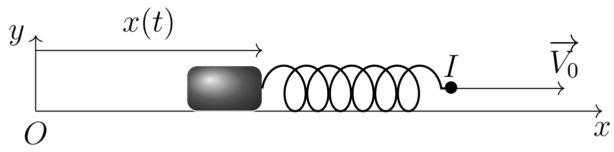


FIGURE 4 – Modélisation d'un système « stick-slip ».

R1. Le référentiel $\mathcal{R}(Ixyz)$ lié au point I peut-il être considéré comme galiléen ?

Solution: Le référentiel $\mathcal{R}(Ixyz)$ lié au point I est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre, considéré galiléen à l'échelle de l'expérience, donc $\mathcal{R}$ peut être considéré galiléen.

R2. À l'instant $t = 0$, on a $x(0) = 0$ et $\ell(0) = \ell_0$. **Exprimer** la longueur $\ell(t)$ du ressort pour $t > 0$, en fonction de ℓ_0, V_0, $x(t)$ et t.

Solution:
$\ell(t) = x_I(t) - x(t) = V_0 t + C - x(t)$
Or à $t = 0$, $\ell(0) = \ell_0$, donc $\boxed{\ell(t) = V_0 t + \ell_0 - x(t)}$

R3. On suppose de plus que $\dot{x}(0) = 0$. **Montrer que** l'évolution du système pour $t > 0$ commence nécessairement par une phase de non-glissement. Déterminer à quel instant t_0 se termine cette phase.

Solution: Pour $t = 0$, $\overrightarrow{v_g}(0) = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, puisque $\dot{x}(0) = 0$, donc il n'y a pas de glissement au début du mouvement.
Pendant la première phase, la masse m ne bouge pas dans le référentiel d'étude.
Elle est soumise à son poids, à la réaction normale et tangentielle du support et à la force de rappel élastique $\overrightarrow{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)(-\overrightarrow{u_x})$
Le PFD s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0} &= m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{F_{\text{él}}} \\
\overrightarrow{0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{T,x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k(\ell(t) - \ell_0) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi $R_N = mg$ et $R_{T,x} = -k(\ell(t) - \ell_0) = -(V_0 t - x(t)) = -V_0 t$ (puisque $x(0) = 0$ et que la masse ne bouge pas durant cette première phase).
La masse m ne glisse-pas tant que $|R_{T,x}| < f R_N$, soit $V_0 t < fmg$

Cette phase cesse à l'instant $\boxed{t_0 = \dfrac{fmg}{V_0}}$

R4. **Établir** l'équation du mouvement de la masse m lors de la phase de glissement. Identifier la pulsation propre ω_0 du système.

Solution: En présence de glissement (la masse m se déplace selon $+\overrightarrow{u_x}$) $R_N = mg$ et $R_{T,x} = -fmg < 0$ ($\overrightarrow{R_T}$ de sens opposé à $\overrightarrow{v}$.
Ainsi le PFD selon $\overrightarrow{u_x}$ donne :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= k(\ell(t) - \ell_0) - fmg \\ m\ddot{x} &= kV_0t - kx(t) - fmg \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= \frac{k}{m}V_0t - fg \end{aligned}$$

On identifie la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

R5. La solution de l'équation précédente s'écrit sous la forme :

$$x\left(t'\right) = C_1 \cos\left(\omega_0 t'\right) + C_2 \sin\left(\omega_0 t'\right) + V_0 t' \quad \text{avec} \quad t' = t - t_0$$

Déterminer les expressions des constantes C_1 et C_2 correspondant à cette phase du mouvement.

Solution: à $t' = 0$, soit $t = t_0$, $\dot{x}(t' = 0) = C_2\omega_0 + V_0 = 0$ (n'a pas encore bougé), donc $\boxed{C_2 = -\frac{V_0}{\omega_0}}$
à $t' = 0$, soit $t = t_0$, $x(t' = 0) = C_1 = 0$ (n'a pas encore bougé), donc $\boxed{C_1 = 0}$
Ainsi $\boxed{x(t') = -\dfrac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t') + V_0 t'}$

Une simulation numérique permet de représenter l'évolution de la solution mathématique $x\left(t'\right)$.
Les paramètres choisis pour réaliser cette simulation sont $\omega_0 = 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $V_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\ell_0 = 1$ m, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $f = 0,5$.

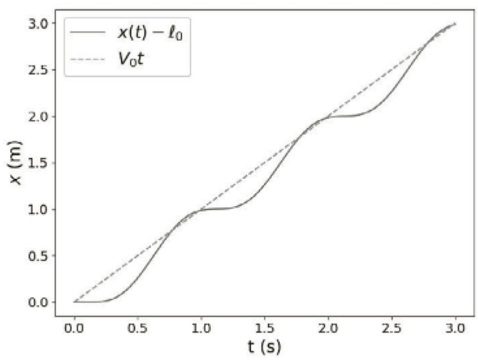


FIGURE 5 – Simulation de $x(t)$

R6. **Faire apparaitre**, le point représentatif de l'instant $t' = 0$.

Solution: À la fin du premier palier : $t_0 = 0,3$ s

R7. En justifiant votre raisonnement par des considérations graphiques précises, **indiquer** si la phase de glissement perdure indéfiniment.

Solution:

III Résolution de problèmes

Exercice n°8 Bobby et sa fronde

Bobby s'est fabriqué une fronde en accrochant un caillou au bout d'une ficelle. Le bras tendu au dessus de sa tête, il fait tournoyer la fronde (dans un plan horizontal) à la vitesse angulaire $\omega = 120$ tours/minute) puis la lâche. **À quelle distance de Bobby le caillou va-t-il atterrir ?**

Solution:

Exercice n°9 Tennis

Les grands joueurs de tennis peuvent frapper la balle en coup droit à plus de 240 km · h^{-1}. On considère que la balle est frappée à cette vitesse depuis le fond de cours à une hauteur de $h = 1,0$ m. **À quelle condition la balle touche l'autre extrémité du terrain sans toucher le filet de hauteur H.**

Données :

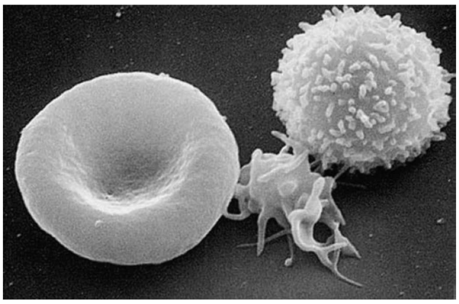
- longueur du terrain : $L = 24$ m
- hauteur du filet : $H = 1,1$ m.
- $\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$

Exercice n°10 Vitesse de sédimentation du plasma sanguin

La Vitesse de Sédimentation fait partie des examens de routine effectués au cours d'un bilan sanguin permettant de détecter des phénomènes inflammatoires ou infectieux.
La Vitesse de Sédimentation à la première heure correspond à la **hauteur** (exprimée en millimètres) de globules rouges ayant sédimenté en une heure au fond d'un tube à essai, le sang ayant été rendu incoagulable.

Déterminer la fourchette dans laquelle doit se trouver la vitesse de sédimentation à la première heure d'un sang sain.

Doc. 1 Aspect, en microscopie électronique à balayage, des cellules du sang : de gauche à droite, érythrocyte, plaquette et leucocyte (source Wikipedia)



Doc 2. Caractéristique des cellules du sang

Cellules	Dimension	Numération (10^3 /mm^3)
Erythrocytes (globules rouges)	De 6,8 µm à 7,3 µm	De 4500 à 6000
Thrombocytes (plaquettes)	De 2 µm à 4 µm	De 150 à 450
Leucocytes (globules blancs)	De 4 µm à 12 µm	De 4 à 10

Les globules rouges peuvent être considérés cylindriques de hauteur égale à 1/5$^{\text{ème}}$ de son diamètre.

Doc 3. Forces de frottement

Un objet sphérique en mouvement à vitesse de norme v dans un fluide subit une force de frottement fluide. On propose deux modèles de frottement fluide :

— le modèle de Stokes, pour lequel la force de frottement est d'expression : $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}$

— le modèle quadratique, pour lequel la force de frottement est d'expression : $\overrightarrow{f} = -\dfrac{1}{2}\rho\pi R^2 C_x v\overrightarrow{v}$

Dans ces expressions, R est le rayon de l'objet, ρ la masse volumique du fluide dans lequel se déplace l'objet, η la viscosité du fluide dans lequel se déplace l'objet, C_x le coefficient de traînée, de valeur $C_x = 0,5$ pour une sphère.

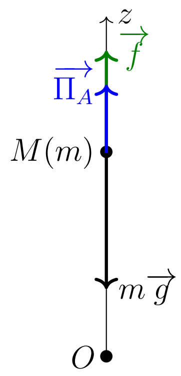
Doc 4. Nombre de Reynolds R_e

L'adéquation à l'une ou l'autre des deux forces de frottement proposées dans le **doc.3** peut être testée en considérant le nombre de Reynolds, grandeur adimensionnée d'expression : $R_e = \dfrac{\rho L v}{\eta}$, avec L est une grandeur caractéristique des dimensions de l'objet, ρ la masse volumique du fluide, η la viscosité du fluide, v la norme de la vitesse de l'objet.
On admettra que le modèle de Stokes reste acceptable si le nombre de Reynolds R_e est au maximum de l'ordre de quelques dizaines, et que le modèle quadratique est acceptable pour un nombre de Reynolds supérieur à 1000.

Doc 5. Valeurs numériques

- Hauteur d'un tube à essais 70 mm
- Diamètre d'un tube à essais 12 mm
- Accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse volumique du plasma $\rho_p = 1,0.10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Masse volumique des globules rouges $\rho_g = 1,3.10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Viscosité dynamique du plasma $\eta = 1,6.10^{-3}$ uSI

Solution:



Système : globule rouge $G(m)$
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$;
- poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_p V\overrightarrow{g} = -\dfrac{\rho_p}{\rho_g}m\overrightarrow{g} = +\dfrac{\rho_p}{\rho_g}mg$
- force de frottement fluide : $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}$

D'après le PFD : $m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{\Pi_A}$
En projection selon $\overrightarrow{u_z}$: $m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -mg + \dfrac{\rho_p}{\rho_g}mg - 6\pi\eta R v_z$

Soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \dfrac{6\pi\eta R}{m}v_z = -g + \dfrac{\rho_p}{\rho_g}g}$

C'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre.
La vitesse limite atteinte est telle que : $\dfrac{6\pi\eta R}{m}v_{z,\text{lim}} = -g + \dfrac{\rho_p}{\rho_g}g$

Soit $\boxed{v_{z,\text{lim}} = -\dfrac{mg}{6\pi\eta R}\left(1 - \dfrac{\rho_p}{\rho_g}\right)}$

Soit $\boxed{v_{\text{lim}} = \dfrac{mg}{6\pi\eta R}\left(1 - \dfrac{\rho_p}{\rho_g}\right)}$

A.N. : $\underline{v_{\text{lim}} = 2,8.10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

Validité du modèle linéaire ? $Re = \dfrac{\rho_p \times 2R \times v_{\text{lim}}}{\eta} = 9,9.10^{-6} \ll 1$: le modèle choisi ici est donc adapté.

Pour que les globules rouges aient le temps de tomber au fond du tube à essai, ils doivent se trouver à une hauteur inférieure à $H = v_{\text{lim}} \times \Delta t = 2,8.10^{-6} \times 3600 = 1,0$ cm (hauteur inférieure à la hauteur du tube à essai : ouf !)

Les globules rouges ayant le temps de chuter sont contenu dans un volume :
$V_{\text{chute}} = H \times \pi\dfrac{D^2}{4} = 1,1.10^{-6} \text{ m}^3 = 1,1.10^3 \text{ mm}^3$, en notant D le diamètre d'un tube à essais.
Ainsi, il y a $N = 1,1.10^3 \times 5.10^6 = 5,7.10^9$ globules rouges qui chutent durant l'expérience d'une heure.
Volume d'un globule rouge, modélisé par une sphère de rayon R : $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 5,1.10^{-17} \text{ m}^3$
Le volume occupé par les globules rouges ayant chuté :

$$\begin{aligned}
V_{gr} &= N \times V \\
&= n \times H \times \pi \times \frac{D^2}{4} \times V \\
&= n v_{\text{lim}} \Delta t \times \pi \frac{D^2}{4} \times V \\
H_{\text{sedim}} &= \frac{V_{gr}}{\pi \frac{D^2}{4}} \\
&= n v_{\text{lim}} \Delta t \times V
\end{aligned}$$

La vitesse de sédimentation, qui est la hauteur occupée par les globules rouges ayant sédimentés en 1 h est de : $\boxed{H_{\text{sedim}} = n v_{\text{lim}} \Delta t \times V}$

La vitesse de sédimentation est donc de 2,6 mm.