Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

TP n°13 Mesure du coefficient de frottement fluide

Vendredis 31 janvier et 7 février 2025

Compétences exigibles du programme :

✓ **Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.**

✓ Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).

✓ Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.

Matériel :

- Grande éprouvette remplie de glycérol ;
- Deux élastiques ;
- Des billes d'acier calibrées en rayon ;
- Pied à coulisse ;
- Un aimant ;
- Une balance

Données

- Masse volumique du glycérol (à 20 °C) : $\rho_\mathrm{f} = 1,26.10^3\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.
- La viscosité du glycérol dépend de la température
- Le glycérol s'hydrate rapidement au contact de l'atmosphère humide et la présence d'eau modifie très rapidement sa viscosité :

Glycérol	pur (20 °C)	pur (25 °C)	hydraté (96% en masse, 20 °C)
$\eta(\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s})$	1.46	0.934	0.648

- Le site permet d'obtenir la valeur tabulée de la viscosité et de la masse volumique selon la température et le pourcentage en eau :
  http://www.met.reading.ac.uk/~sws04cdw/viscosity_calc.html

Première partie
Étude expérimentale

Objectifs du TP

Mesurer la viscosité dynamique du glycérol en étudiant les frottements fluides exercés sur une bille en mouvement dans le glycérol.

I Mise en équation

On étudie la chute de billes sphériques de rayon r et de masse volumique ρ_bille dans une éprouvette cylindrique remplie d'un fluide visqueux de masse volumique ρ_f.

La bille est soumise à trois forces :

- le poids $m\overrightarrow{g} = \rho_\mathrm{bille} V \overrightarrow{g}$, avec $V = \dfrac{4\pi}{3} r^3$ le volume de la ville ;
- la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_f V \overrightarrow{g}$;

— et la force de frottement fluide, modélisée par la formule de Stokes $\overrightarrow{F} = -6\pi\eta r\overrightarrow{v}$, où η est la viscosité dynamique du fluide.
Cependant, le milieu dans lequel chute la bille n'est pas illimité, l'existence de l'éprouvette (cylindre de rayon R). Cela induit une correction non négligeable à la formule de Stokes dans les conditions expérimentales dans lesquelles nous travaillons. Dans ces conditions, cette force peut être modélisée par $\overrightarrow{F} = -6\pi\eta\dfrac{r}{1-2,1\times\dfrac{r}{R}}\overrightarrow{v}$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{g} - \rho_f V\overrightarrow{g} - 6\pi\eta\frac{r}{1-2,1\times\dfrac{r}{R}}\overrightarrow{v}$$

Une fois le régime permanent atteint :

$$\overrightarrow{v} = \frac{(m-\rho_f V)}{6\pi\eta}\left(1-2,1\times\frac{r}{R}\right)\overrightarrow{g}$$

Soit, en norme :

$$\boxed{v = \frac{2}{9}\frac{(\rho_{\text{bille}}-\rho_f)}{\eta}gr^2\times\left(1-2,1\times\frac{r}{R}\right)}$$

Le régime transitoire est d'une durée de quelques $\tau = \dfrac{m}{6\pi\eta r}\times\left(1-2,1\times\dfrac{r}{R}\right) = \dfrac{2}{9}\dfrac{\rho_{\text{bille}}r^2}{\eta}\times\left(1-2,1\times\dfrac{r}{R}\right)$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

— le régime permanent est atteint rapidement, la bille chute à vitesse constante ;

— le fond du tube n'a pas d'influence sur l'écoulement.

II Expérience

Protocole

Q1. * Proposer un protocole permettant de déterminer la valeur de la viscosité dynamique du fluide, η.
On privilégiera un protocole permettant de faire une étude statistique.
Ce protocole devra être **détaillé**, **entièrement rédigé** et accompagné d'un **schéma légendé** pour illustrer les mesures à effectuer :

— les grandeurs à mesurer : avec quoi ? comment ?

— l'exploitation à effectuer, notamment les calculs à faire une fois les mesures effectuées.

Expérience

☞ Après avoir fait valider le protocole par l'enseignant, réaliser l'expérience proposée.

III Exploitation et conclusion

Exploitation

Q2. Noter les mesures.

Q3. 💻 Renseigner les mesures pour chaque grandeur dans une unique liste. Autrement dit, vous définissez une seule liste de rayons et une seule liste de temps.

Q4. 💻 Exploiter les mesures effectuées pour en déduire la viscosité dynamique du glycérol, **avec son incertitude-type**.

Q5. Vérifier l'hypothèse de régime permanent.

Conclusion

Q6. Conclure sur la valeur de la viscosité dynamique du glycérol, avec son incertitude-type, dans les conditions de l'expérience.

IV S'il vous reste du temps : comment faire avec une seule mesure ?

Exploitation

Q7. Utiliser une mesure effectuée précédemment et mettre en œuvre une simulation Monte-Carlo pour déterminer le résultat de l'expérience.

Conclusion

Q8. Conclure sur la valeur de la viscosité dynamique du glycérol, avec son incertitude-type, dans les conditions de l'expérience.

Deuxième partie

Étude numérique : méthode d'Euler

I Objectif

L'objectif de cette partie est de mettre en œuvre la résolution numérique d'une équation différentielle du type :

$$\begin{cases} v(0) & = & v_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & = & f(v) \end{cases}$$

où f est une fonction quelconque de v.

Nous allons traiter deux exemples :

— Premier exemple, celui du TP :

$$\begin{cases} v(0) & = & 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & = & g\left(1-\dfrac{\rho_f V}{m}\right)-6\pi\eta\dfrac{r}{1-2,1\times\dfrac{r}{R}}v \end{cases}$$

on identifie donc $f(v)=g\left(1-\dfrac{\rho_f V}{m}\right)-\dfrac{6\pi\eta}{m}\dfrac{r}{1-2,1\times\dfrac{r}{R}}v$

— Deuxième exemple, celui du cours avec le parachutiste soumis à des frottements quadratiques :

$$\begin{cases} v(0) & = & 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & = & g-\dfrac{\rho_{\text{air}}C_x S}{2m}v^2 \end{cases}$$

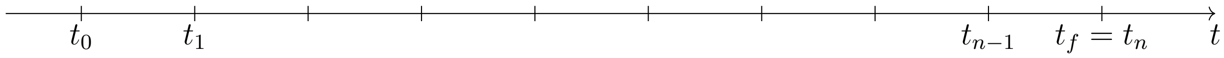
on identifie donc $f(v)=g-\dfrac{\rho_{\text{air}}C_x S}{2m}v^2$

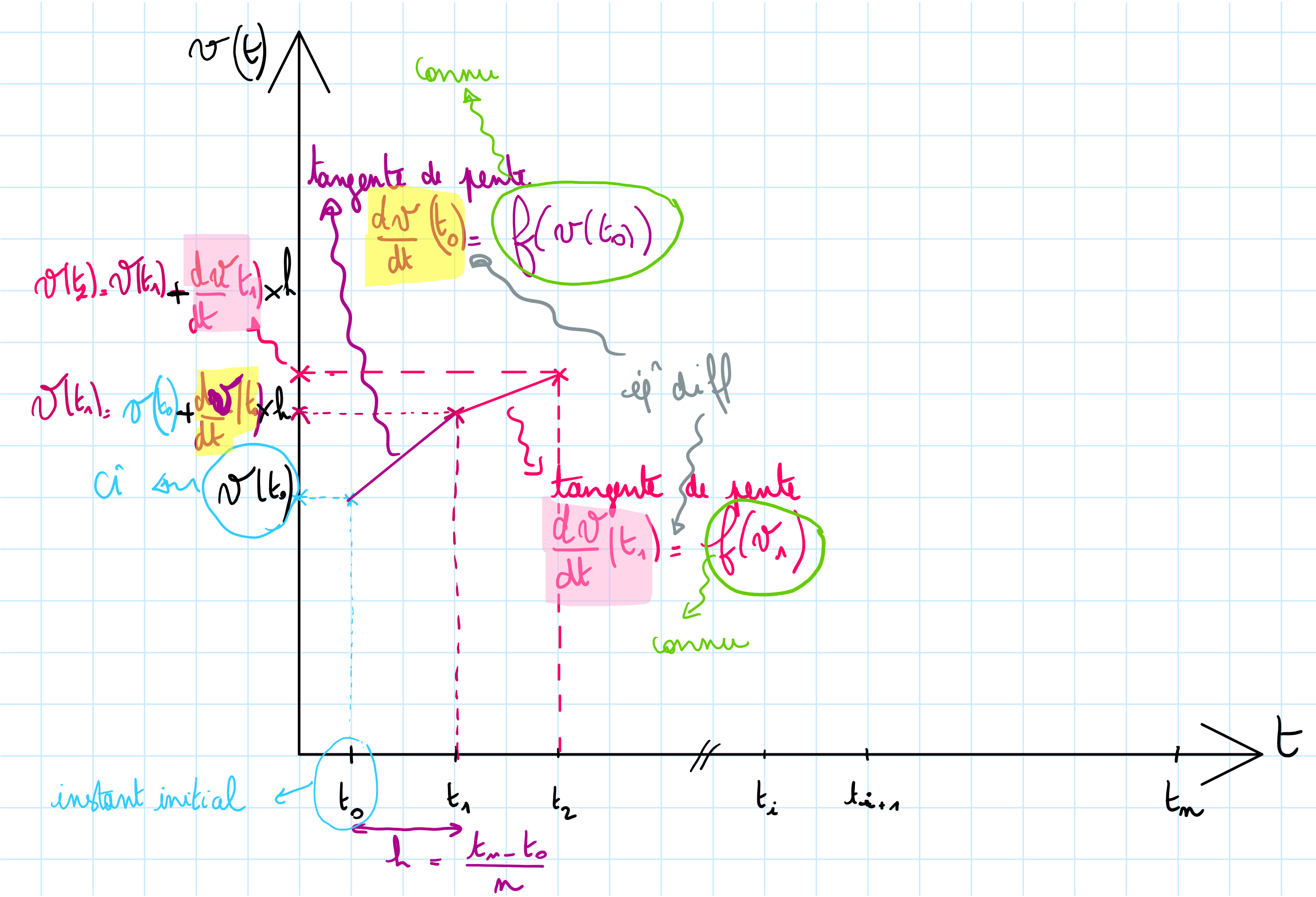
II Algorithme d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode numérique de résolution approchée des équations différentielles du premier ordre.

On découpe l'intervalle $[t_0, t_f]$ de résolution, en n intervalles de largeur $h = \dfrac{t_f - t_0}{n}$.

La valeur approchée de la solution est déterminée en $(n+1)$ instants, qui s'écrivent $t_i = t_0 + i \times h = t_0 + i \times \dfrac{t_f - t_0}{n}$ (pour $i \in [\![0, n]\!]$).





<u>Les valeurs approchées de v se déterminent de proche en proche en partant de l'instant initial.</u>

— Partons de l'instant initial $t_0 = 0$ où on connait la vitesse $v(t_0)$ (c'est la condition initiale).

Le nombre dérivé à l'instant t_0, noté $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t_0)$, s'exprime, d'après l'équation différentielle, selon :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t_0) = f(v(t_0))$$

il correspond à la **pente de la tangente à la courbe à l'instant** t_0**.** Ce nombre dérivé est connu à t_0, puisque $v(t_0)$ est connue (CI) et donc $f(v(t_0))$ également.

L'idée de la méthode d'Euler est d'**approximer sur l'intervalle** $[t_0, t_1]$ **la fonction** v **par sa tangente à** t_0.

Connaissant la valeur de la pente et le point $\big(t_0, v(t_0)\big)$ de cette tangente, on peut déterminer la valeur de $v(t_1)$ (équation d'une droite) :

$$\begin{aligned}
v(t_1) &\approx v(t_0) + \text{pente}_0 \times (t_1 - t_0)\\
v(t_1) &\approx v(t_0) + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t_0) \times h\\
v(t_1) &\approx v(t_0) + f(v(t_0)) \times h\\
v_1 &\approx v_0 + f(v_0) \times h
\end{aligned}$$

— On connait maintenant $v(t_1)$ à l'instant t_1.
Le nombre dérivé à l'instant t_1, s'exprime, d'après l'équation différentielle, selon :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t_1) = f(v(t_1))$$

il correspond à la **pente de la tangente à la courbe à l'instant** t_1**.** Ce nombre dérivé est connu à t_1, puisque $v(t_1)$ est connu (étape précédente) et $f(v(t_1))$ est connu.
L'idée de la méthode d'Euler est d'**approximer sur l'intervalle** $[t_1, t_2]$ **la fonction** u_c **par sa tangente à** t_1.
Connaissant la valeur de la pente et le point $\big(t_1, v(t_1)\big)$ de cette tangente, on peut déterminer la valeur de $v(t_2)$ (équation d'une droite) :

$$\begin{aligned}
v(t_2) &\approx v(t_1) + \text{pente}_1 \times (t_2 - t_1)\\
v(t_2) &\approx v(t_1) + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t_1) \times h\\
v(t_2) &\approx v(t_1) + f(v(t_1)) \times h\\
v_2 &\approx v_1 + f(v_1) \times h
\end{aligned}$$

— Et ainsi de suite...

— Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, On connait maintenant $v(t_i)$ à l'instant t_i.
Le nombre dérivé à l'instant t_i, s'exprime selon : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t_i) = f(v(t_i))$, il correspond à la **pente de la tangente à la courbe à l'instant** t_i**.** Ce nombre dérivé est connu à t_i, puisque $v(t_i)$ est connu (étape précédente) et $f(v(t_i))$ est connu.
L'idée de la méthode d'Euler est d'**approximer sur l'intervalle** $[t_i, t_{i+1}]$ **la fonction** u_c **par sa tangente à** t_i.
Connaissant la valeur de la pente et le point $\big(t_i, v(t_i)\big)$ de cette tangente, on peut déterminer la valeur de $v(t_{i+1})$ (équation d'une droite) :

$$\begin{aligned}
v(t_{i+1}) &\approx v(t_i) + \text{pente}_i \times (t_{i+1} - t_i)\\
v(t_{i+1}) &\approx v(t_i) + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t_i) \times h\\
v(t_{i+1}) &\approx v(t_i) + f(v(t_i)) \times h\\
v_{i+1} &\approx v_i + f(v_i) \times h
\end{aligned}$$

On note v_i la valeur approchée déterminée par la méthode d'Euler de v à l'instant t_i : $v(t_i) \approx v_i$.

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad : \; v_{i+1} \approx v_i + f(v_i) \times h}$$

Cette relation de récurrence permet de déterminer successivement les valeurs approchées de v connaissant la tension e imposée à chaque instant par le générateur, et la valeur de v à $t = 0$.

Méthode : Mise en œuvre

1°) Définir les différentes constantes du problème.
2°) Définir l'instant t_0 et t_f de l'intervalle de résolution.
3°) Choisir le nombre d'intervalles n de résolution.
4°) Définir le pas h de résolution.
5°) Créer une liste de temps.
6°) Créer une liste de vitesse, initialisée avec la condition initiale.
7°) Écrire une boucle qui permet de déterminer les valeurs successives de la vitesse à partir de la relation de récurrence. Ajouter à chaque fois à la liste des vitesses.

III Mise en œuvre avec frottements linéaires

La relation de récurrence issue du schéma d'Euler est alors :

$$\begin{cases} v_0 & = & 0 \\ v_{i+1} & = & v_i \quad + \quad \left(g\left(1 - \dfrac{\rho_f V}{m}\right) - \dfrac{6\pi\eta}{m} \dfrac{r}{1 - 2,1 \times \dfrac{r}{R}} v_i \right) \end{cases} \quad , \quad \forall i \in [\![0, n-1]\!]$$

Étude numérique

☞ Renseigner les constantes du problème.
☞ Définir l'instant t_0 et t_f de l'intervalle de résolution.
☞ Choisir le nombre d'intervalles n de résolution.
☞ Définir le pas h de résolution.
☞ Créer une liste de temps.
☞ Créer une liste de vitesse, initialisée avec la condition initiale.
☞ Écrire la boucle qui permet de déterminer les valeurs successives de la vitesse à partir de la relation de récurrence. Ajouter à chaque fois à la liste des vitesses.
☞ Tracer la courbe de v en fonction du temps.
☞ Si besoin, ajuster le choix de n.

Q9. Noter vos observations.

Q10. Modifier n (allant de quelques unités à plusieurs milliers) et noter vos observations.

☞ Superposer le tracé issu de la méthode de Euler avec la solution obtenue mathématiquement.

Q11. Commenter.

IV Mise en œuvre avec frottements quadratiques

La relation de récurrence issue du schéma d'Euler est alors :

$$\begin{cases} v_0 & = & 0 \\ v_{i+1} & = & v_i \quad + \quad \left(g - \dfrac{\rho_{\text{air}} C_x S}{2m} v_i^2 \right) \times h \end{cases} \quad , \quad \forall i \in [\![0, n-1]\!]$$

Étude numérique

☞ Procéder comme précédemment pour obtenir la liste des vitesses.
☞ Tracer la courbe de v en fonction du temps.
☞ Si besoin, ajuster le choix de n et de t_f.

Q12. Noter vos observations.

Q13. Modifier les différents paramètres physiques du problème et noter leurs influences.

V Utilisation des fonctions de python

Étude numérique

Python a des fonctions de résolution déjà programmées.

☞ Observer le cas traité.

Q14. Comment est définie la fonction f qui définit l'équation différentielle ?

Q15. Quels sont les arguments de la fonction ? Les décrire en français.

Q16. Comment récupère-t-on la liste des vitesses une fois la résolution effectuée ?

☞ Adapter cela pour les frottements quadratiques.
☞ Récupérer la liste des vitesses.
☞ Tracer v en fonction du temps.

Q17. Commenter la courbe obtenue.