Thème II. Mouvements et interactions (Mécanique)

TD n°14 Théorème du moment cinétique pour le point matériel

Capacités \ Exercice n°	1	2	3	4	5
Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.					
Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.					
Utiliser le théorème scalaire ou le théorème en un point fixe du moment cinétique en référentiel galiléen.					
Reconnaître les cas de conservation du moment cinétique.					

Parcours possibles

- Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : exercices n°1, n°2, n°3 (Q1 à Q4 uniquement).
- Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : exercices n°1, n°3.
- Si vous êtes à l'aise : exercices n°3, 4, 5 et 6.

I Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 QCM

Q1. Les moments par rapport à un point sont des vecteurs. ◯ Vrai ◯ Faux

Q2. Les moments par rapport à un axe sont des vecteurs. ◯ Vrai ◯ Faux

Q3. Le moment d'une force a les mêmes dimensions qu'une énergie. ◯ Vrai ◯ Faux

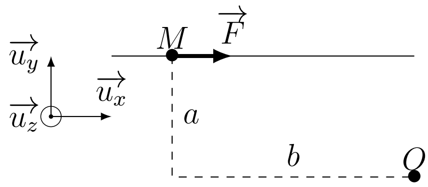
Q4. Le bras de levier est la distance entre le point d'application d'une force et l'axe considéré.
◯ Vrai ◯ Faux

Q5. À quelle autre(s) grandeur(s) physique(s) rencontrée(s) dans le cours de mécanique est homogène le moment d'une force ? ◯ vitesse ◯ énergie ◯ puissance ◯ travail

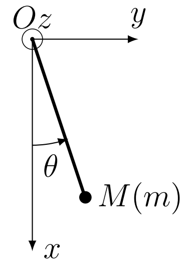
Q6. Le moment cinétique par rapport à O d'un point matériel M, de masse m, de vitesse $\vec{v}$ et subissant une force $\vec{F}$:
- ◯ s'écrit $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$;
- ◯ s'écrit $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$;
- ◯ est nul si sa trajectoire est une droite passant par le point O.

Q7. Une force dont la droite d'action est normale à un axe (Δ) est appliquée à un point matériel. Son moment par rapport à (Δ) :
- ◯ a la même dimension que le travail d'une force ;
- ◯ permet de savoir si la force modifie la vitesse du point matériel ;
- ◯ a un module inversement proportionnel à son bras de levier par rapport à (Δ).

Q8. Le moment $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$ d'intensité F par rapport au point O est :
◯ $Fa\vec{u_z}$ ◯ $-Fb\vec{u_y}$ ◯ $-Fb\vec{u_z}$ ◯ $-Fa\vec{u_z}$



Exercice n°2 Pendule simple



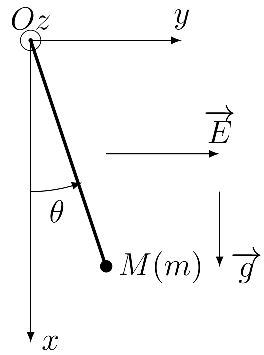
On étudie le pendule simple : un point matériel M est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ. On note O le point d'attache du fil.

Q1. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à O.

Q2. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz.

Q3. La résoudre complètement, après linéarisation justifiée, si à $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0 \ll 1$ rad et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Exercice n°3 Pendule électrostatique



Un pendule électrostatique est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par un fil de masse négligeable. La boule est préalablement chargée avec une charge électrique $Q = 2,3.10^{-4}$ C. L'ensemble est placé entre deux plaques de cuivre planes et parallèles soumises à une différence de potentiel telle qu'elles génèrent un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_y}$ avec $E = 500$ V $\cdot$ m^{-1}.
La longueur du pendule est $OM = R = 10$ cm et la masse de la boule assimilée à un point M est $m = 20$ g.
L'accélération de la pesanteur est $g = 9,8$ m $\cdot$ s^{-2}.

Q1. Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le pendule et les représenter sur le schéma.
Exprimer le moment de ces forces par rapport à l'axe (Oz) en utilisant le bras de levier.

Q2. Que peut-on dire de la somme des moments à l'équilibre ?

Q3. Déterminer la position d'équilibre θ_e du pendule.

Q4. Appliquer le théorème du moment cinétique à M par rapport à l'axe (Oz).

(Questions plus difficiles)

On écarte le pendule légèrement de sa position d'équilibre. On pose $\varepsilon = \theta - \theta_e$.
On rappelle que pour $|\varepsilon| \ll \theta_e$, on a $\cos(\theta_e + \varepsilon) \approx \cos(\theta_e) - \varepsilon \sin(\theta_e)$ et $\sin(\theta_e + \varepsilon) \approx \sin(\theta_e) + \varepsilon \cos(\theta_e)$.

Q5. Établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des petites oscillations, vérifiée par ε.

Q6. En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 des oscillations puis calculer sa période propre T_0.

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Masse accrochée à une ficelle

Le point M de masse m se déplace sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché à un fil inextensible, sans masse et de longueur ℓ. Le fil passe par un trou pratiqué dans le plan horizontal en O. L'autre extrémité du fil est déplacée à la vitesse $\overrightarrow{v} = -v_0\overrightarrow{u_z}$, l'axe Oz étant l'axe vertical ascendant.

Q1. Faire un schéma du dispositif.

Q2. Donner une relation entre la côte z de l'extrémité du fil et la distance $\rho = OM$. En déduire une relation entre les dérivées premières de z et de ρ.

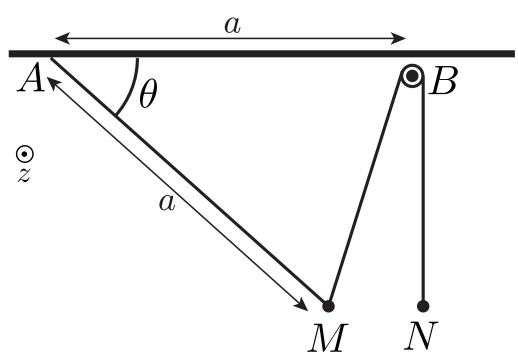
Q3. Montrer que le moment cinétique de M est constant.

Q4. Sachant que la masse est lancée avec une vitesse angulaire ω_0 à partir de la distance d du point O, déterminer $\rho(t)$ et $\omega(t)$.

Q5. En déduire $\theta(t)$ si $\theta(0) = 0$, puis $\rho(\theta)$. Tracer l'allure de la trajectoire de M.

Exercice n°5 Équilibre

Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à un socle horizontal et passant en B sur une poulie parfaite, de très petites dimensions, avec $AB = a$. Sur le fil, en un point M tel que $AM = a$, est attachée une masse ponctuelle m et, au bout du fil, est aussi accrochée une masse m' en N. Le dispositif est placé verticalement dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$.



Q1. Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments en A.

Il y a trois forces, et le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera l'angle $\theta = \widehat{AB, AM}$. On admettra que la norme de la force exercée par N sur M via le fil vaut $m'g$.

Q2. Trouver une relation vérifiée par l'angle θ lorsque le système est à l'équilibre.

Q3. Trouver la solution de cette équation. On pourra utiliser la relation $\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$. On discutera de la condition sur m et m' pour que la solution existe.

Exercice n°6 Pendule conique

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur ℓ attaché en un point A fixe d'un axe (Oz).
Le point matériel M est astreint à tourner autour de (Oz), dans le plan (Oxy), à la vitesse angulaire constante ω dans le référentiel galiléen d'étude $\left(O; \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$.

En appliquant le théorème du moment cinétique en un point astucieusement choisi, déterminer l'angle d'inclinaison constant α du pendule avec l'axe (Oz) en fonction de ℓ, g et ω.