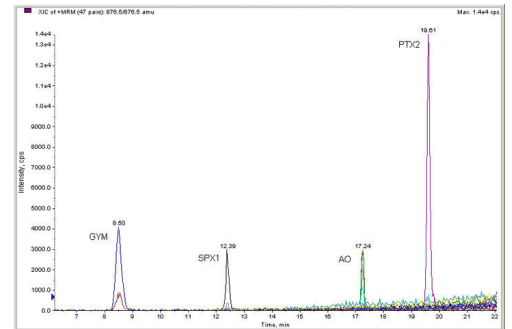
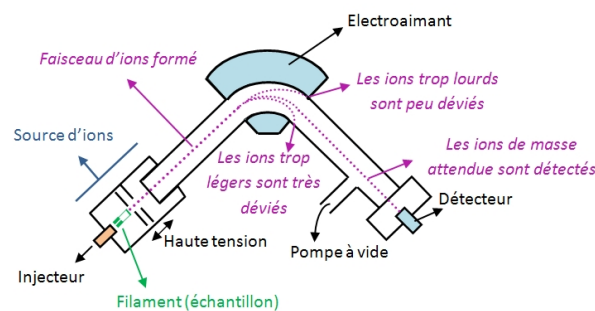


? À rendre jeudi 6 février 2025 Devoir Maison n°14 – Particules chargées

Travail à faire :

- Si vous n'êtes pas très à l'aise / en difficulté : Exercice n°1
- Si vous êtes plutôt à l'aise : Exercice n°2.

Exercice n°1 Séparation des isotopes par spectrométrie de masse



Données :

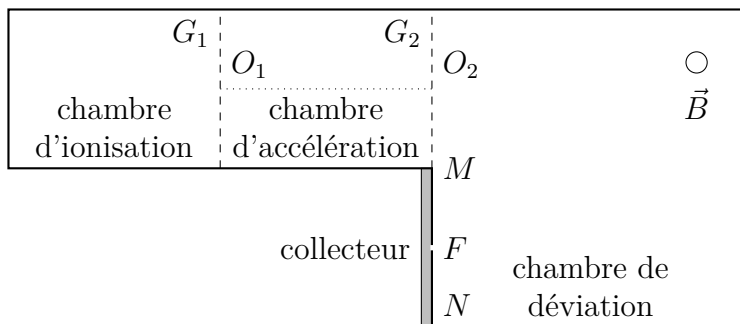
- Charge élémentaire $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Unité de l'électron-Volt : $1 \text{ eV} = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
- Nombre d'Avogadro $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- Les deux principaux isotopes de l'uranium sont ${}^{235}_{92}\text{U}$ et ${}^{238}_{92}\text{U}$ de masses molaires respectives $235,0439 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $238,0508 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

La France produit l'essentiel de son électricité – environ 75 % – à partir de centrales électriques nucléaires. Ces centrales utilisent comme source d'énergie un « combustible » constitué d'oxyde d'uranium enrichi en uranium 235, seul isotope fissile, afin d'atteindre une teneur de l'ordre de 4 %. Avant utilisation dans une centrale, le minerai doit donc d'abord être traité afin de produire ce combustible.

L'enrichissement de l'uranium a pour but d'élever la teneur en ${}^{235}\text{U}$ de l'uranium de départ à une valeur optimale pour l'application souhaitée. Une des méthodes est la spectrographie de masse qui reste la méthode la plus sensible d'analyse isotopique.

Un spectrographe de masse se compose de quatre parties :

- La chambre d'ionisation dans laquelle des atomes d'uranium ${}^{235}_{92}\text{U}$ et ${}^{238}_{92}\text{U}$ de masses respectives m_1 et m_2 portés à haute température sont ionisés en ions U^+ . On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en O_1 , la vitesse des ions est quasi nulle.
- La chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre O_1 et O_2 sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles G_1 et G_2 .
- La chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme \vec{B} de direction perpendiculaire au plan de la figure.
- Un collecteur d'ions est disposé entre M et N . Une fente centrée sur O_2 de largeur L dans le plan de la figure permet de choisir la largeur du faisceau incident. Une fente collectrice centrée sur F est placée entre M et N et a pour largeur L' dans le plan de la figure.



Les chambres sont sous vide, ce qui permet de considérer que les particules n'interagissent pas entre elles. On négligera le poids des ions devant la force électromagnétique et on admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vitesses des ions sont contenues dans le plan de la figure.

Partie A Préliminaires

- Q1. Donner l'expression de la force de Lorentz. Préciser les noms et unités des différentes grandeurs.
- Q2. Exprimer et calculer la masse d'un atome ${}^{235}_{92}\text{U}$ et d'un atome ${}^{238}_{92}\text{U}$.
- Q3. Justifier que le poids des atomes d'uranium est bien négligeable devant la force de Lorentz électrique et magnétique (on proposera des valeurs raisonnables des champs électrique, magnétique et de la vitesse de la particule chargée).

Partie B Accélération des ions

- Q4. Établir l'expression de l'augmentation de l'énergie cinétique des ions U^+ entre O_1 et O_2 . On l'exprimera en fonction de la différence de potentiel $V_{G_1} - V_{G_2}$.
Quel doit être le signe de la différence de potentiel $V_{G_1} - V_{G_2}$ pour que les ions soient accélérés entre O_1 et O_2 ?
- Q5. Établir les expressions des vitesses v_{235} et v_{238} respectivement des ions ${}^{235}_{92}\text{U}^+$ et ${}^{238}_{92}\text{U}^+$ lorsqu'ils parviennent en O_2 en fonction de m_{235} , m_{238} et $U = V_{G_1} - V_{G_2}$.
- Q6. L'énergie cinétique acquise par les ions en O_2 est de 15,0 keV. En déduire la valeur de la tension U appliquée entre les deux grilles.
Déterminer numériquement les vitesses v_{235} et v_{238} .

Partie C Déviation des ions

- Q7. Quel doit être le sens du champ magnétique \vec{B} régnant dans la chambre de déviation pour que les ions puissent atteindre le collecteur ? *
- Q8. Montrer que le mouvement dans le champ magnétique est uniforme.
- Q9. Appliquer le principe fondamental de la dynamique. Comment est le vecteur accélération par rapport à \vec{B} ?
- Q10. Projeter le PFD selon \vec{u}_z . En déduire que le mouvement est plan.
- Q11. Exprimer \vec{v} et \vec{a} en utilisant la base de Frenet dans le plan du mouvement.
- Q12. En réutilisant le PFD † montrer que le mouvement est circulaire et exprimer le rayon R_{235} en fonction de m_{235} , e , U et $B = \|\vec{B}\|$. En déduire le rayon R_{238} de la trajectoire de ${}^{238}_{92}\text{U}^+$.

.*

- Représenter l'allure de la trajectoire.
- Représenter dessus le vecteur accélération et la force magnétique.
- Compte tenu du signe de la charge, déterminer le sens de $\vec{v} \wedge \vec{B}$.
- En déduire le sens de \vec{B} permettant cela.

†.

- Calculer la norme de chaque membre du PFD.
- En déduire le rayon de courbure.
- Conclure.

Q13. Le collecteur consiste en un récipient métallique muni d'une fente centrée en F de largeur L' placée entre M et N qui permet de recueillir les isotopes 235.

Quelle doit être la valeur du champ magnétique régnant dans le spectromètre sachant que la fente F est placée à $D = 940$ mm de O_2 ? ‡

Les deux dernières questions sont facultatives.

Q14. Le faisceau d'ions émis en O_2 est un faisceau parallèle dans le plan de la figure. La fente du collecteur a une largeur de $L' = 4,0$ mm dans le plan de la figure.

Peut-il y avoir séparation isotopique dans le récipient du collecteur ?

Q15. L'intensité du faisceau utilisé dans le spectromètre est de 100 mA. La source est alimentée en uranium contenant 0,7 % de ${}_{92}^{235}\text{U}^+$ et 99,3 % de ${}_{92}^{238}\text{U}^+$.

Quelle quantité de l'isotope 235 le spectromètre peut-il isoler en une année de fonctionnement continu ?

Exercice n°2 Aurores boréales

Partie A Aurores polaires terrestres

Les aurores polaires sont des phénomènes lumineux se produisant entre 80 et 400 km d'altitude causés par la précipitation de particules chargées en provenance de l'espace sur les atomes et les molécules des couches externes de l'atmosphère terrestre. Ces particules sont principalement des électrons dont l'énergie cinétique est de l'ordre du keV pour les aurores les plus spectaculaires.

Q1. Expliquer le caractère lumineux d'une aurore polaire.

Q2. Pourquoi une aurore boréale (hémisphère nord) apparaît-elle simultanément à une aurore australe (hémisphère sud) ? (on s'appuiera sur le document [Partie D](#) page 5).

Partie B Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

Afin d'interpréter l'arrivée des particules chargées à l'origine des aurores polaires, on se propose dans la suite de modéliser la dynamique d'un électron dans une zone de champ magnétique stationnaire.

Q3. Dans le référentiel géocentrique (\mathcal{R}) supposé galiléen, on considère tout d'abord un électron de masse m pénétrant en O dans une zone de champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$, avec ($B_0 > 0$). La force gravitationnelle terrestre a-t-elle une influence sur la dynamique de cet électron ? On attend un argument qualitatif fondé sur un calcul d'ordre de grandeur.

Q4. Justifier, en utilisant un théorème énergétique, que le mouvement de l'électron plongé dans le champ magnétique \vec{B}_0 est nécessairement uniforme.

Q5. On suppose que la vitesse initiale de la particule s'écrit $\vec{v}_0 = v_{0z} \vec{u}_z$, avec ($v_{0z} > 0$).

Comment se déplace l'électron vis à vis de la direction du champ magnétique ?

On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x$, avec ($v_{0x} > 0$).

Q6. Par analyse dimensionnelle, mettre en évidence une pulsation ω_c caractéristique du mouvement de l'électron en fonction de e , m et B et l'évaluer dans le champ magnétique terrestre régnant à l'altitude d'un satellite géostationnaire.

Données :

- le champ magnétique créé par un dipôle magnétique tel celui de la Terre évolue en $\frac{1}{r^3}$, où r est la distance entre le noyau (qui crée le champ), et le point considéré ;
- le champ créé par la Terre (de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km), à sa surface, est de $5 \cdot 10^{-5}$ T ;
- le rayon de la trajectoire d'un satellite géostationnaire est de $4,2 \cdot 10^4$ km.

‡. Faire le lien entre D et le rayon de la trajectoire R_{235} . En déduire la valeur de B nécessaire.

Q7. Par application du principe fondamental de la dynamique, justifier que le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire au vecteur \vec{B}_0 , puis établir les équations couplées suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{eB_0}{m}y + v_{0x} & (1) \\ \dot{y} = \frac{eB_0}{m}x & (2) \end{cases}$$

Q8. En déduire l'équation différentielle vérifiée par y :

$$\ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c v_{0x}$$

Q9. En déduire les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.

Q10. Montrer que la trajectoire de l'électron est circulaire en établissant son équation cartésienne. Représenter la trajectoire et repérer son centre.

Évaluer son rayon R_c .

Un électron accéléré non relativiste perd de l'énergie en rayonnant à un instant donné une puissance électromagnétique $\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} e^2 \dot{\beta}^2$.

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} e^2 \dot{\beta}^2$$

Q11. Par analyse dimensionnelle, déterminer les valeurs des puissances α et β .

Indication : Pour $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, on pourra utiliser la force de Coulomb pour déterminer sa dimension.

Q12. En utilisant l'expression obtenue Q10, exprimer la variation de l'énergie cinétique de l'électron dE_c lorsque R_c varie de dR_c .

Établir l'équation différentielle vérifiée par R_c et l'écrire sous la forme $\frac{dR_c}{dt} + \frac{R_c}{\tau} = 0$

Q13. En déduire l'expression de la fonction $R_c(t)$ et établir que le temps caractéristique τ mis en évidence s'écrit

$$\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 B_0}{e\omega_c^3}$$

L'évaluer et commenter.

Q14. On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0z}\vec{u}_z$, avec ($v_{0x} > 0$ et $v_{0z} > 0$). Comment se déplace l'électron vis à vis du champ magnétique ?

Partie C Ceintures de Van Allen

La Terre est entourée d'une zone où des particules de haute énergie cinétique, typiquement de quelques 100 MeV au GeV, sont piégées par le champ magnétique. Ces particules sont réparties dans des ceintures autour du plan équatorial dites ceintures de Van Allen ou ceintures de radiation. Ces ceintures sont très stables et contrairement aux autres éléments de la magnétosphère, elles sont peu sensibles aux orages, sous-orages et autres reconfigurations de la magnétosphère. De ce fait, les particules s'en échappent difficilement.

Q15. Évaluer la vitesse typique d'un électron dans ces ceintures. La dynamique d'un tel électron peut-elle se déduire des résultats précédents ?

Partie D Document : La magnétosphère de la Terre

D'après : Gilbert Pietryk (sous la direction de), *Panorama de la physique, Pour la Science, Belin, 2007.*

La magnétosphère est la dernière enveloppe d'une planète, avant le milieu interplanétaire. Ce milieu est dominé essentiellement par le vent solaire, constitué de protons et d'électrons très rapides. Comme son nom l'indique, la magnétosphère est caractéristique des planètes qui ont un champ magnétique propre. La magnétosphère terrestre est la mieux connue puisqu'elle est la plus facilement accessible et qu'elle est explorée depuis l'ère des projets spatiaux. Pourtant de nombreux mystères subsistent quant à son fonctionnement, en particulier sur la manière dont elle répond aux modifications de l'activité solaire.

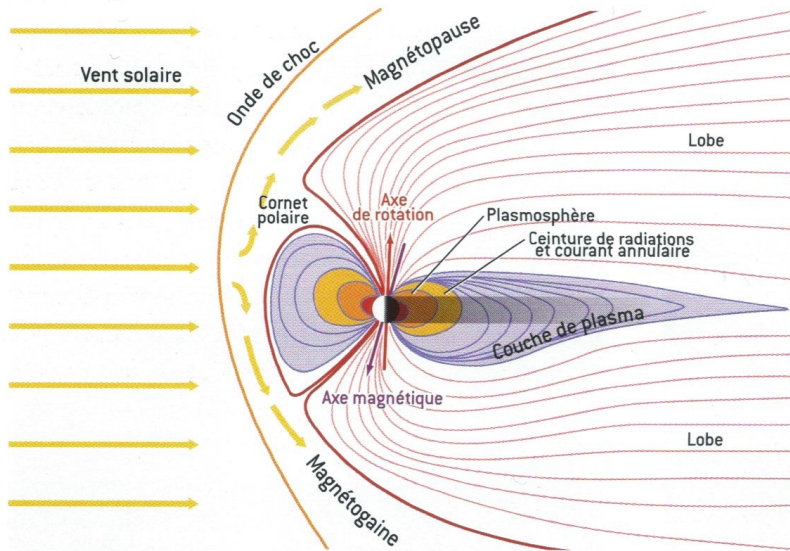


FIGURE 1 – Coupe méridienne de la magnétosphère de la Terre. Le Soleil est loin sur la gauche. Les traits fins symbolisent les lignes de champ magnétique, les flèches jaunes le mouvement du plasma.



FIGURE 2 – Aurore boréale vue du sol sur la Terre. La Lune, visible à côté de l'aurore, donne une idée de la luminosité (Centre d'étude spatiale des rayonnements ©CNRS Photothèque/V. Génot).

L'avant de la magnétosphère se caractérise par une première frontière nette, le choc. Ce choc est dû au fait que le vent solaire a une vitesse d'ensemble supérieure à toutes les vitesses possibles de propagation des ondes dans le milieu. Derrière le choc se trouve la magnétogaine, région où le plasma du vent solaire est ralenti, chauffé et où l'on observe une turbulence importante. Le champ magnétique est encore celui du vent solaire un peu modifié par la traversée du choc. Cette région intermédiaire est suivie d'une autre frontière nette, la magnétopause. Cette frontière sépare la zone d'influence du champ magnétique terrestre de celle du vent solaire. Cette frontière est une discontinuité mince comme un choc mais ce n'est pas un choc, c'est une frontière qui isole vraiment les deux milieux, l'énorme majorité des particules du vent solaire restant à l'extérieur. On constate donc que ce qui fait obstacle au vent solaire ce n'est pas la planète elle-même, ni son atmosphère, mais son champ magnétique. Le contournement du vent solaire donne à la magnétosphère sa forme caractéristique, avec une queue allongée dans la direction opposée au Soleil et deux immenses « lobes » presque totalement vides. L'ionosphère est une région importante dans la dynamique de la magnétosphère (bien qu'invisible à l'échelle de la figure). Elle résulte de l'ionisation des couches supérieures de l'atmosphère par le rayonnement UV du Soleil qui la rend conductrice, et lui fait jouer un rôle dans la fermeture des courants magnétosphériques.

La magnétosphère et son intense activité électromagnétique ne sont pas visibles du sol sauf dans les régions polaires où elles peuvent se manifester de façon très spectaculaire. Le champ magnétique terrestre est à peu près celui d'un dipôle dont l'axe passe dans les régions polaires. Les lignes de champ qui viennent des régions éloignées de la Terre plongent donc dans l'atmosphère dans les régions polaires. Comme dans la magnétosphère le plasma est peu dense, il n'y a pas de collisions et les particules chargées restent liées aux lignes de champ. Quand une reconfiguration magnétique intervient (ce qu'on appelle un sous-orage magnétique), les particules accélérées dans la queue de la magnétosphère arrivent le long du champ sur les couches denses de l'atmosphère et produisent des aurores. Dans le même temps, ces électrons accélérés émettent un rayonnement radio dont la longueur d'onde est de l'ordre du kilomètre et qui s'échappe de la magnétosphère par les pôles.